

## TD3 : Les milieux diélectriques

### 3.1 Introduction

Historiquement, la découverte expérimentale des diélectriques est à mettre au profit de Michael Faraday qui nota que l'introduction d'un isolant entre les armatures d'un condensateur modifiait sa capacité.

On exprime la polarisation  $\vec{P}$  d'un matériau comme la densité volumique de moment dipolaire  $\vec{p}$  soit  $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}$ . En calculant le potentiel électrique à partir d'une distribution de moment dipolaire, on déduit que la densité volumique de charge liées ou polarisées  $\rho_p$  est égale à la divergence du vecteur polarisation :  $\rho_p = -\text{div}\vec{P}$ . De même, la densité surfacique de charges liées est égale à  $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$ . L'équation de Maxwell-Gauss devient

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho_{\text{libre}} + \rho_{\text{liée}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{libre}} - \text{div}\vec{P}}{\epsilon_0}$$

En posant le vecteur  $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ , on obtient l'équation locale suivante

$$\text{div}\vec{D} = \rho_{\text{libre}} \rightarrow \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \Sigma Q_{\text{libre}}$$

Dans le cas particulier d'un milieu Linéaire, Homogène et Isotrope (LHI), la polarisation est égale à  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$  où  $\chi_e$  est un nombre positif, sans dimension, appelé la susceptibilité diélectrique. Dans ce cas, le vecteur  $\vec{D}$  devient

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \underbrace{(1 + \chi_e)}_{\epsilon_r} = \epsilon \vec{E}$$

où  $\epsilon$  et  $\epsilon_r$  sont appelés respectivement la permittivité absolue et la permittivité relative du diélectrique.

### 3.2 Boule uniformément polarisée

On considère une boule uniformément polarisée de rayon  $R$ .

1. Montrer que le potentiel peut-être déterminé en tout point de l'espace en résolvant l'équation de Laplace.

La polarisation est uniforme  $\vec{P} = P\vec{u}_z$ <sup>d</sup>, il n'y a donc pas de charge volumique liée  $\rho_p = -\text{div}\vec{P} = 0$ . Il n'y a pas de charge libre d'où  $\rho = \rho_p + \rho_L = 0$ . L'équation de Poisson  $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$  devient une équation de Laplace.

2. Résoudre l'équation de Laplace en cherchant le potentiel sous la forme  $V(r, \theta) =$

<sup>d</sup>L'invariance du problème permet de poser  $\vec{P} = P\vec{u}_z$  car on pourra toujours pivoter/tourner le système de coordonnées sphériques de telle sorte à ce que  $\vec{P}$  soit colinéaire à Oz.

$f(r) \cos \theta$  où  $f$  est une fonction de la forme :

$$f(r) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n r^n$$

dont on déterminera les coefficients  $a_n$  non nuls.

L'invariance du problème par rotation d'angle  $\phi$  implique que le potentiel  $V$  ne dépende pas de cette coordonnée. En posant  $V(r, \theta) = f(r) \cos \theta$  avec  $f(r) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n r^n$ . Le lapacien en coordonnées sphériques s'écrit

$$\Delta V(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rV(r, \theta)) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rV(r, \theta)) &= \cos \theta \times \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \times n(n+1)r^{n-1} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial \theta} \right) &= \cos \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n r^n \times (-\cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta) \\ &= -2 \cos \theta \sin \theta \times \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n r^n \end{aligned}$$

L'équation de Laplace devient

$$\begin{aligned} \Delta V = 0 &= \cos \theta \times \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \times n(n+1)r^{n-2} - 2 \cos \theta \times \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n r^{n-2} \\ 0 &= n(n+1) - 2 \\ 0 &= (n+2)(n-1) \end{aligned}$$

Les seuls coefficients non nuls sont donc  $a_{-2}$  et  $a_1$ . Le potentiel  $V$  en tout point de l'espace s'écrit

$$V(r, \theta) = \left( \frac{a_{-2}}{r^2} + a_1 r \right) \cos \theta$$

3. Déterminer les potentiels  $V_i$  et  $V_e$  à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère, ainsi que les champs  $\vec{E}_i$  et  $\vec{E}_e$  correspondants. Commenter.

