

Phys131 – Astrophysique Cosmologie – TD

Cette feuille d'exercice est conçue pour être menée avec un enseignant.

1. Expansion de l'univers, loi de Hubble-Lemaître, âge de l'univers.

On donne :

- la loi de Hubble-Lemaître : $v = H_0 d$
- $1 \text{ Mpc} = 3,086 \times 10^{22} \text{ m}$

Les graphes ci-dessous représentent les mesures de galaxies : vitesse radiale (exprimée en km/s) en fonction de leur distance (exprimée en pc ou Mpc).

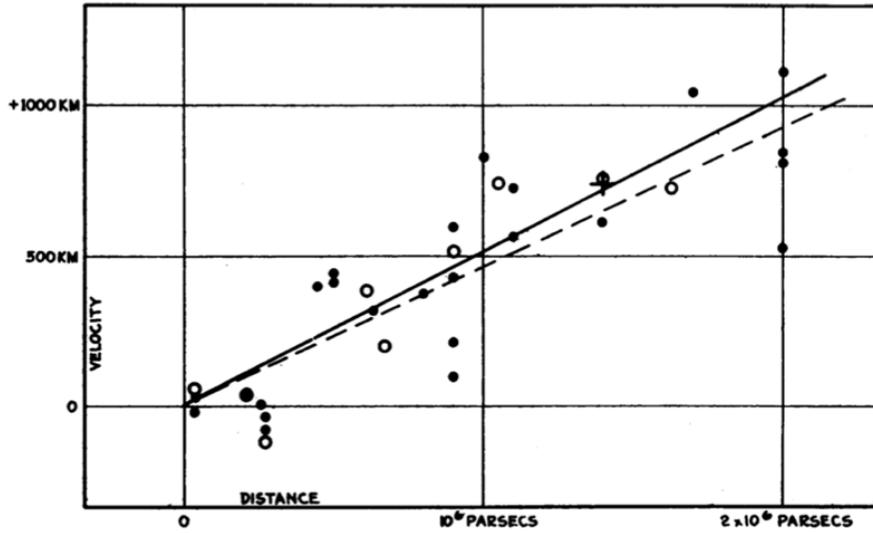
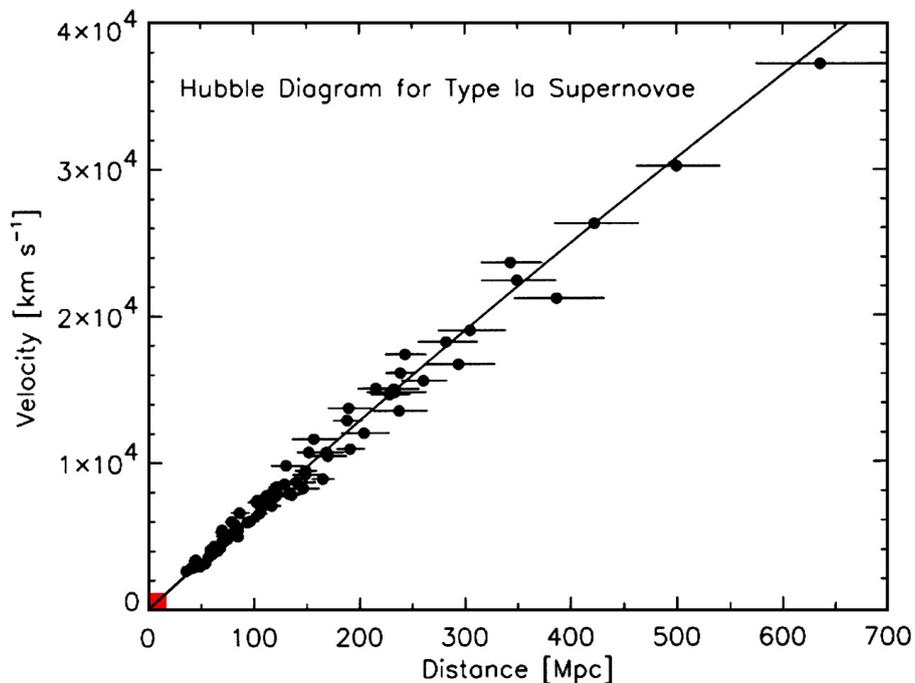


FIGURE 1
Velocity-Distance Relation among Extra-Galactic Nebulae.

