

Polycopié des Travaux Dirigés
Électrodynamique classique du vide
et des milieux continus
LICENCE ET MAGISTÈRE DE PHYSIQUE
D2PFO

Feuille de TD n° 1: *champ électromagnétique et pression de radiation*

1 Interprétation corpusculaire de la pression de radiation

Un faisceau cylindrique d'onde plane électromagnétique monochromatique produit par un laser à argon se propage dans le vide et rencontre un plan métallique parfaitement réfléchissant, dont la normale fait l'angle $\theta = 30^\circ$ avec la direction de propagation des photons associés à l'onde.

On donne la longueur d'onde $\lambda = 0,515 \mu\text{m}$ et l'intensité du faisceau (puissance moyenne transportée à travers une section droite unité) $I = 90 \text{ kW/m}^2$. On note E_0 l'amplitude du champ électrique.

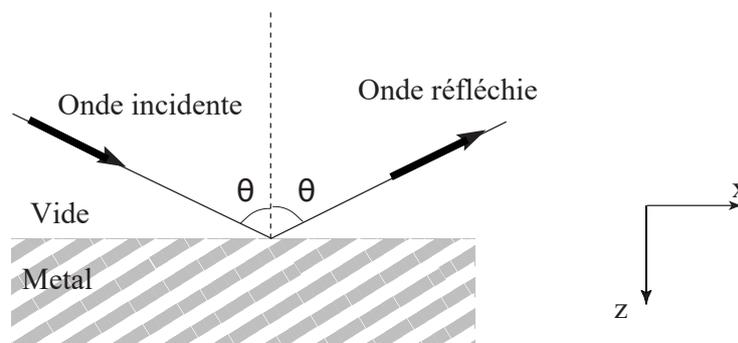
1. Quelle est la moyenne temporelle $\langle u \rangle$ de la densité volumique d'énergie électromagnétique de l'onde ? Exprimer $\langle u \rangle$ en fonction de I .
2. Calculer la densité N de photons dans le faisceau en fonction de I et de λ .
3. Quelle est la quantité de mouvement $\Delta\vec{p}_0$ transférée au métal par un photon qui subit un choc élastique ?
4. Calculer le nombre x de photons reçus par le métal par unité de temps et par unité de surface.
5. En déduire la pression de radiation P en fonction de θ et de E_0 .

2 Réflexion d'onde en incidence oblique sur un conducteur parfait

On considère une surface plane séparant le vide d'un conducteur métallique parfait. Une onde plane électromagnétique incidente se propage dans le vide. Son champ électrique en $M(x, y, z)$ à l'instant t est :

$$E_i = E_0 \cos(k_i \cdot r - \omega t) \quad (1)$$

Cette onde rencontre le métal sous l'angle d'incidence θ et se réfléchit. Le plan Oxz est choisi de façon à contenir le vecteur d'onde incident k_i . On prend l'origine O sur la surface du métal. L'onde incidente est polarisée rectilignement et perpendiculairement au plan d'incidence ($E_i \perp (Oxz)$)



1. Déterminer les champs (E_i, B_i) de l'onde incidente et (E_r, B_r) de l'onde réfléchie.
2. Déterminer les champs (E, B) de l'onde résultante dans le vide.
3. Quelle est la vitesse de phase v_ϕ de l'onde résultante ?
4. Que deviennent E et B au voisinage immédiat de la surface du métal ?
5. Déterminer les densités surfaciques de charge σ et de courant j_s sur la surface métallique.
6. Quelle est la pression de radiation moyenne de l'onde sur le métal ? L'exprimer en fonction de l'intensité incidente.
7. Calculer les vecteurs de Poynting incident et réfléchi. A quel flux de photon cela correspond-il ? Retrouver la pression de radiation à partir de l'échange de quantité de mouvement entre ces photons et la paroi.

Feuille de TD n° 2: *Quantité de mouvement du champ électromagnétique*

Les quantités vectorielles sont notées en caractères gras.

Cet exercice comporte deux parties dont la première vise à démontrer la formule générale donnée par l'équation 2 en section 2. La deuxième partie peut être traitée séparément.

On rappelle que pour une fonction scalaire $s(\mathbf{r})$ et deux champ vectoriel $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{w}(\mathbf{r})$:

- $\text{div}(s\mathbf{v}) = \nabla \cdot (s\mathbf{v}) = (\nabla s) \cdot \mathbf{v} + s(\nabla \cdot \mathbf{v})$
- $\text{grad}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{w}) + \mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{v}$
- le double produit vectoriel est : $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

1 Étude générale

1.1 Équation bilan d'une grandeur physique extensive

Une grandeur extensive A (telle que la masse ou l'énergie) vérifie les propriétés suivantes :

- elle est localisée : elle peut être décrite par une densité volumique a telle que la quantité de A dans un volume V peut s'écrire $\iiint d^3r a = A$;
- elle peut être échangée entre différents systèmes séparés par une surface S . Le débit sortant de S associé à ce transfert s'écrit alors $\iint \mathbf{j}_A \cdot d\mathbf{S}$ où \mathbf{j}_A est la densité de courant associée à A ;
- elle peut être créée dans le volume d'un système. Cette réaction étant décrite par le taux de création par unité de volume et de temps α tel que, dans le volume V , $\frac{\delta A_{\text{creation}}}{\delta t} = \iiint_V \alpha d^3r$.

En faisant le bilan de la grandeur A , démontrer l'équation-bilan locale reliant a , α et $\nabla \cdot \mathbf{j}_A$.

1.2 Quantité de mouvement du champ électromagnétique

On se place maintenant en régime variable quelconque. On utilise les équations de Maxwell dans le vide en présence de charges et de courants décrits par des densités volumiques.

1. **Densité volumique de forces.** On étudie un volume élémentaire $d\tau$ dans lequel existe une densité volumique de charges ρ et une densité volumique de courant \mathbf{j} . Calculer la force électromagnétique subie par ce volume $d\tau$. Exprimer la densité volumique de force $\frac{d\mathbf{F}}{d\tau} = \mathbf{f}$ en fonction de ρ , \mathbf{j} , \mathbf{E} et \mathbf{B} .
2. **Equation bilan de quantité de mouvement.** A l'aide des équations de Maxwell, mettre l'expression $\mathbf{Y} = \mathbf{f} + \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B})$ sous une forme où n'apparaissent que les champs \mathbf{E} , \mathbf{B} ainsi que certaines de leurs dérivées spatiales (mais pas leur dérivée temporelle).
3. On remarquera que l'expression de \mathbf{Y} comporte deux termes, l'un faisant intervenir uniquement \mathbf{E} , et l'autre \mathbf{B} uniquement. Soit \mathbf{u} un vecteur constant quelconque. $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u}$ comporte donc également deux termes. Développer l'expression $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{E}^2}{2} \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} \right)$. et la comparer avec le terme de $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u}$ contenant \mathbf{E} . On utilisera la relation $\mathbf{u} \cdot ((\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot (\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{E})) = \sum_{ij} E_i u_j \partial_i E_j$ (BONUS : la montrer).
4. Sans calcul supplémentaire, justifier que $\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{B}^2}{2} \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} \right) = -\frac{1}{\mu_0} ((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}$.
5. Montrer alors que l'expression complète de $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u}$ peut s'écrire sous la forme de la divergence d'un champ de vecteur.
6. Comment s'appelle ce champ de vecteur ?
7. **Interprétation.** En lien avec la question 1.1, déterminer les quantités a , α et \mathbf{j}_A considérées dans cette question.
8. Montrer alors que $\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ peut s'interpréter comme une densité volumique de quantité de mouvement associée au champ électromagnétique.

2 Application aux ondes électromagnétiques

Le résultat de la partie précédente est résumé par la formule :

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{u}) + \nabla \cdot \mathbf{j}_P = 0 \quad (2)$$

avec $\mathbf{j}_P = \epsilon_0 \left(\frac{\mathbf{E}^2}{2} \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\mathbf{B}^2}{2} \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \right)$ et \mathbf{f} et \mathbf{g} définis plus haut pour un vecteur constant \mathbf{u} quelconque.

On étudie une onde électromagnétique plane progressive se propageant dans le vide dans la direction de l'axe Ox . On s'intéresse uniquement à la quantité de mouvement selon Ox . Dans cette partie l'expression *quantité de mouvement* signifiera donc *projection sur Ox de la quantité de mouvement*.

2.1 Structure de l'onde

Rappeler l'expression du champ magnétique en fonction du champ électrique pris au même point au même instant.

2.2 Quantité de mouvement

Déterminer en fonction de \mathbf{E} et \mathbf{u}_x la densité volumique de quantité de mouvement \mathbf{g} ainsi que le vecteur densité de courant \mathbf{j}_P associé au vecteur \mathbf{u}_x . Quel est le lien entre les deux ? Comment peut-on interpréter le résultat ?