Les potentiels  $V_i$  et  $V_e$  ne doivent pas diverger (équivalent à dire qu'ils doivent rester finis) d'où lorsque  $r \rightarrow 0$ ,  $V_i$  fini impose que  $a_{-2}$  soit nul. De même, lorsque  $r \rightarrow \infty$ ,  $V_e$  reste fini et donc  $a_1 = 0$

$$\begin{aligned} V_i(r, \theta) &= a_1 r \cos \theta \\ V_e(r, \theta) &= \frac{a_{-2} \cos \theta}{r^2} \end{aligned}$$

Par ailleurs, la continuité du potentiel en  $r = R$  conduit à

$$\begin{aligned} V_i(R, \theta) &= V_e(R, \theta) \\ a_1 R \cos \theta &= \frac{a_{-2} \cos \theta}{R^2} \\ a_1 &= \frac{a_{-2}}{R^3} \end{aligned}$$

On utilise finalement la discontinuité de la composante normale du vecteur  $\vec{D}$  à l'interface diélectrique-vide

$$\begin{aligned} (\vec{D}_e(R, \theta) - \vec{D}_i(R, \theta)) \cdot \vec{u}_r &= \sigma_{\text{libre}} = 0 \\ \text{avec } \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ (\epsilon_0 \vec{E}_e + \vec{P}' - \epsilon_0 \vec{E}_i - \vec{P}_i) \cdot \vec{u}_r &= 0 \\ \epsilon_0 (\vec{E}_e - \vec{E}_i) \cdot \vec{u}_r &= \vec{P} \cdot \vec{u}_r = P \cos \theta \end{aligned}$$

Les champs électriques  $\vec{E}_e$  et  $\vec{E}_i$  sont respectivement égaux à

$$\begin{aligned} \vec{E}_e &= -\overrightarrow{\text{grad}} V_e = -\overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{a_{-2} \cos \theta}{r^2} \right) \\ &= -\frac{\partial V_e}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V_e}{\partial \theta} \vec{u}_\theta \\ &= a_{-2} \cos \theta \times \frac{2}{r^3} \vec{u}_r + \frac{1}{r^3} a_{-2} \sin \theta \vec{u}_\theta \\ \vec{E}_i &= -\overrightarrow{\text{grad}} V_i = -\overrightarrow{\text{grad}} (a_1 r \cos \theta) \\ &= -a_1 \cos \theta \vec{u}_r + a_1 \sin \theta \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

La relation de passage projeté selon  $\vec{u}_r$  devient

$$\begin{aligned} \frac{2a_{-2}}{R^3} \cos \theta + a_1 \cos \theta &= \frac{P \cos \theta}{\epsilon_0} \\ \frac{2a_{-2}}{R^3} + \frac{a_{-2}}{R^3} &= \frac{P}{\epsilon_0} \\ a_{-2} &= \frac{PR^3}{3\epsilon_0} \text{ et } a_1 = \frac{P}{3\epsilon_0} \end{aligned}$$

d'où

$$V_e(r, \theta) = \frac{PR^3 \cos \theta}{3\epsilon_0 r^2}$$

$$V_i(r, \theta) = \frac{P}{3\epsilon_0} r \cos \theta$$

$$\vec{E}_e(r, \theta) = \frac{PR^3}{3\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

$$\vec{E}_i(r, \theta) = -\frac{P}{3\epsilon_0} \left( \underbrace{\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta}_{\vec{u}_z} \right)$$

$$= -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} = \text{champ dépolarisant}$$

Le champ électrique extérieur s'apparente au champ électrique créé par un dipôle ponctuel  $\vec{p}$  placé à l'origine avec  $\vec{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{P}$ . Pour rappel, le champ électrique créé par un dipôle est

$$\vec{E} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{p}}{r^3}$$

Or l'expression

$$2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta = 3 \cos \theta \vec{u}_r - \vec{u}_z$$