*Diagramme de la découverte de l'expansion de l'univers réalisé par Hubble en 1929
(tiré de Proc. Nat. Astron. Soc., vol. 15, p. 168, 1929)*



Mesure plus récente de la loi de Hubble-Lemaître, en 2000. Ref PNAS : <http://www.pnas.org/content/101/1/8/F3.expansion>

- 1- Quelle est la dimension de H_0 ?
- 2- Calculer H_0 selon les mesures de 1929 (premier graphe)
- 3- Calculer H_0 selon les valeurs des années 2000 (deuxième graphe). Comparer.
- 4- la valeur la plus précise de H_0 provient du satellite Planck (2015) : 67.8 km/s/Mpc . Comparer.
- 5- Calculer l'âge de l'univers dans un cadre simple.

2. A-t-on vraiment besoin de matière noire dans les galaxies ? Modélisation de la courbe de rotation des galaxies.

Modélisons une galaxie par une sphère de rayon R de centre O , de densité constante de matière ρ , et de masse totale M . On étudie une particule de gaz (ou une étoile) A de masse m_A située au rayon r , en mouvement circulaire autour de O . On va regarder le mouvement de A (accélération, vitesse) en fonction de r et de la masse qu'elle « subit ».

- 1- Exprimer la masse M en fonction de R et ρ .
- 2- Exprimer la masse $m(r)$ que « voit » la particule A en fonction de r et ρ .
- 3- Exprimer la norme de la force gravitationnelle F_A que subit A en fonction de r , $m(r)$, m_A .

On distingue à présent deux régimes de distances :

- (P) : proche : $0 < r < R$
- (L) : lointain : $r \gg R$

- 4- Pourquoi fait-on cette distinction ? A quels comportements s'attend-on ?
- 5- Pour chacun des deux régimes de distance, exprimer le PFD afin d'obtenir la norme de l'accélération a (qu'on admettra purement radiale) :
 - (P) en fonction de r et ρ .
 - (L) en fonction de r et M .
- 6- On admettra que A décrit un mouvement circulaire uniforme, et que les normes des vitesse et accélération sont reliées par : $a = v^2 / r$. Exprimer v^2 pour chacun des deux régimes (mêmes variables que la question 5).
- 7- Tracer les axes d'un graphe $v^2 = f(r)$, en indiquant $r=R$ et en identifiant les deux régimes.
- 8- Tracer qualitativement $v^2 = f(r)$ en pointillés pour le régime (P) trouvé à la question 6.
- 9- Tracer qualitativement $v^2 = f(r)$ en pointillés pour le régime (L) trouvé à la question 6.
- 10- Que se passe-t-il en $r=R$?
- 11- Discuter du comportement en (P), $r=R$, et (L).
- 12- Comparer aux courbes de rotation observées. Discuter des différences et de leurs origines.
- 13- Comment sont obtenues ces mesures ?

EXERCICES FACULTATIFS, non forcément traités en Phys131

3. Pourquoi la nuit est-elle noire ? Paradoxe d'Olbers simplét.

Imaginons un espace euclidien rempli uniformément (et uniquement) d'étoiles, de densité n .

1- Expliquer pourquoi cette hypothèse n'est (vaguement) réaliste qu'à une certaine échelle spatiale. Laquelle approximativement ? Quelle est la dimension (et l'unité) de n ?

Supposons que chaque étoile est identique, de luminosité L_* , et qu'elle brille indéfiniment (ce qui est parfaitement irréaliste). La dimension de L_* est homogène à une puissance, et s'exprime par exemple en Watt.

2- Une étoile se situe à la distance r de l'observateur (situé sur Terre). Exprimer le flux F_* observé de l'étoile. Quelle est la dimension de F_* ?