2.3 Lien avec l'énergie électromagnétique

Quel est le vecteur densité de courant associé à l'énergie électromagnétique ? Quel lien présente-t-il ici avec \mathbf{j}_P ? Cela est-il en accord avec l'interprétation de la lumière en termes de photons ?

2.4 Pression de radiation, voile solaire

Un satellite déploie une voile solaire parfaitement réfléchissante dont la masse surfacique est de 10g.m^{-2} , orientée face au soleil.

1. En appelant \mathbf{u}_x le vecteur unitaire en direction Soleil-satellite, \mathbf{E}^+ l'onde incidente et \mathbf{E}^- l'onde réfléchie, calculez \mathbf{j}_P^+ et \mathbf{j}_P^- associées au vecteur \mathbf{u}_x .
2. En moyenne sur plusieurs périodes optiques, que vaut la quantité $\langle \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{u}_x) \rangle$?
3. En appliquant le théorème de la divergence à un cylindre d'axe (Ox) coupant une petite surface S de la voile solaire, et de hauteur h tendant vers 0, en déduire la pression exercée sur la voile solaire.
4. Au voisinage de l'orbite terrestre, la puissance du rayonnement solaire est de l'ordre de 1550W.m^{-2} . Calculer le rapport entre la force de pression de radiation et l'attraction gravitationnelle qu'exerce le Soleil sur la voile. La navigation à voile solaire est-elle réaliste ? On donne : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{N.m}^2.\text{kg}^{-2}$; $M_{\text{soleil}} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{kg}$; $d_{\text{terre-soleil}} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{m}$.

Feuille de TD n° 3: La méthode de séparation des variables

Le but de ce TD est de se familiariser avec une méthode de résolution directe de l'équation de Laplace, la méthode de séparation des variables. Il s'agit d'une méthode archi-récurrente en physique que nous rencontrerons à plusieurs reprises. Elle permet de transformer la résolution de l'équation de Laplace dans un système de coordonnées (u, v, w) , en la résolution de trois équations différentielles portant chacune sur une seule variable. Pour ce faire, on suppose que la solution peut s'écrire sous la forme $\varphi(u, v, w) = A(u)B(v)C(w)$. Le système de coordonnées choisi va dépendre des conditions aux limites et peut se faire en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques (ainsi que dans 10 autres systèmes de coordonnées). Le procédé de séparation mène à l'introduction de trois constantes de séparation qui servent de paramètres dans les trois équations différentielles à une variable obtenues.

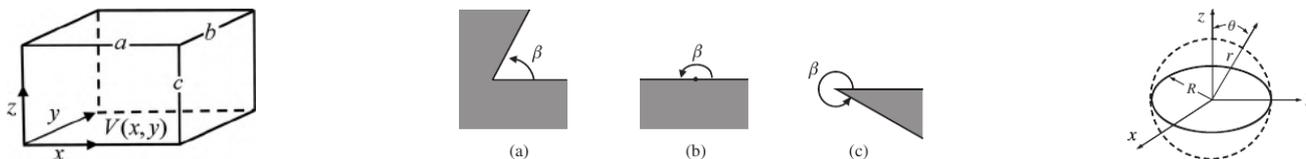


Figure 1: Gauche: Boite métallique maintenue au potentiel nul sauf en $z = 0$. Milieu: vue de dessus de trois coins réalisés dans un matériau parfaitement conducteur (gris). Droite: Anneau uniformément chargé de rayon R . Figures extraites de A. Zangwill "Modern Electrodynamics" Cambridge University Press.

1 Séparation des variables en coordonnées cartésiennes

1.1 Solution générale

On considère une boîte vide rectangulaire sans spécifier davantage, pour le moment, les conditions aux limites (Fig. 1 gauche).

1. Écrire l'équation de Laplace vérifiée par une solution test : $\varphi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ et la mettre sous la forme d'une somme de trois fonctions ne dépendant respectivement que de x , y et z .
2. En déduire les trois équations différentielles vérifiées par X , Y et Z . On introduira les trois constantes, pour des raisons de notation, sous la forme α^2 , β^2 et γ^2 . Quelle relation vérifient entre elles ces constantes.
3. Résoudre dans le cas général ces équations différentielles en fonction de la valeur de α , β et γ . On notera les solutions X_α , Y_β , Z_γ et introduira les constantes nécessaires.
4. Expliquer pourquoi la solution générale de l'équation de Laplace peut s'écrire comme somme de produits de ces solutions.

1.2 Solution avec les conditions aux limites

Le problème a une solution unique si on fixe les conditions aux limites. On considère donc maintenant que cinq parois sont maintenues à un potentiel nul et la sixième, en $z = 0$, à un potentiel arbitraire $V(x, y)$. Il s'agit de conditions aux limites où on impose le potentiel. Elles portent le nom de conditions de Dirichlet.

1. Dans ces conditions, montrer que $X_\alpha(x)$ et $Y_\beta(y)$ peuvent se mettre sous la forme de fonctions sinus qui s'annulent respectivement en $x = 0$ et $x = a$ et en $y = 0$ et $y = b$. On pourra pour cela noter $\alpha = i\alpha'$ et $\beta = i\beta'$ et introduire des entiers m et n . Calculer γ en fonction de m et n . On notera par la suite ces constantes γ_{mn} .
2. Écrire les fonctions $Z_{\gamma_{mn}}$ sous la forme d'une constante V_{mn} multipliée par un sinus hyperbolique s'annulant en $z = c$.
3. Montrer que $V(x, y)$ peut s'écrire

$$V(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

4. En déduire l'expression de V_{mn} .

5. Question subsidiaire: Sauriez-vous dire pourquoi des séries de la forme $F(x) = \sum_k F_k \psi_k(x)$ et $G(y) = \sum_k G_k \phi_k(y)$ apparaissent dans la solution du problème de l'équation de Laplace où les ψ_k (resp. ϕ_k) forment une base de fonctions orthogonales ? Pouvez-vous écrire la relation d'orthogonalité vérifiée par les fonctions ψ_k (resp. ϕ_k), qui sont ici des sinus.

2 Séparation des variables en coordonnées cylindriques, application à l'effet de pointe.

On se propose de calculer le champs à proximité du point O dans chacun des trois cas représentés sur la figure 1 milieu.

1. Écrire l'équation de Laplace en coordonnée cylindrique.
2. En supposant que les solutions sont de la forme, $\varphi(\rho, \phi, z) = R(\rho)G(\phi)Z(z)$, écrire les trois équations différentielles vérifiées par respectivement R , G et Z en introduisant deux constantes réelles de séparation α^2 et k^2 (On pourra regarder la page 4 du polycopié de TD).
3. Compte-tenu de l'invariance du problème selon l'axe z , on peut choisir $Z = 1$ et par conséquent $k = 0$. Écrire la forme de la solution générale de $\varphi(\rho, \phi)$.
4. En considérant que le potentiel ne peut être singulier en $\rho = 0$, montrer que $\varphi(\rho, \phi) = A + B\phi + \sum_{\alpha>0} C_\alpha \rho^\alpha \sin(\alpha\phi + \delta_\alpha)$.
5. En prenant en compte les conditions aux limites : $\varphi(0, \phi) = 0$ et $\varphi(\rho, 0) = \varphi(\rho, \beta) = 0$, calculer les constantes A , B et δ_α et calculer α en fonction d'un entier m .
6. On suppose que le champ est donné loin de l'origine, ce qui fixe les constantes C_α . Ce champ n'est pas spécifié. Donner, à une constante multiplicative près, le potentiel au plus près de l'origine.
7. En déduire le champ à proximité de l'origine. Que pouvez-vous dire dans le cas où $\beta > \pi$. Quelles sont les applications de ce phénomène ?

3 Séparation avec symétrie azimutale en coordonnées sphériques.

On considère un anneau uniformément chargé avec une charge par unité de longueur $\lambda = Q/2\pi R$ comme sur la figure 1 droite. On admettra que cette densité de charge linéique est équivalente à la densité de charge surfacique $\sigma(\theta) = (\lambda/R)\delta(\cos\theta)$.

1. Écrire l'équation de Laplace en coordonnée sphérique pour $\varphi(r, \theta, \phi) = \varphi(r, \theta)$.
2. En introduisant le changement de variable $x = \cos(\theta)$, une solution test de la forme $\varphi(r, x) = R(r)M(x)$, ainsi qu'une constante de séparation κ , écrire les deux équations différentielles vérifiées par R et M .
3. En écrivant $\kappa = \nu(\nu + 1)$, montrer que $R_\nu(r) = A_\nu r^\nu + B_\nu r^{-(\nu+1)}$ est solution de la première équation. On admettra que les seules solutions de la seconde équation qui ne sont pas divergente sont les polynômes de Legendre $P_\nu(x)$ pour lesquels ν est un entier positif noté l par la suite. En déduire que: $\varphi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{+\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos(\theta))$
4. Rappeler les conditions de continuité du potentiel en $r = R$. En distinguant les cas $r \leq R$ et $r \geq R$, déduire une expression de $\varphi(r, \theta)$ bornée sur ces deux domaines et continue en $r = R$.
5. Déduire de la condition de continuité de la dérivée de φ en $r = R$, une équation reliant entre elles les constantes.
6. Grâce à la relation d'orthogonalité des polynômes de Legendre, $\int_{-1}^{+1} P_l(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{lm}$, déterminer la valeur de ces constantes et l'expression de la solution complète $\varphi(r, \theta)$.