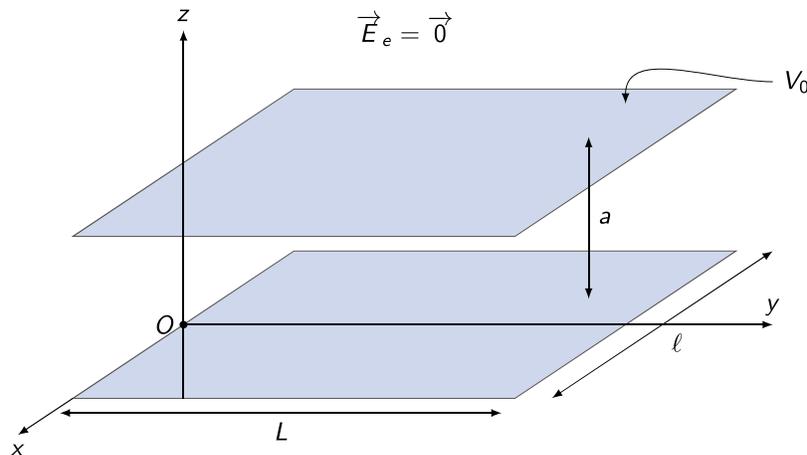
car  $\vec{u}_z = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta$ . Sachant que  $\vec{P} \cdot \vec{u}_r = P \cos \theta$  on obtient

$$\vec{E}_e = \frac{R^3}{3\epsilon_0} \frac{3(\vec{P} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{P}}{r^3}$$

d'où  $\vec{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{P}$ , on retrouve donc bien  $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}$ .

### 3.3 Plaque diélectrique

#### Le condensateur plan



Un condensateur plan rectangulaire de dimension  $\ell \times L$ , d'épaisseur  $a \ll \ell$  ou  $L$ , est relié aux bornes d'un générateur qui délivre une tension constante  $V_0$ . Pour les symétries et invariances, on considère que les armatures sont des plaques conductrices infinies, perpendiculaires à  $Oz$ . L'espace entre les armatures est vide. On suppose que le champ électrique est nul à l'extérieur du condensateur. Étudier la répartition des charges. Retrouver les expressions de la charge  $Q_0$  d'une armature, de la capacité  $C_0$  et de l'énergie stockée  $U_0$ .

### Symétries & invariances de la distribution de charges

- tout plan contenant l'axe  $Oz$  est plan de symétrie d'où  $\vec{E} \parallel \vec{u}_z$
- invariance par translation selon  $Ox$  et  $Oy$  d'où  $E = f(x, y, z)$

L'orientation du champ électrique  $\vec{E} = E(z)\vec{u}_z$  permet la définition d'une surface fermée de forme cylindrique à l'intérieur du condensateur. Le théorème de Gauss implique

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma Q_{\text{int.}}}{\epsilon_0} = 0 \quad (\text{pas de charge à l'intérieur du condensateur})$$

$$E(z_1)S - E(z_2)S = 0 \rightarrow E(z_1) = E(z_2) = E_0$$

$$\vec{E} = E_0\vec{u}_z = -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\frac{dV}{dz}\vec{u}_z$$

$$\int_0^a E_0 dz = -\int_0^{V_0} dV \rightarrow E_0 a = -V_0$$

### Répartition des charges

- en  $z = 0$

$$(\vec{E}_e - \vec{E}_i) \cdot (-)\vec{u}_z = \frac{\sigma_S}{\epsilon_0}$$

$$E_0 = \frac{\sigma_S}{\epsilon_0} \rightarrow Q_0 = \sigma_S \times \ell \times L = -\frac{V_0 \epsilon_0}{a} \ell \times L$$

- en  $z = a$

$$(\vec{E}_e - \vec{E}_i) \cdot \vec{u}_z = \frac{\sigma_S}{\epsilon_0}$$

$$-E_0 = \frac{\sigma_S}{\epsilon_0} \rightarrow Q_a = -\sigma_S \times \ell \times L = \frac{V_0 \epsilon_0}{a} \ell \times L = -Q_0$$