3- Soit une coquille sphérique centrée sur l'observateur terrestre, de rayon r et d'épaisseur dr . Combien d'étoiles dN se trouvent dans cette coquille ? Vérifier la dimension de dN .

4- Calculer le flux dF_* reçu sur Terre par les étoiles de la coquille. Ce flux dépend-il de la distance de la coquille r ?

5- Calculer le flux F_* reçu sur Terre par l'ensemble des coquilles, en intégrant dF_* sur r entre $r = 0$ et $r = +\infty$. Cette intégrale converge t-elle ? Qu'en déduisez-vous ?

4. Mesure de la densité critique de l'univers

1. Rappeler la définition de la constante de Hubble H_0 . Rappeler son unité et sa dimension.
2. Rappeler l'expression de la densité critique de l'univers ρ_{crit} en fonction de G (la constante de la gravitation universelle) et de H_0 (la constante de Hubble).
3. Vérifier l'homogénéité de l'expression ci-dessus de ρ_{crit} .
4. Calculer numériquement la valeur de ρ_{crit} en unités S.I.
5. Convertir cette valeur de ρ_{crit} en protons par mètre cubes. On donne la masse du proton : $1,6 \cdot 10^{-27}$ kg.
6. Sachant que $\Omega_m = 0.3$, calculer la densité de matière ρ_m dans l'univers.
7. Sachant que $\Omega_b = 0.04$, calculer la densité de matière baryonique ρ_b .

5. Évolution de la matière et du rayonnement dans l'univers

1. L'équation d'état d'un fluide cosmologique peut s'écrire : $P = w r c^2$ (avec P la pression, w un paramètre, r la densité, et c la célérité de la lumière).
Donner w pour les cas de fluides cosmologiques suivants :
 - a- la matière noire w_c ;
 - b- la matière ordinaire (baryonique) w_b ;
 - c- le rayonnement w_g ;
 - d- une constante cosmologique w_Λ .
2. Calculer pour chacun de ces cas l'exposant n tel que : r proportionnel à a^n (avec a le facteur d'échelle).
3. En déduire une petite histoire de l'univers : quel(s) fluide(s) cosmologique(s) domine(nt) l'expansion en fonction de a ?

6. Température de l'univers

1. En faisant l'hypothèse que la température moyenne de l'univers $T(z)$ varie avec le redshift z comme : $T(z) = T_0 * (1+z)$ avec $T_0 \sim 2.7K$: calculer $T(z=2)$.
2. Calculer $T(z=1000)$.
3. A quel redshift z correspondrait la température d'ionisation de l'atome d'hydrogène ?

7. Densités dans l'univers en fonction des échelles spatiales

Estimer, en ordre de grandeur (en g/cm³ ou kg/m³) les densités :

1. d'une planète tellurique
2. d'une planète géante gazeuse
3. de l'atmosphère terrestre
4. d'une étoile
5. d'un trou noir
6. d'une nébuleuse
7. d'une galaxie
8. d'un amas de galaxies
9. comparer avec la densité baryonique ou de matière obtenue à l'exercice 3.
On peut s'aider d'internet pour trouver les masses et tailles typiques, en les justifiant.

8. Attraction gravitationnelle comparée

1. Trouver sur internet (sites de confiance, par exemple <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/>) : les masses de Jupiter, Mars et Vénus
2. Trouver sur internet les distances minimum entre chacune de ces planètes et la Terre
3. Soit M la masse d'une de ces planètes, r la distance minimale à la Terre, et m la masse d'un humain, écrire l'expression du module de la force gravitationnelle exercée par cette planète sur l'humain
4. Nous allons comparer ces forces entre elles. Quels termes pouvons-nous garder et pourquoi ?
5. Calculer numériquement M/r^2 pour les 3 planètes, en kg/m².
6. Soit un véhicule avec passagers de masse $m'=2$ tonnes situé à $r=1$ mètre de vous. Calculer m'/r^2 .
7. Comparer les 4 valeurs. Conclure sur l'intensité de la force gravitationnelle des planètes subie par les humains vs leur environnement quotidien.