Feuille de TD n° 4: *La méthode des images en électrostatique*

1 Boule conductrice en présence d'une charge ponctuelle

Soit une boule conductrice, de centre O , de rayon R . On place une charge q sur l'axe Oz au point P . On étudiera le potentiel et le champ créés par cette charge.

- On impose le potentiel $V = 0$ en un point de la surface de la boule.
 - Quel est le potentiel dans l'ensemble de la boule ? Par des considérations de symétrie, simplifier l'expression du champ électrostatique \vec{E} (direction et dépendance des composantes par rapport aux différentes coordonnées). Quel système de coordonnées a-t-on intérêt à adopter ?
 - Montrer qu'il est possible d'obtenir $V = 0$ sur la surface de la boule de centre O et de rayon R dans le vide en remplaçant la boule conductrice par une deuxième charge q' sur l'axe Oz , en plus de la charge q initiale. Que vaut $V(\infty)$? Déterminer la valeur et la position de q' .
 - Rappeler l'équation de Poisson. Quelles sont les conditions aux limites imposées par la boule ? En déduire que pour $r > R$, le champ créé par la charge q en présence de la boule est le même que celui créé par les charges q et q' .
 - Calculer \vec{E} au voisinage de la sphère. Rappeler les conditions de continuité à la traversée d'une surface chargée. En déduire la densité surfacique de charges portée par la surface de la boule conductrice.
 - Calculer la charge totale portée par la boule conductrice. En utilisant le théorème de Gauss, montrer que le résultat était prévisible.
 - Calculer la force qu'exerce la charge q sur la sphère conductrice.
- La boule conductrice est maintenant au potentiel $V_0 \neq 0$.
 - En utilisant le principe de superposition, montrer qu'on peut vérifier les nouvelles conditions aux limites dans le vide en ajoutant une troisième charge q'' . Déterminer la position de q'' et sa valeur.
 - Calculer la charge totale Q portée par la boule conductrice. Sachant que $Q = 0$, déterminer V_0 en présence de la charge q .
- On place une boule conductrice dans un champ uniforme créé par deux charges $+q$ et $-q$ respectivement placées en $+Z$ et $-Z$, où $Z \gg R$.
 - Déterminer le champ \vec{E} créé par $+q$ et $-q$ en l'absence de la boule conductrice. Montrer qu'au 1^{er} ordre, \vec{E} peut être considéré comme uniforme sur le volume de la boule.
 - Calculer la densité surfacique de charges σ qui apparaît sur la boule conductrice en présence de $+q$ et $-q$. Le champ reste-t-il uniforme au voisinage de la boule ?
 - En déduire le champ créé à l'intérieur d'une sphère de rayon R , portant la densité surfacique de charge $\sigma_0 \cos(\theta)$.
 - Enfin on suppose que la boule est coupée en deux par le plan xOy . Elle est toujours soumise à un champ électrostatique uniforme. Calculer la force qui s'exerce sur chacun des hémisphères en utilisant la pression électrostatique.

2 Particule chargée à proximité d'un plan diélectrique

On s'intéresse ici au cas où la particule de charge q , est placée dans le vide à proximité d'un diélectrique de permittivité relative ϵ_r occupant tout le demi-espace $x < 0$. La particule est située en $(x = d, y = 0, z = 0)$ où d est une distance arbitraire fixée.

Le calcul du champs dans ce cas d'un milieu inhomogène s'avère assez délicat et on se propose d'utiliser la méthode des images pour trouver le potentiel V créé dans tout l'espace. Celle-ci va nous permettre de remplacer le problème initial par un problème dans un milieu homogène. On note V_+ et V_- les potentiels dans les demi-espaces $x > 0$ et $x < 0$ respectivement. On suppose le diélectrique linéaire si bien que l'on peut écrire $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$.

- Écrire les conditions de continuité pour le champ $\mathbf{E} = -\nabla V$ à l'interface vide/diélectrique. En déduire la condition de continuité vérifiée par $\partial V / \partial x$ à l'interface. Quelle condition de continuité pour le potentiel V à l'interface ?

2. Pour trouver le potentiel V_+ dans le demi-espace $x > 0$, on considère que tout l'espace est vide et on introduit, en plus de la charge q en $x = d$, une charge image q_- en $x = -d$. Donner l'expression de $V_+(x, y, z)$ dans ce cas en fonction de q et q_- .
3. Pour trouver le potentiel V_- dans le demi-espace $x < 0$, on considère que tout l'espace est rempli avec un diélectrique de permittivité relative ε_r et on introduit à la place de la charge q une charge image q_+ en $x = d$. Donner l'expression de $V_-(x, y, z)$ dans ce cas en fonction q_+ .
4. Exprimer q_+ et q_- en fonction de q et ε_r afin de satisfaire les conditions de continuité du potentiel en $x = 0$. En déduire que le potentiel $V = \begin{cases} V_+ & \text{si } x > 0 \\ V_- & \text{sinon} \end{cases}$ est la solution du problème initial (On écrira et commentera l'équation vérifiée par V sur tout l'espace ainsi que les conditions aux limites vérifiées par le potentiel trouvé).

Feuille de TD n° 5: *Électrostatique dans les milieux*

1 Boule uniformément polarisée

On considère une sphère uniformément polarisée de rayon R .

1. Montrer que le potentiel peut-être déterminé en tout point de l'espace en résolvant l'équation de Laplace.
2. Résoudre l'équation de Laplace en cherchant le potentiel sous la forme $V(r) = f(r) \cos(\theta)$ où f est une fonction de la forme :

$$f(r) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n r^n$$

dont on déterminera les coefficients a_n non nuls.

3. Déterminer les potentiels V_i et V_e à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère, ainsi que les champs \vec{E}_i et \vec{E}_e correspondants. Commenter.

2 Plaque diélectrique

1. Le condensateur plan

Un condensateur plan rectangulaire de dimension $l \times L$, d'épaisseur $a \ll l$ ou L , est relié aux bornes d'un générateur qui délivre une tension constante V_0 . Pour les symétries et invariances, on considère que les armatures sont des plaques conductrices infinies, perpendiculaires à Oz . L'espace entre les armatures est vide. On suppose que le champ électrique est nul à l'extérieur du condensateur. Étudier la répartition des charges. Retrouver les expressions de la charge Q_0 d'une armature, de la capacité C_0 et de l'énergie stockée U_0 .

2. Plaque diélectrique infinie

- (a) Une surface élémentaire dS de normale \vec{n} porte une densité surfacique de dipôles $\vec{P}_s = P_s \vec{n}$. Exprimer le potentiel électrique $dV(M)$ créé au point M en fonction de l'angle solide algébrique $d\Omega$ de la surface vue du point M (à l'infini le potentiel est nul). En déduire le potentiel créé par un plan infini de normale \vec{n} en tout point de l'espace, portant une densité surfacique de dipôles uniforme colinéaire à \vec{n} . Calculer le champ électrique $\vec{E}(M)$ en tout point.
- (b) Une plaque diélectrique infinie parallèle au plan xOy , d'épaisseur b , porte des dipôles répartis en son volume de sorte que sa polarisation est $\vec{P} = P(z) \vec{u}_z$. Calculer en tout point M , le potentiel $V_d(M)$ et le champ électrique $\vec{E}_d(M)$. Indication : décomposer la plaque en tranches d'épaisseur dz , exprimer $V_d(M)$ par une intégrale de $P(z)$ en distinguant les cas où M est extérieur ou intérieur à la plaque.

3. Condensateur diélectrique à potentiel constant

On considère le condensateur de la question 1. On introduit la plaque de la question 2 entre ses deux armatures ($b < a$) tout en le maintenant à un potentiel constant V_1 . On considèrera le diélectrique linéaire, homogène, isotrope, de susceptibilité χ .

- (a) Montrer que les champs intervenant dans le problème sont parallèles à Oz et ne dépendent que de z .
- (b) Soit \vec{E}_1 le champ électrique créé par les charges des armatures seules. Appliquer le principe de superposition pour calculer le champ \vec{E} total en fonction de \vec{E}_1 . Montrer que :
 - tous les champs sont uniformes.
 - on retrouverait le même champ électrique en remplaçant la plaque diélectrique par deux plans chargés séparés par du vide. Quelles seraient leurs charges (charges de polarisation) ?
- (c) Calculer la charge Q_1 des armatures, la capacité C_1 du condensateur et l'énergie stockée U_1 .
- (d) Retrouver les résultats précédents en utilisant le déplacement électrique et le théorème de Gauss.