### Capacité du condensateur

$$Q_0 = C_0 V_0 \rightarrow C_0 = \frac{\epsilon_0 \ell \times L}{a} > 0$$

### Énergie stockée dans le condensateur

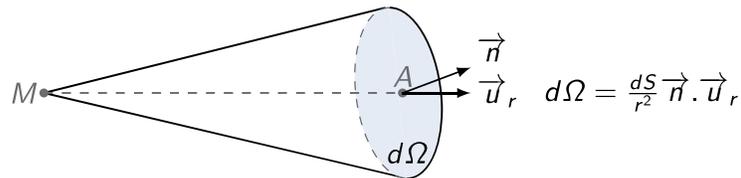
$$U_0 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 \rightarrow U_0 = \frac{\epsilon_0 \ell \times L}{2a} V_0^2$$

$$u_{\text{em}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \rightarrow U = \int u_{\text{em}} d\tau = \frac{\epsilon_0 \ell \times L}{2a} V_0^2 = U_0$$

L'énergie stockée dans le condensateur est bien d'origine électrostatique.

## Plaque diélectrique infinie

1. Une surface élémentaire  $dS$  de normale  $\vec{n}$  porte une densité surfacique de dipôles  $\vec{P}_S = P_S \vec{n}$ . Exprimer le potentiel électrique  $dV(M)$  créé au point  $M$  en fonction de l'angle solide algébrique  $d\Omega$  de la surface vue du point  $M$  (à l'infini le potentiel est nul). En déduire le potentiel créé par un plan infini de normale  $\vec{n}$  en tout point de l'espace, portant une densité surfacique de dipôles uniforme colinéaire à  $\vec{n}$ . Calculer le champ électrique  $\vec{E}(M)$  en tout point.



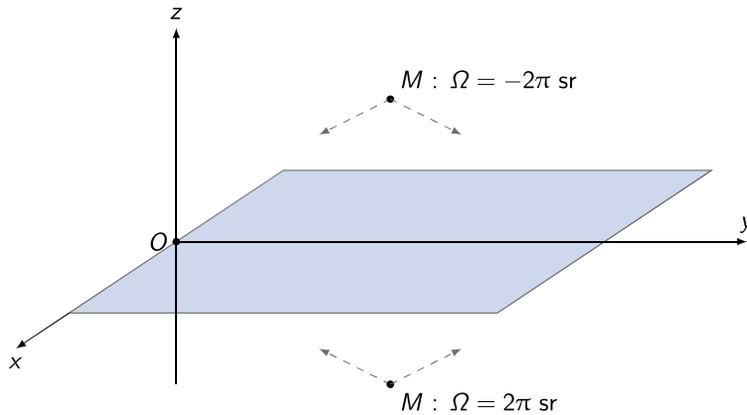
Potentiel créé par un dipôle  $d\vec{p}$

$$dV(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\vec{p} \cdot \vec{AM}}{AM^3} \text{ où } A \text{ est le barycentre du dipôle}$$

La polarisation  $\vec{P}$  représente la densité volumique de moment dipolaire  $\frac{d\vec{p}}{d\tau}$ . La polarisation surfacique  $\vec{P}_S$  est ainsi égale à

$$\begin{aligned} \vec{P}_S &= \frac{d\vec{p}}{dS} \\ d\vec{p} &= P_S d\vec{S} = P_S dS \vec{n} \\ dV(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P_S dS \vec{n} \cdot \vec{AM}}{AM^3} \\ &\text{avec } \vec{AM} = -r \vec{u}_r \\ dV(M) &= -\frac{P_S}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \end{aligned}$$

En fonction de la position du point  $M$  *i.e.* au dessus ou en dessous du plan infini le potentiel électrique  $V(M)$  change de signe du fait que l'angle solide  $\Omega = \pm 2\pi$  sr.