4. Condensateur diélectrique à charges constantes

On considère le condensateur de la question 1 initialement au potentiel V_0 . On l'isole puis on introduit la plaque de la question 2. Calculer la charge Q_2 des armatures, la capacité C_2 , le potentiel V_2 et l'énergie stockée U_2 .

5. **Facultatif: Force électrostatique sur la plaque diélectrique**

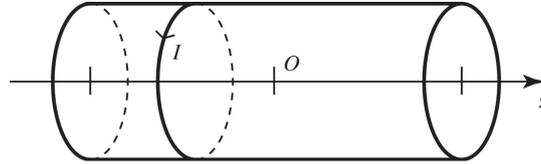
La plaque diélectrique est introduite dans le condensateur parallèlement à la longueur L de sorte qu'il subsiste une longueur x vide. On admet que les champs restent uniformes parallèles à Oz .

- (a) En déduire les densités surfaciques de charge. Calculer Q , C et U en fonction de x .
- (b) Pour calculer la force \vec{F} que subit la plaque diélectrique on imagine que l'opérateur déplace la plaque de dx à vitesse nulle en lui appliquant la force $\vec{F}_{op} = -\vec{F}$. Calculer la variation d'énergie stockée, le travail de l'opérateur et le travail du générateur à potentiel constant. En déduire \vec{F} .

Feuille de TD n° 6: *Magnétostatique dans le vide et les milieux*

1 Solénoïde fini

Soit un solénoïde de longueur L , constitué de N spires jointives identiques de rayon R parcourues par un courant I (figure 1). On note n le nombre de spires par unité de longueur. L'origine O est choisie au centre de la bobine et l'axe de la bobine est Oz .



1. Quelle est la direction du champ magnétique \vec{B} en tout point de l'axe de la bobine ?
2. On se place cette fois en un point quelconque, qui ne se trouve pas nécessairement sur l'axe Oz . De par les symétries, quel système de coordonnées serait-il judicieux d'employer ? En utilisant ce système, quelles sont les composantes non nulles de \vec{B} ? De quelles variables dépendent ces composantes ?
3. Montrer que $B_r(r, z)$ est une fonction impaire de z , alors que $B_z(r, z)$ est une fonction paire de z .
4. Calculer le champ en tout point de l'axe Oz . Vérifier la parité prévue par la question 3. On suppose $L \gg R$, montrer que le champ magnétique \vec{B} au point O est le double de celui du point situé à l'extrémité, c'est-à-dire en $z = L/2$.
5. On veut maintenant étudier le champ magnétique \vec{B} au voisinage du point O , c'est-à-dire lorsque z et r sont tous les deux très inférieurs aux deux grandeurs L et R . Établir les approximations suivantes :

$$B_z(r, z) = B_z(0, 0) + ar + br^2 + cz^2$$

$$B_r(r, z) = drz$$

Calculer les constantes a , b et d en fonction de c . Comment peut-on calculer la constante c ? Exprimer c en fonction de N , L et R . En déduire l'expression approximative de \vec{B} au voisinage du point O .

2 Plaque magnétique

Une plaque d'épaisseur e est constituée d'un matériau magnétique linéaire, homogène isotrope (l.h.i.) de susceptibilité χ . On supposera en plus que ce matériau est un isolant électrique. La plaque est placée dans un champ magnétique extérieur \vec{B}_0 uniforme. On note $\vec{B}_{0\parallel}$ et $\vec{B}_{0\perp}$ les composantes de \vec{B}_0 parallèle et perpendiculaire à la plaque.

1. On suppose que la plaque s'aimante uniformément. Dans quel plan est l'aimantation \vec{M} ?
2. Calculer \vec{M} , \vec{B} et \vec{H} dans la plaque.
3. Tracer les lignes de champ dans les cas :
 - (a) d'un milieu diamagnétique.
 - (b) d'un milieu paramagnétique.
 - (c) d'un ferromagnétique linéaire.

Feuille de TD n° 7: Magnétostatique dans les milieux

1 Supraconducteurs

1.1 Effet Meissner dans un supraconducteur

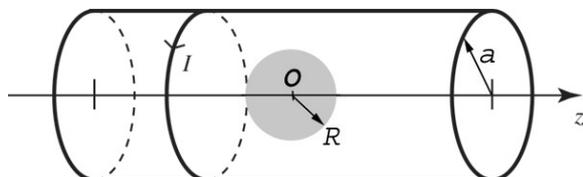


FIG.1 - Schéma du dispositif.



FIG.2 -Lévitation d'un supraconducteur.
Pour plus d'information, voir
<http://hebergement.u-psud.fr/supraconductivite>

Dans toute cette partie, on s'intéresse à une boule supraconductrice de centre O et de rayon R placée dans un solénoïde très long et de section circulaire de rayon $a \gg R$, d'axe $z'Oz$, possédant n spires par unité de longueur, et parcouru par un courant stationnaire I , le reste de l'espace étant vide. On pose $B_\infty = \mu_0 n I$.

On constate expérimentalement que la boule supraconductrice tend à expulser le champ magnétique en créant des courants localisés au voisinage de la surface (effet Meissner). Pour rendre compte de cet effet, on admettra que dans un supraconducteur, la loi d'Ohm est remplacée par la relation phénoménologique de London : $\vec{j} = -1/(\mu_0 \delta^2) \vec{A}$ où \vec{A} est un potentiel-vecteur de \vec{B} et δ un paramètre caractéristique du matériau. On se place en régime stationnaire.

- Montrer que \vec{A} doit satisfaire à la condition $\text{div } \vec{A} = 0$. L'unicité de \vec{A} justifie alors le caractère non arbitraire de la loi de London. Écrire les équations de la magnétostatique dans un supraconducteur. En déduire l'équation aux dérivées partielles dont est solution \vec{B} et la dimension de δ .
- La symétrie sphérique étant peu propice aux solutions simples, on remplace d'abord le problème réel par le modèle (M') suivant : la sphère supraconductrice est assimilée à un demi-espace $x > 0$; l'espace vide entre le solénoïde et la sphère est remplacé par le demi-espace vide $x < 0$; le solénoïde est oublié et impose uniquement la condition aux limites $\vec{B}(x = -\infty) = B_\infty \vec{u}_z$.
 - Montrer que \vec{B} est uniforme dans le vide. Déterminer \vec{B} dans le supraconducteur en fonction de B_∞ , x et δ . Tracer le graphe de $B(x)$ et interpréter δ .
 - Déterminer la densité volumique de courants \vec{j} en fonction de B_∞ , x , μ_0 et δ et tracer le graphe de $j(x)$.
 - Montrer que la force totale subie par une colonne cylindrique de supraconducteur, d'axe \vec{u}_x et de section $dy dz$ est de la forme $d\vec{F}/dy dz = B^2(x = 0^-)/(2\mu_0) \vec{u}_x$.
 - En réalité δ est de l'ordre de $0,1 \mu\text{m}$. Commenter l'approximation d'une sphère par un plan. Pour simplifier encore, on se propose de faire tendre δ vers zéro. Montrer qu'alors le champ \vec{B} est discontinu et qu'il faut faire intervenir des courants superficiels : calculer leur densité \vec{j}_s en utilisant la relation de passage et vérifier que $\vec{j}_s = \int_0^\infty \vec{j}(x) dx$ et $d\vec{F}/dy dz = (1/2) \vec{j}_s \wedge \vec{B}(x = 0^-)$.
- Dans la suite, on revient à la symétrie sphérique pour décrire convenablement le champ \vec{B} dans le vide, mais on suppose $\delta = 0$ pour simplifier les calculs, ce qui revient à adopter le nouveau modèle (M'') :
 - les champs \vec{B}_{int} , \vec{j} et \vec{A} sont nuls à l'intérieur de la boule supraconductrice ;
 - la continuité de la composante normale de \vec{B} impose la condition aux limites $\vec{B} \cdot \vec{n} = 0$ au champ dans le vide à l'interface vide-supraconducteur ;
 - le supraconducteur est parcouru par des courants superficiels \vec{j}_s autorisant une discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique \vec{B} à sa surface ;

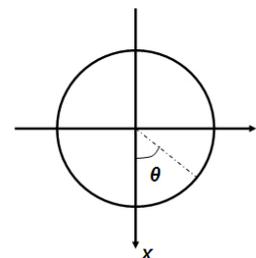
- la boule supraconductrice subit des forces de Laplace surfaciques de la forme $d\vec{F}/dS = (1/2)\vec{j}_s \wedge \vec{B}$ où \vec{B} est le champ dans le vide à sa surface.
- (a) Écrire les équations locales dont \vec{B} est solution dans le vide. En déduire un problème de mécanique des fluides analogue et tracer l'allure de lignes de champ de \vec{B} . Indiquer sans calcul des points où $\|\vec{B}\| > B_\infty$ et des points où $\|\vec{B}\| < B_\infty$.
- (b) On cherche un potentiel scalaire ϕ tel que $\vec{B} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi)$. De quelle équation (L) est solution ϕ ? On cherche une solution de (L) de la forme $\phi = \alpha r \cos(\theta) + \beta \cos(\theta)/r^2$. Justifier sans calcul par des analogies électrostatiques que ces potentiels sont solutions de (L). Déterminer α et β en fonction de B_∞ et R .
- (c) En déduire \vec{j}_s . Soit \vec{B}_s le champ magnétique créé par ces courants au centre O de la boule. Donner sans calculs sa direction. Une portion de sphère de surface $dS = 2\pi R^2 \sin(\theta) d\theta$ est assimilée à une spire circulaire parcourue par un courant infinitésimal dI . Montrer que $dI = j_s R d\theta$ puis calculer \vec{B}_s et commenter le "mécanisme" de l'effet Meissner.
- (d) Calculer le moment magnétique $d\vec{M}$ de la spire élémentaire étudiée dans la question précédente. En déduire le moment magnétique total \vec{M} de la boule supraconductrice, le mettre sous la forme $\vec{M} = (\chi/\mu_0)(4\pi R^3/3)\vec{B}_\infty$ et déterminer la constante χ . Le milieu est-il paramagnétique ($\chi > 0$) ou diamagnétique ($\chi < 0$) ?
- (e) Montrer par une analyse de symétries des forces $d\vec{F}$ que la résultante des forces de Laplace subies par la boule supraconductrice est nulle. Ce résultat était prévisible sans calculs et sans expliciter les forces $d\vec{F}$. Pourquoi ?

2 Aimant permanent

Une fois aimanté, un matériau ferromagnétique dur conserve son aimantation, dans la mesure où on ne le soumet pas à des champs trop intenses. Cette propriété peut être utilisée pour fabriquer des aimants permanents. Le but ici est d'étudier un type particulier d'aimant permanent. En positionnant toute une série d'éléments aimantés les uns à côtés des autres, on réalise un cylindre creux d'axe Oz , de rayon intérieur a , de rayon extérieur b , de longueur très grande (du point de vue des symétries et des invariance, on pourra considérer le cylindre infini) et présentant l'aimantation suivante (on utilise les coordonnées cylindriques usuelles):

$$\vec{M} = M_0 (\cos(\theta) \vec{u}_r + \sin(\theta) \vec{u}_\theta) \text{ où } M_0 \text{ est une constante.}$$

Par ailleurs, on donne qu'un cylindre creux d'épaisseur négligeable, portant des courants surfaciques $\vec{j}_s = j_s \sin(\theta) \vec{u}_z$, crée un champ $\vec{B} = \frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{u}_x$ à l'intérieur du cylindre et un champ nul à l'extérieur.



1. Étude de l'aimant permanent

- (a) Déterminer la distribution totale de courant du système. Quelle est la nature de ces courants (courants libres, d'aimantation ou de polarisation) ? On fera attention à bien prendre en compte les courants surfaciques et volumiques.
- (b) Calculer le champ \vec{B} à l'intérieur du cylindre de rayon a . On exprimera \vec{B} en fonction de μ_0 , M_0 , a et b .

Feuille de TD n° 8: *Induction électromagnétique*

1 Principe de la plaque de cuisson par induction

1. On modélise une plaque à induction et une casserole comme suit :

- La **casserole** peut être considéré comme un milieu conducteur de conductivité γ , de perméabilité relative μ_r , qui occupe le demi-espace $z > 0$.
- La **plaque à induction** est une plaque conductrice plane, d'épaisseur finie, occupant le demi-espace $z < 0$, et qui est parcourue par un courant de densité volumique uniforme et constante \vec{J}_0 . Ses dimensions sont très grandes devant les longueurs intervenant dans le problème et du point de vue des symétries et des invariances, on peut les considérer comme infinies. Elle est parcourue par un courant sinusoïdal de pulsation ω , et produit dans l'air, près de la surface du milieu, un champ magnétique uniforme $B_1 \cos(\omega t) \vec{u}_x$.

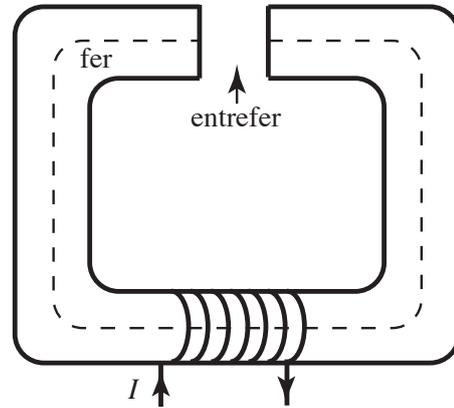
On fait dans toute la suite les approximations suivantes :

- * La pulsation ω est suffisamment faible pour que le régime soit quasi-stationnaire.
 - * Le milieu est un conducteur ohmique, sa conductivité γ ne dépend pas de ω .
 - * Les dimensions sont telles que le système est invariant par toute translation parallèle au plan xOy .
- (a) Quelle est la direction des courants \vec{J}_0 de la plaque produisant le champ \vec{B}_1 ? Il est inutile de relier \vec{J}_0 à \vec{B}_1 .
- (b) Montrer que dans le milieu, les champs magnétique et électrique ont une seule composante non nulle et qu'elle ne dépend que de z et de t . On les note $B(z, t)$ et $E(z, t)$.
2. En régime permanent, $B(z, t)$ et $E(z, t)$ sont des fonctions sinusoïdales du temps de pulsation ω . On utilise pour les calculs la notation complexe : le champ magnétique extérieur s'écrit alors $B_1 \exp(-i\omega t) \vec{u}_x$ et on pose $B(z, t) = f(z) \exp(-i\omega t)$ et $E(z, t) = g(z) \exp(-i\omega t)$ où f et g sont des fonctions complexes de la variable z qu'on cherche à calculer.
- (a) Écrire les quatre équations de Maxwell dans le milieu ainsi que la loi d'Ohm. On utilisera le fait que dans un conducteur en régime quasi-stationnaire la densité volumique de charge est nulle et le courant de déplacement est négligeable. Montrer que deux équations de Maxwell sont automatiquement vérifiées.
- (b) En déduire l'équation différentielle satisfaite par $f(z)$.
3. (a) On pose $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \mu_r \gamma \omega}}$. Calculer $f(z)$ en fonction de B_1 , δ et μ_r en tenant compte de sa valeur en $z = 0$ et sachant que B ne peut pas devenir infini dans le milieu.
- (b) Quelle est la dimension de δ et sa signification physique ?
- (c) Calculer $g(z)$. En déduire l'expression réelle de $E(z, t)$.
4. Calculer la puissance par unité de volume dégagée en chaleur dans le milieu. En déduire la puissance moyenne temporelle de chauffage par unité de surface en fonction de B_1 , μ_0 , μ_r , γ et ω .
5. A.N. On donne pour le cuivre $\gamma = 6 \times 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$, $\mu_r = 1$. Pour l'acier, $\gamma = 6 \times 10^6 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$, $\mu_r = 1000$. La pulsation est $\omega = 1000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.
- (a) Calculer δ pour le cuivre et pour l'acier. Commentaire.
- (b) La puissance de chauffage désirée est de $10^4 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. En déduire le champ B_1 nécessaire dans les deux cas. Expliquer le choix de l'acier pour réaliser des casseroles fonctionnant sur une plaque à induction. Donner une valeur minimale de l'épaisseur du fond de la casserole en acier.

2 L'Électro-aimant

Il est constitué d'un barreau de ferromagnétique doux appelé fer, de section constante S , replié sur lui-même de façon que les deux extrémités planes soient en regard l'une de l'autre à la distance d . L'espace vide entre les extrémités est appelé entrefer. On donne la longueur de la ligne médiane du barreau (en pointillé) $\ell = 1,5$ m, $d = 5$ cm, la perméabilité relative du fer $\mu_r = 4000$. Un enroulement de N spires est bobiné sur une partie du fer. Il est traversé par le courant I . On admet que dans le fer les lignes de champ sont parallèles à la ligne médiane donc à la surface du barreau et que la norme de \vec{B} dans le fer notée B_1 est constante sur une section droite.

1. Montrer que B_1 est constante dans tout le fer. Calculer H_1 norme de \vec{H} dans le fer en fonction de B_1 en régime linéaire.
2. On admet aussi que les lignes de champ dans l'entrefer sont perpendiculaires aux faces. Montrer que le champ B_2 dans l'entrefer est uniforme. Calculer B_2 en fonction de B_1 . En déduire H_2 dans l'entrefer.
3. À l'aide du théorème d'Ampère, calculer H_1 , H_2 , B_1 et B_2 en fonction de μ_0 , μ_r , ℓ , d , N et I .
A.N.: $B_2 = 1$ T pour $I = 100$ A. Calculer N .
4. Refaire le calcul de B_2 quand le fer est saturé : $M_s = 1,2 \times 10^6$ A.m⁻¹. Quel champ peut-on obtenir dans l'entrefer avec le courant maximum de 180 A ?