Ainsi, le potentiel vu en un point au dessus de la surface du diélectrique est égal à

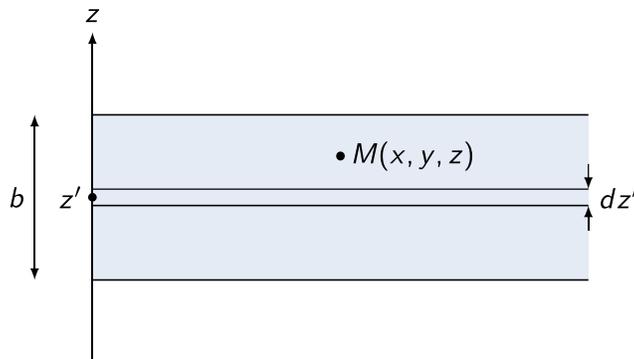
$$V(M_+) = \int_{\text{plan}} -\frac{P_S}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{P_S}{2\epsilon_0}$$

$$V(M_-) = -\frac{P_S}{2\epsilon_0}$$

Dans les deux cas, le potentiel électrique étant constant :  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = \vec{0}$ .

2. Une plaque diélectrique infinie parallèle au plan  $xOy$ , d'épaisseur  $b$ , porte les dipôles répartis en son volume de sorte que sa polarisation est  $\vec{P} = P(z)\vec{u}_z$ . Calculer en tout point  $M$ , le potentiel  $V_d(M)$  et le champ électrique  $\vec{E}_d(M)$ . Indication : décomposer la plaque en tranches d'épaisseur  $dz$ , exprimer  $V_d(M)$  par une intégrale de  $P(z)$  en distinguant les cas où  $M$  est extérieur ou intérieur à la plaque.

En décomposant la plaque en tranche d'épaisseur infinitésimale  $dz'$ , chacune porte une densité surfacique  $dP_S = P(z')dz'$



En fonction de la position  $z$  du point  $M$ , le potentiel électrique est

- si  $z > z'$

$$dV(z) = \frac{dP_S}{2\epsilon_0} = \frac{P(z')dz'}{2\epsilon_0}$$

- si  $z < z'$

$$dV(z) = -\frac{dP_S}{2\epsilon_0} = -\frac{P(z')dz'}{2\epsilon_0}$$

On distingue par suite 3 situations

- pour tout point M tel que  $z < 0$

$$V_d(M) = - \underbrace{\int_0^b \frac{P(z')dz'}{2\epsilon_0}}_{\text{indépendant de } z} = \text{constante} \rightarrow \vec{E} = \vec{0}$$

- pour tout point M tel que  $z > b$

$$V_d(M) = + \underbrace{\int_0^b \frac{P(z')dz'}{2\epsilon_0}}_{\text{indépendant de } z} = \text{constante} \rightarrow \vec{E} = \vec{0}$$

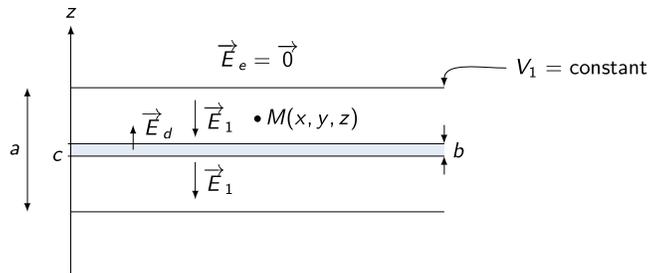
- pour tout point M tel que  $0 < z < b$

$$\begin{aligned} V_d(M) &= \frac{1}{2\epsilon_0} \left( \int_0^z P(z')dz' - \int_z^b P(z')dz' \right) \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0} \left( \int_0^z P(z')dz' + \int_b^z P(z')dz' \right) \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0} \left( \int_0^z P(z')dz' + \int_b^0 P(z')dz' + \int_0^z P(z')dz' \right) \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0} \left( 2 \int_0^z P(z')dz' - \underbrace{\int_0^b P(z')dz'}_{\text{constante}} \right) \\ V_d(M) &= \text{constante} + \int_0^z \frac{P(z')}{\epsilon_0} dz' \end{aligned}$$

Le champ électrique  $\vec{E}_d(M)$  s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{E}_d(M) &= -\overrightarrow{\text{grad}} V_d(M) = -\frac{dV_d(M)}{dz} \vec{u}_z \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{d}{dz} \int_0^z P(z')dz' \vec{u}_z \\ &= -\frac{P(z)\vec{u}_z}{\epsilon_0} = -\frac{\vec{P}(M)}{\epsilon_0} = \text{champ dépolarisant} \end{aligned}$$

## Condensateur diélectrique à potentiel constant



On considère le condensateur de la question 1. On introduit la plaque de la question 2 entre ses deux armatures ( $b > a$ ) tout en le maintenant à un potentiel constant  $V_1$ . On considèrera le diélectrique linéaire, homogène, isotrope, de susceptibilité  $\chi$ .

1. Montrer que les champs intervenant dans le problème sont parallèles à  $Oz$  et ne dépendent que de  $z$

Les symétries restent les mêmes à savoir que tout plan contenant l'axe  $Oz$  est plan de symétrie de la distribution de charge. Les invariances du problèmes restent également les mêmes d'où  $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$ .

2. Soit  $\vec{E}_1$  le champ électrique créé par les charges des armatures seules. Appliquer le principe de superposition pour calculer le champ  $\vec{E}$  total en fonction de  $\vec{E}_1$ . Montrer que :

- tous les champs sont uniformes.
- on retrouverait le même champ électrique en remplaçant la plaque diélectrique par deux plans chargés séparés par du vide. Quelles seraient leurs charges (charges de polarisation) ?

- à l'extérieur de la plaque diélectrique

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{0} \rightarrow \text{uniforme}$$

- à l'intérieur de la plaque diélectrique

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_1 - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \\ &= \vec{E}_1 - \frac{\chi_e \epsilon_0 \vec{E}}{\epsilon_0} \\ &= \frac{\vec{E}_1}{1 + \chi_e} \rightarrow \text{uniforme} \end{aligned}$$

On a vu que la densité surfacique de charge  $\sigma_S = \pm \epsilon_0 E_0$  sur les armatures du condensateur est à l'origine d'un champ électrique constant. Pour créer un champ uniforme d'expression

$-\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$ , cela reviendrait à placer deux plaques *i.e.* deux armatures chargées en surface par des densités  $\sigma_S = \pm P$ . Leurs charges  $Q_P = \pm P \times \ell \times L$ .

3. Calculer la charge  $Q_1$  des armatures, la capacité  $C_1$  du condensateur et l'énergie stockée  $U_1$ .

Le potentiel électrique  $V_1$  est égal à

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\overrightarrow{\text{grad}}V_1 \rightarrow V_1 = -\int_0^a E(z)dz \\ V_1 &= -\int_0^c E_1 dz - \int_c^{b+c} \frac{E_1}{1+\chi_e} dz - \int_{b+c}^a E_1 dz \\ &= -E_1 \times c - \frac{E_1}{1+\chi_e} \times b - E_1 \times a + E_1 \times (b+c) \\ &= -E_1 \left( a + \frac{b}{1+\chi_e} - b \right) = -E_1 \left( a - \frac{b\chi_e}{1+\chi_e} \right)\end{aligned}$$

La charge des armatures est égale

$$\begin{aligned}Q_1(z=0) &= \sigma_Z \times \ell \times L = -E_1 \epsilon_0 \ell \times L \\ Q_1(z=a) &= -\sigma_Z \times \ell \times L = E_1 \epsilon_0 \ell \times L\end{aligned}$$

La capacité  $C_1$  du condensateur diélectrique est égale à  $\frac{|Q_1|}{V_1}$

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{|Q_1|}{V_1} = \frac{\epsilon_0 E_1 \ell \times L}{E_1 \left( a - \frac{b\chi_e}{1+\chi_e} \right)} \\ &= \frac{\epsilon_0 \ell \times L}{a - \frac{b\chi_e}{1+\chi_e}} > C_0\end{aligned}$$

L'ajout du diélectrique a contribué à l'augmentation de la capacité du condensateur. L'énergie stockée dans le condensateur est

$$\begin{aligned}U_1 &= \frac{1}{2} C_1 V_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 E_1^2 \ell \times L a \left( 1 - \frac{\chi_e}{1+\chi_e} \frac{b}{a} \right)\end{aligned}$$