Feuille de TD n° 9: *Propagation dans les milieux*

1 Effet Faraday dans un diélectrique

Un milieu diélectrique isolant est modélisé par un réseau d'ions positifs de charge $+e$, immobiles, en nombre n par unité de volume. Autour de chaque ion tourne un électron qui est soumis à une force de rappel dirigée vers le centre de l'ion. Cette force tient compte de toutes les interactions de l'électron avec toutes les autres particules composant le diélectrique. Elle est donnée par $-m\omega_0^2\vec{R}$ où \vec{R} est le vecteur joignant le centre de l'ion à l'électron et ω_0 une pulsation caractéristique du milieu. Chaque couple électron-ion forme un dipôle électrique. On note m la masse de l'électron, \vec{V} sa vitesse, e la charge élémentaire, μ_0 la perméabilité du vide. Le but de ce problème est d'étudier l'influence d'un champ magnétique statique $\vec{B}_s = B_s\vec{u}_z$ sur la propagation d'une onde électromagnétique transverse plane. On suppose que les différentes grandeurs (\vec{E} , \vec{B} , \vec{R} , etc...) associées à l'onde sont de la forme : $G = G_0 \exp[i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)]$ où \vec{r} représente le vecteur position à partir d'une origine fixe O . Du point de vue microscopique, l'onde électromagnétique se propage dans le vide en présence de charges et de courants.

A. Équation de propagation des ondes.

- À partir des équations de Maxwell, établir l'équation de propagation de \vec{E} sous sa forme la plus générale.
- Montrer que pour une onde transverse plane $\text{div}\vec{E} = 0$. Réécrire l'équation de propagation en tenant compte de ce résultat et de la forme de \vec{E} .

B. Détermination des caractéristiques du milieu.

On utilise dans les calculs la pulsation cyclotron $\omega_c = \frac{eB_s}{m}$ et la pulsation plasma ω_p telle que $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0}$.

- Écrire le principe fondamental de la dynamique pour un électron en présence d'une onde électromagnétique de champs \vec{E} et \vec{B} et du champ magnétique \vec{B}_s lorsque l'électron est non relativiste.
 - Justifier que l'on peut négliger l'effet du champ \vec{B} devant celui de \vec{E} .
 - Justifier que l'on peut remplacer $\frac{d\vec{v}}{dt}$ par $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$
- Dans le cas où $\vec{B}_s = \vec{0}$, déterminer la susceptibilité et la permittivité diélectriques du milieu dans le cas dynamique ($\omega \neq 0$) puis dans le cas statique ($\omega = 0$).
- Dans le cas général où \vec{B}_s est non nul, calculer les composantes cartésiennes de \vec{R} en fonction de E_x , E_y , E_z , ω , ω_c , ω_0 , e et m .
- En déduire la vitesse de l'électron, puis la densité de courant \vec{j} puis enfin $\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}$ en fonction de \vec{E} , μ_0 , ω^2/c^2 et d'un tenseur $\bar{\chi}$ dont on exprimera les coefficients à l'aide des nombres α , β , γ suivants :

$$\alpha = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \beta = \frac{\omega_p^2\omega\omega_c}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2\omega_c^2} \quad \gamma = \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2\omega_c^2}$$

- En utilisant l'équation de propagation des ondes obtenue à la question A.2., déduire une relation entre \vec{E} et $\bar{\chi}$.

C. Détermination des modes propres de propagation.

- 1^{er} cas : on suppose que \vec{E} est vecteur propre de $\bar{\chi}$ avec la valeur propre α . Quelle est la direction de \vec{E} ? Quelles sont les directions possibles pour le vecteur d'onde \vec{k} ? Le champ \vec{B}_s a-t-il une influence sur l'onde ? Calculer la vitesse de phase dans ce cas.
- 2^e cas : \vec{E} est vecteur propre de $\bar{\chi}$ avec une valeur propre différente de α . Déterminer les valeurs propres possibles. Déterminer la direction de \vec{k} pour une onde transverse. Calculer les normes k_1 et k_2 des vecteurs d'ondes des ondes associées aux deux valeurs propres (modes propres). Étudier la polarisation de chaque mode propre.

D. Effet Faraday.

On émet dans le vide en $z = -\infty$ une onde plane transverse polarisée rectilignement selon Ox . Elle traverse une tranche du milieu étudié située entre les plans $z = 0$ et $z = L$, dans laquelle règne un champ magnétique statique \vec{B}_s parallèle à la direction de propagation Oz . Les régions $z < 0$ et $z > L$ sont vides. On suppose que ω_c et ω_p sont $\ll \omega \approx \sqrt{|\omega_0^2 - \omega^2|}$.

1. Vérifier que α, β, γ sont $\ll 1$.
2. Dans le milieu, pour $0 < z < L$, on essaie la solution $\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t) \vec{u}_x$. Montrer que cette solution est impossible si $B_s \neq 0$.
3. On cherche maintenant une solution qui est une combinaison linéaire des modes propres trouvés en C.2. Décomposer l'onde incidente $\vec{E}_i(z = 0, t) = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$ en somme d'une onde à polarisation circulaire droite et une onde à polarisation circulaire gauche. Dans le milieu on cherche une solution $\vec{E}(z, t) = \vec{E}_1(z, t) + \vec{E}_2(z, t)$ où l'indice 1 (respectivement 2) est relatif à une onde à polarisation circulaire gauche (respectivement droite).
4. En déduire $\vec{E}_{1,2}(z, t)$ puis $\vec{E}(z, t)$ dans le milieu. Calculer $\vec{E}(z = L, t)$.
5. Dans le vide en $z > L$, on étudie la polarisation de l'onde transmise. De quelle polarisation s'agit-il ? On note θ l'angle entre \vec{E} et l'axe Ox . Calculer θ en fonction de L, k_1, k_2 puis en fonction des données du problème.

Feuille de TD n° 10: *Propagation: Guide d'onde*

1 Formulation générale

On considère un guide cylindrique d'axe (z), dont la surface est un conducteur parfait et dont l'intérieur est vide, ie. $\epsilon_r = \mu_r = 1$, et sans source.

1. A partir des équations de Maxwell, écrire les équations de propagation pour \vec{E} et \vec{B} .
2. On considère une dépendance temporelle harmonique $e^{-i\omega t}$. Pourquoi ne perd-on pas en généralité ? L'équation de propagation prend alors le nom d'équation de Helmholtz.
3. Ecrire les équations de Maxwell dans le cas d'une dépendance temporelle harmonique.
4. Pourquoi peut-on écrire les champs sous la forme :

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, z, t) &= \vec{E}(x, y) e^{\pm ik_z z - i\omega t} \\ \vec{B}(x, y, z, t) &= \vec{B}(x, y) e^{\pm ik_z z - i\omega t}\end{aligned}$$

5. Comment s'écrit alors l'équation de Helmholtz ? On note k_t le nombre d'onde transverse, défini par $k_t^2 = k^2 - k_z^2$. Définir l'opérateur "Laplacien transverse" Δ_t s'appliquant uniquement aux coordonnées transverses.

2 Câble coaxial

Un câble coaxial est constitué de deux conducteurs parfaits qui sont des cylindres infinis de même axe (z), de section circulaire de même centre O et de rayons a et b avec $a < b$.

2.1 Ondes transverses magnétiques TM

En général, pour étudier les modes guidés, on les décompose suivant les composantes transverses et longitudinales, ce qui donne pour \vec{E} par exemple : $\vec{E} = \vec{E}_t + E_z \vec{e}_z$ et on définit l'opérateur $\vec{\nabla}_t = \vec{\nabla} - \vec{e}_z \partial_z$ qui n'agit que sur les coordonnées transverses.

Dans cette partie, on considère le cas des ondes transverses magnétiques (TM), définies par $B_z = 0$. Le laplacien transverse $\Delta_t = \vec{\nabla}_t^2$ s'exprime en coordonnées cylindriques $\Delta_t A = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}$.

1. On montre que, E_z étant non nul, il est possible d'exprimer \vec{E} et \vec{B} en fonction de E_z . Question Bonus : le montrer à partir des équations de Maxwell.
2. Quelle est l'équation de propagation vérifiée par E_z ?
3. On propose d'utiliser l'Ansatz $E_z(r, \theta) = g(r).f(\theta)$. Ré-écrire l'équation de propagation, puis la diviser par $g.f$. Montrer qu'elle se présente alors comme la somme de deux termes dont l'un ne dépend que de r et l'autre que de θ .
4. En déduire l'équation vérifiée par f et la résoudre.
5. Montrer que g vérifie une équation de Bessel :

$$g'' + \frac{g'}{x} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) g = 0$$

avec m entier relatif et $x = k_t.r$. Les deux solutions indépendantes de cette équation sont les fonctions de Bessel de première et deuxième espèces, notées respectivement $J_m(x)$ et $Y_m(x)$. Les J sont définies en $x = 0$, alors que les Y divergent. Quelques unes sont tracées sur le site "Wolfram Mathworld".