4. Retrouver les résultats précédents en utilisant le déplacement électrique et le théorème de Gauss.

Le déplacement électrique  $\vec{D}$  est égal à  $\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ . Le théorème de Gauss appliqué aux diélectriques implique que  $\text{div} \vec{D} = \rho_{\text{libre}} \rightarrow \iint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}}^{\text{int}}$ . En tout point situé entre les armatures du condensateur y compris à l'intérieur du diélectrique, il n'y a pas de charges libres. Par ailleurs, le vecteur déplacement  $\vec{D}$  est égal dans le diélectrique à  $\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  et à  $\epsilon_0 \vec{E}_1$  entre

le diélectrique et les armatures du condensateur. En choisissant une surface fermée cylindrique dont les sections circulaires sont de part et d'autre de l'interface diélectrique-vide, on a

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$D_{\text{vide}}S - D_{\text{diélectrique}}S = 0$$

$$\vec{D}_{\text{vide}} = \vec{D}_{\text{diélectrique}}$$

$$\epsilon_0 \vec{E}_1 = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\epsilon_0 \vec{E}_1 = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_1}{1 + \chi_e}$$

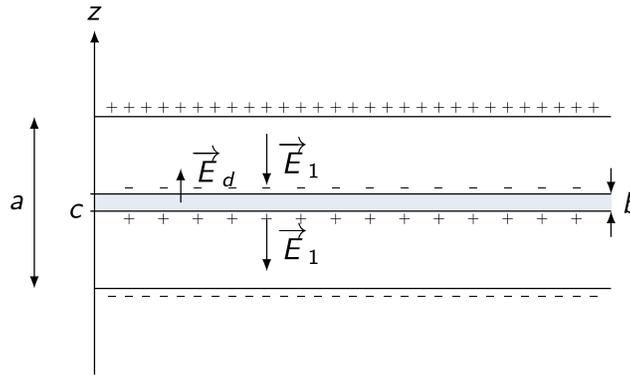


Figure 4 – Distribution des charges de polarisation et du condensateur après ajout du diélectrique

### Condensateur diélectrique à charges constantes

On considère le condensateur de la question 1 initialement au potentiel  $V_0$ . On l'isole puis on introduit la plaque de la question 2. Calculer la charge  $Q_2$  des armatures, la capacité  $C_2$ , le potentiel  $V_2$  et l'énergie stockée  $U_2$ .

Les charges des armatures restent à  $Q_2 = \pm \epsilon_0 \frac{\ell L}{a} V_0 = Q_0$  lorsque l'on débranche le générateur. Le champ électrique à l'extérieur de la plaque est  $\vec{E}_0$  et  $\frac{\vec{E}_0}{1 + \chi_e}$  à l'intérieur du diélectrique. Le potentiel est alors égal à  $V_2 = E_0 \left( a - \frac{b \chi_e}{1 + \chi_e} \right)$  d'où  $C_2 = \frac{|Q_2|}{V_2} = \epsilon_0 \frac{\ell \times L}{a - \frac{b \chi_e}{1 + \chi_e}} = C_1$ . Finalement,

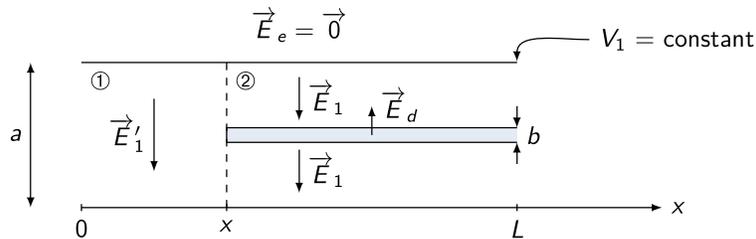
l'énergie stockée  $U_2$  est

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{2} C_2 V_2^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \ell L a E_0^2 \left( 1 - \frac{\chi_e b}{1 + \chi_e a} \right) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \ell L a \frac{V_0^2}{a} \left( 1 - \frac{\chi_e b}{1 + \chi_e a} \right) \\ &= U_0 \left( 1 - \frac{\chi_e b}{1 + \chi_e a} \right) \leq U_0 \end{aligned}$$

### Force électrostatique sur la plaque diélectrique

La plaque diélectrique est introduite dans le condensateur parallèlement à la longueur  $L$  de sorte qu'il subsiste une longueur  $x$  vide. On admet que les champs restent uniformes parallèles à  $Oz$ .