6. Quelles sont les conditions aux bords ? En déduire une équation vérifiée par k_t à m fixé. Ses solutions sont discrètes et notées $k_t(p, m)$.
7. Montrer que pour un jeu d'indices (p, m) , il existe une longueur d'onde de coupure $\lambda_c(p, m)$ au-dessus de laquelle ce mode ne peut pas se propager.

8. On peut montrer que $(b - a)k_t(p, m) \simeq p\pi$. En déduire qu'il existe une longueur d'onde de coupure au-dessus de laquelle aucun mode TM ne peut se propager. Application numérique pour $a = 2,4$ mm et $b = 8,8$ mm.

Un raisonnement similaire s'applique pour les ondes transverses électriques (TE).

2.2 Ondes TEM

1. Montrer qu'on peut définir un potentiel V , tel que $\vec{E}_t = -\vec{\nabla}_t V$, et qu'il vérifie $\Delta_t V = 0$.
2. Montrer que $k_z = k$ et que l'onde a localement une structure d'onde plane.
3. Pourquoi le problème se ramène-t-il à une situation d'électrostatique ? Pourquoi un guide creux à une seule électrode ne peut-il pas supporter la propagation d'une onde TEM ?
4. On utilise à nouveau l'Ansatz $V(r, \theta) = g(r).f(\theta)$. En suivant un raisonnement similaire à celui de la partie précédente, donner l'expression de f en fonction d'un entier relatif m et montrer que g vérifie une équation de Bessel modifiée.
5. On considère le cas $m = 0$. Résoudre l'équation vérifiée par g .
6. Les conditions au bord sont de la forme $V(r = a, \theta) = V_a$ et $V(r = b, \theta) = V_b$. Donner l'expression de g .
7. Conclure sur l'existence d'une longueur d'onde de coupure pour les ondes TEM. Pourquoi est-il confortable de travailler avec un câble coaxial en dessous de la fréquence de coupure des modes TM (ou TE) ?
8. On définit l'impédance caractéristique Z_0 du câble comme le rapport du voltage entre les cylindre sur courant axial parcourant l'un des cylindre, pour toute valeur de z . Montrer à l'aide du théorème d'Ampère que pour ce câble $Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \ln \frac{b}{a}$. Faites l'application numérique en considérant entre les deux électrodes, au lieu du vide, un isolant de permittivité relative $\epsilon_r = 2.4$.

Feuille de TD n° 11: *Radiation (I)* *Théorie classique du rayonnement par une charge ou un atom*

1 Relation de Larmor

On rappelle l'expression du champ rayonné, à grande distance, par une charge q en mouvement non relativiste, d'accélération \vec{a} , positionnée au centre du référentiel :

$$\begin{aligned}\vec{E}^{\text{ray}}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0 q}{4\pi r} \vec{e}_r \wedge \left[\vec{e}_r \wedge \vec{a} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \\ \vec{B}^{\text{ray}}(\vec{r}, t) &= -\frac{\mu_0 q}{4\pi r c} \vec{e}_r \wedge \vec{a} \left(t - \frac{r}{c} \right)\end{aligned}\quad (3)$$

1. Donner l'expression des champs rayonnés si le mouvement s'effectue seulement le long de l'axe z .
2. Déterminer alors le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(\vec{r}, t)$.
3. Calculer la puissance instantanée $\mathcal{P}(r, t)$ rayonnée par la charge à travers une sphère de rayon r . Il s'agit de la relation de LARMOR. On posera: $e^2 \equiv \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}$.

2 Equation d'Abraham-Lorentz

L'énergie rayonnée s'accompagne d'une diminution de l'énergie cinétique de la charge. Cette dernière est donc ralentie.

1. On considère une charge en mouvement pseudo-périodique. En égalisant l'énergie rayonnée par la charge pendant une durée T avec le travail d'une force dite *force de réaction radiative*, montrer que cette dernière peut être écrite :

$$\vec{F}_{\text{rad}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{\vec{a}}$$

2. La charge est soumise à une force extérieure \vec{F}_{ext} . Écrire alors son équation du mouvement (équation d'ABRAHAM-LORENTZ). En quoi cette équation est-elle étrange ?
3. Résoudre cette équation dans le cas où $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$. Vous introduirez une durée τ caractéristique du mouvement de la charge q pouvant être exprimée en fonction du rayon classique de l'électron $r_0 \equiv \frac{e^2}{m_e c^2}$. Commenter cette équation et faire l'application numérique pour τ et r_0 .
4. Dans quels cas la force de réaction radiative peut-elle être considérée comme une perturbation ? On examinera la situation d'une particule en mouvement périodique.

3 Modèle de Rutherford

On se place maintenant dans cadre du modèle de RUTHERFORD. On suppose que l'électron décrit un mouvement circulaire uniforme autour du noyau (numéro atomique Z) supposé immobile.

1. Donner l'expression de l'énergie mécanique de l'électron.
2. Exprimer la force de réaction radiative dans les coordonnées cylindriques, puis son travail.
3. On se place dans le cadre d'une approximation adiabatique où le mouvement obéit en permanence aux lois du mouvement circulaire uniforme. Écrire une équation différentielle où n'interviennent que m_e , τ , e^2 , Z et $r(t)$, $r(t)$ étant le rayon de l'orbite à l'instant t .
4. En déduire que le cube du rayon de l'orbite décroît linéairement avec le temps.
5. Comment varie dans le même temps la fréquence orbitale et donc la fréquence du rayonnement émis? Commentaire.

6. Estimer cependant l'ordre de grandeur de la durée de vie de l'atome d'hydrogène dans son état fondamental.
7. Estimer de la même façon quelle serait la durée de vie de l'atome d'hydrogène dans un état caractérisé par le nombre quantique n . Commentaire.

Feuille de TD n° 12: *Radiation (II)* *Rayonnement d'une antenne*

On considère une portion de conducteur rectiligne MN de longueur l , dirigée selon l'axe Oz . Ce conducteur est parcouru par un courant $I = I_0 \cos(\omega t)$.

1. On suppose qu'à l'extérieur du tronçon MN , la densité de courant est nulle. En utilisant la fonction de Heaviside (voir à la fin de l'énoncé) et la distribution de Dirac, donner l'expression de la densité de courant \vec{j} dans tout l'espace.
2. En utilisant la conservation de la charge, montrer que ce système peut être assimilé à un dipôle oscillant constitué de deux charges opposées placées en M et N et dont la valeur varie de façon sinusoïdale ($\pm q \sin \omega t$).
3. En déduire la densité de courant complexe $\vec{j}(\vec{r}, t)$ dans tout l'espace, ainsi que la densité de charge complexe $\rho(\vec{r}, t)$.
4. On cherche tout d'abord à calculer à l'instant t les potentiels en un point P de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ).
 - (a) En utilisant l'expression des potentiels retardés, exprimer le potentiel scalaire V (en notation complexe) au point P en fonction des distances $r_1 = MP$ et $r_2 = NP$.
 - (b) On note λ la longueur d'onde du champ électromagnétique rayonné par le dipôle. On suppose $r \gg \lambda \gg l$ (approximations dipolaire et champ lointain). Montrer que le potentiel scalaire complexe peut s'écrire en ne gardant que le terme principal du DL en l/λ et en l/r :

$$V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{i\omega}{cr} p \cos(\theta)$$

en fonction du moment dipolaire complexe retardé $p = iql \exp(-i\omega(t - r/c))$.

- (c) Montrer que la seule composante non nulle du potentiel-vecteur \vec{A} s'écrit :

$$A_z = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\omega}{r} p$$

5. Calculer les composantes non nulles des champs \vec{E} et \vec{B} au point P en ne gardant que les termes principaux des DL en λ/r . Montrer que $E_r \ll E_\theta$. Calculer $\|\vec{E}\|/\|\vec{B}\|$. Faire un schéma montrant O, P, \vec{E}, \vec{B} et le vecteur d'onde \vec{k} .
6. On se propose maintenant de calculer la puissance rayonnée à grande distance par cette antenne dipolaire en fonction de l'amplitude I_0 du courant circulant dans le conducteur MN . Montrer que la puissance totale peut s'exprimer par :

$$P = \frac{1}{2} R_r I_0^2$$

où R_r est la *résistance de rayonnement* de l'antenne dont on donnera l'expression en fonction de l et λ .