1. En déduire les densités surfaciques de charge. Calculer  $Q$ ,  $C$ , et  $U$  en fonction de  $x$ .



On supposera la situation identique à celle de la question [Condensateur diélectrique à potentiel constant](#) soit à potentiel constant  $V = V_1 = E_1 \left( a - \frac{b\chi_e}{1 + \chi_e} \right)$ . Dans la région ①, le champ électrique est égal à  $\vec{E}'_1 = -\frac{V_1}{a} \vec{u}_z$ .

Les densités surfaciques de charge sont respectivement

- région ① :

$$\sigma_S^{①} = \epsilon_0 |E'_1| = \epsilon_0 \frac{E_1}{a} \left( a - \frac{b\chi_e}{1 + \chi_e} \right)$$

- région ② :

$$\sigma_S^{②} = \epsilon_0 E_1$$

La charge  $Q$  du condensateur est égale à

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^x \sigma_S^{②} \ell dx + \int_x^L \sigma_S^{①} \ell dx \\ &= \epsilon_0 E_1 \ell \left( \frac{x}{a} \left( a - \frac{b\chi_e}{1 + \chi_e} \right) + L - x \right) \\ &= \epsilon_0 E_1 \ell \left( L - \frac{\chi_e b x}{1 + \chi_e a} \right) \end{aligned}$$

La capacité  $C$  est égale à  $\frac{Q}{V_1}$ , l'énergie stockée  $U = \frac{1}{2}CV_1^2 = \frac{1}{2}QV_1$ .

2. Pour calculer la force  $\vec{F}$  que subit la plaque diélectrique on imagine que l'opérateur déplace la plaque de  $dx$  à vitesse nulle en lui appliquant la force  $\vec{F}_{op.} = -\vec{F}$ . Calculer la variation d'énergie stockée, le travail de l'opérateur et le travail du générateur à potentiel constant. En déduire  $\vec{F}$ .

Lorsque la plaque diélectrique est introduite  $x \nearrow$ , la charge du condensateur diminue de même que la capacité  $C$ . L'énergie stockée diminue donc de pair avec l'introduction de la plaque.

$$dU = \frac{1}{2}V_1^2 dC = \frac{1}{2}V_1 dQ = \frac{1}{2}V_1 \frac{dQ}{dx} dx$$

$$= \frac{1}{2}V_1 \epsilon_0 E_1 \ell (-) \frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \frac{b}{a} dx$$

Le travail  $dW_{op.}$  fourni par l'opérateur correspond au produit scalaire de la force  $\vec{F}_{op.}$  par le déplacement infinitésimal  $d\vec{x}$

$$dW_{op.} = \vec{F}_{op.} \cdot d\vec{x} = F_{op.} dx = -F dx$$

La puissance du générateur  $P = V_1 \times I$  d'où le travail  $dW_g$

$$dW_g = P dt = V_1 I dt = V_1 dQ$$

$$= -V_1 \epsilon_0 E_1 \ell (-) \frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \frac{b}{a} dx = 2dU$$

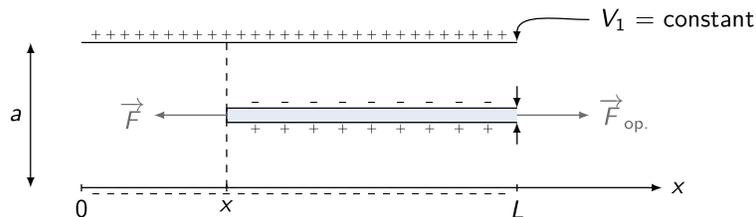
Ainsi la variation d'énergie stockée correspond à

$$dU = dW_g + dW_{op.}$$

$$dU = 2dU + dW_{op.}$$

$$F_{op.} dx = -dU = \frac{1}{2}V_1 \epsilon_0 E_1 \ell \frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \frac{b}{a} dx$$

$$F_{op.} = \frac{1}{2}V_1 \epsilon_0 E_1 \ell \frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \frac{b}{a} > 0$$



### 3.4 Boule chargée flottant sur un diélectrique