La fonction de Heaviside est définie par :

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque que $\frac{d}{dx}\Theta(x) = \delta(x)$.

Formulaire

1 Analyse vectorielle

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) = 0$$

$$(p) = \vec{0}$$

$$\Delta p = \operatorname{div}(p)$$

$$\overline{\Delta \vec{A}} = (\operatorname{div} \vec{A}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A})$$

$$(pq) = pq + qp$$

$$\operatorname{div}(p\vec{A}) = p \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot p$$

$$\Delta(pq) = p \Delta q + q \Delta p + 2p \cdot q$$

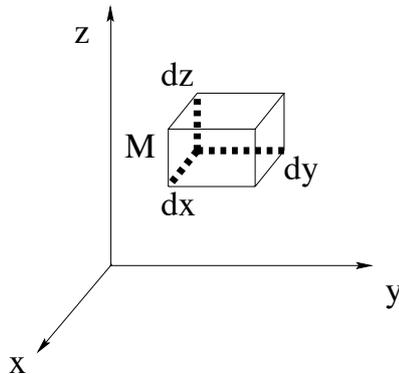
$$(p\vec{A}) = p \vec{A} + p \times \vec{A}$$

$$\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{B}$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \operatorname{div} \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{A}$$

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{B} \times \vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$$

2 Coordonnées cartésiennes (x, y, z)



$$dV = dx \, dy \, dz$$

- Divergence :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- Gradient :

$$(\vec{\nabla} f)_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (\vec{\nabla} f)_y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (\vec{\nabla} f)_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

- *Rotationnel* :

$$\begin{cases} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{cases}$$

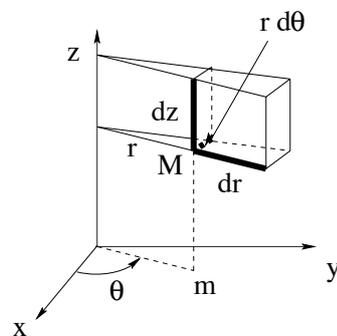
- *Laplacien* :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- *Laplacien vectoriel* :

$$\Delta \vec{A} = (\Delta A_x) \vec{u}_x + (\Delta A_y) \vec{u}_y + (\Delta A_z) \vec{u}_z$$

3 Coordonnées cylindriques (r, θ, z)



$$dV = r dr d\theta dz$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

- *Divergence* :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- *Gradient* :

$$(\vec{\nabla} f)_r = \frac{\partial f}{\partial r} \quad (\vec{\nabla} f)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (\vec{\nabla} f)_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

- *Rotationnel* :

$$\begin{cases} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_\theta = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{cases}$$

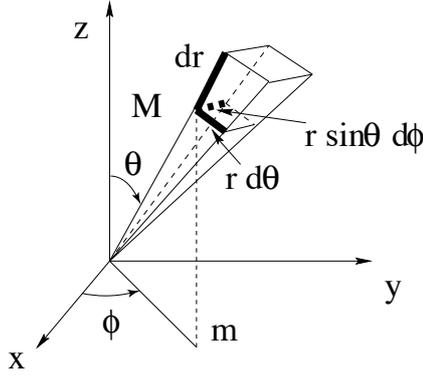
- *Laplacien* :

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned}$$

- *Laplacien vectoriel* :

$$\Delta \vec{A} = \left[\Delta A_r - \frac{1}{r^2} \left(A_r + 2 \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \right] \vec{u}_r + \left[\Delta A_\theta - \frac{1}{r^2} \left(A_\theta - 2 \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \right] \vec{u}_\theta + (\Delta A_z) \vec{u}_z$$

4 Coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)



$$dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

- Divergence :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right]$$

- Gradient :

$$(\vec{\nabla} f)_r = \frac{\partial f}{\partial r} \quad (\vec{\nabla} f)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (\vec{\nabla} f)_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi}$$

- Rotationnel :

$$\begin{cases} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_\theta = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_\phi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{cases}$$

- Laplacien :

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \end{aligned}$$

- Laplacien vectoriel :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A} &= \left[\Delta A_r - \frac{2}{r^2 \sin(\theta)} \left(A_r \sin(\theta) + \frac{\partial(\sin(\theta) A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \right] \vec{u}_r + \\ &\quad \left[\Delta A_\theta - \frac{2}{r^2 \sin(\theta)} \left(\frac{A_\theta}{2} - \sin^2(\theta) \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \cos(\theta) \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \right] \vec{u}_\theta + \\ &\quad \left[\Delta A_\phi - \frac{2}{r^2 \sin(\theta)} \left(\frac{A_\phi}{2} - \sin^2(\theta) \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \cos(\theta) \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \right] \vec{u}_\phi \end{aligned}$$

5 Résolution de l'équation de Bessel

5.1 Equation de Bessel

La résolution de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques (r, θ, z) :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

peut se faire en cherchant une solution de la forme $V = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$. En multipliant ensuite le résultat par $r^2/(\Theta Z)$, on obtient l'équation décrivant l'évolution de R sous la forme :

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + (k^2 r^2 - \nu^2) R = 0$$

En substituant $x = kr$, on obtient l'équation de Bessel d'ordre ν :

$$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} + (x^2 - \nu^2) R = 0 \quad (4)$$

5.2 Fonctions de Bessel et fonctions de Neumann

Une solution de (4) est la *fonction de Bessel de 1^{re} espèce* $J_\nu(x)$ définie par :

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \quad (5)$$

où $\Gamma(x)$ est la fonction définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (6)$$

Les variations des premières fonctions de Bessel sont données sur la figure 2. Une autre solution de l'équation de Bessel (4) est $J_{-\nu}(x)$. Lorsque ν n'est pas un entier, $J_\nu(x)$ et $J_{-\nu}(x)$ sont linéairement indépendants. Si $\nu = n$ est entier, on peut montrer que :

$$J_n(x) = (-1)^n J_n(-x) \quad (7)$$

La *fonction de Bessel de 2^e espèce* ou *fonction de Neumann* $N_\nu(x)$ est définie par :

$$N_\nu(x) = \lim_{m \rightarrow \nu} \left(\frac{\cos(m\pi) J_m(x) - J_{-m}(x)}{\sin(m\pi)} \right) \quad (8)$$

Les variations des premières fonctions de Neumann sont données sur la figure 3. On peut montrer que :

$$N_\nu(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} x^{-\nu} \quad \text{et} \quad N_\nu(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln(x)$$

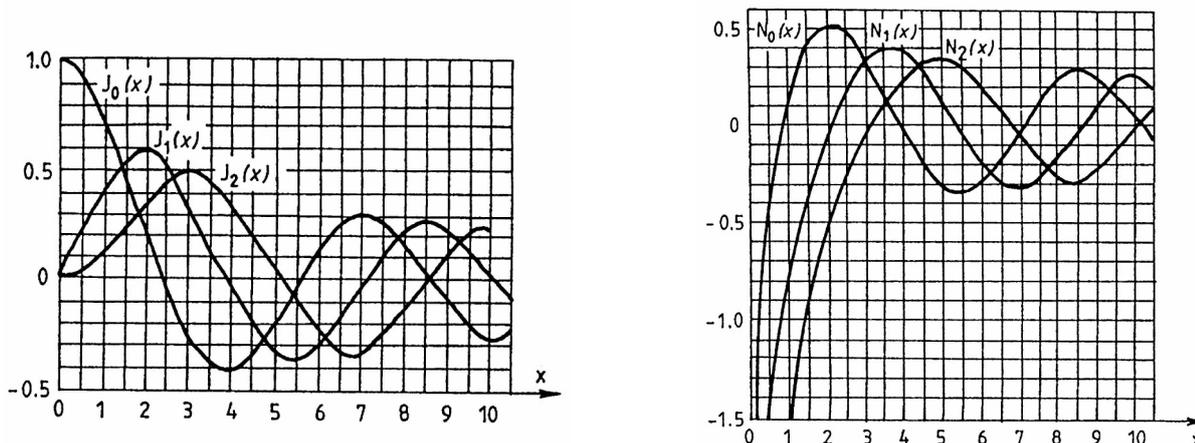


Figure 3: (a) Les trois premières fonctions de Bessel $J_n(x)$. (b) Les trois premières fonctions de Neumann $N_n(x)$.

Pour résoudre l'équation de Bessel (4), on doit donc considérer deux cas :

1. Si ν n'est pas entier, la solution $R_\nu(x)$ est une combinaison linéaire de $J_\nu(x)$ et $J_{-\nu}(x)$:

$$R_\nu(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x) \quad (9)$$

2. Si $\nu = n$ est entier, $J_n(x)$ et $J_n(-x)$ ne sont pas linéairement indépendants d'après (7). On peut montrer

que la solution $R_n(x)$ est alors une combinaison linéaire de $J_n(x)$ et $N_n(x)$:

$$R_n(x) = C_1 J_n(x) + C_2 N_n(x) \quad (10)$$