

9.2 Rayonnement dipolaire magnétique

9.2.1 Moment magnétique oscillant

Un *dipôle magnétique oscillant* sera par définition un circuit émetteur circulaire, parcouru par un courant sinusoïdal $i(t) = I_m \exp(-i\omega t)$ tel que son rayon soit petit devant la distance d'observation (cf Figure 9.16). Ce circuit porte le moment magnétique sinusoïdal complexe $m(t)$ donné par :

$$\vec{m}(t) = m_0 \exp(-i\omega t) \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad m_0 = \pi a^2 I_m$$

On pourrait faire une étude similaire à celle développée au paragraphe précédent pour le dipôle électrique. On présente ici simplement les résultats les plus pertinents.

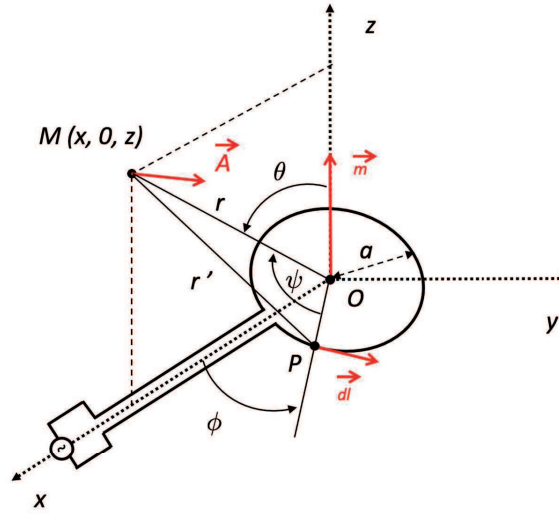


FIGURE 9.16 – Géométrie utilisée dans le cas du moment dipolaire magnétique oscillant. Le point courant P décrit le circuit circulaire. La figure n'est pas à l'échelle puisqu'on considère que M est éloigné de l'origine O .

9.2.2 Calcul des potentiels et des champs

Calcul des potentiels

Le potentiel-vecteur \vec{A} retardé s'écrit :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I_m}{PM} \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{PM}{c}\right)\right] d\vec{l}$$

où P est un point courant sur le circuit et $d\vec{l} = d\vec{OP}$. On a $PM \approx r - \vec{u}_r \cdot \vec{OP}$, dont on déduit :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_m}{r} \vec{C} \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{PM}{c}\right)\right] \quad \text{avec} \quad \vec{C} = \oint \frac{\exp\left(-i\omega \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{OP}}{c}\right)}{1 - \vec{u}_r \cdot \vec{OP}/r} d\vec{l} \quad (9.37)$$

Comme on a :

$$\exp\left(-i\omega \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{OP}}{c}\right) \approx 1 - i\omega \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{OP}}{c} \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{OP}}{r}\right)^{-1} \approx 1 + \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{OP}}{r}$$

On en déduit que \vec{C} s'écrit, en négligeant les termes du 2^e ordre en $\vec{u}_r \cdot \vec{OP}/r$:

$$\vec{C} \approx \oint \left(1 - \frac{i\omega r}{c}\right) \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{OP}}{r} d\vec{l}$$

puisque $\oint d\vec{\ell} = 0$. Un peu de trigonométrie élémentaire (à l'aide de la Figure 9.16) montre que :

$$\vec{u}_r = \sin(\theta) \cos(\phi) \vec{u}_x + \sin(\theta) \sin(\phi) \vec{u}_y + \cos(\theta) \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{OP} = a \cos(\alpha) \vec{u}_x + a \sin(\alpha) \vec{u}_y$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \vec{C} &= \left(1 - \frac{i\omega r}{c}\right) a^2 \frac{\sin(\theta)}{r} \oint \frac{1}{\alpha} [\cos(\alpha) \cos(\phi) + \sin(\alpha) \sin(\phi)] d\vec{\ell} \\ &= \left(1 - \frac{i\omega r}{c}\right) a^2 \frac{\sin(\theta)}{r} \int_0^{2\pi} [\cos(\alpha) \cos(\phi) + \sin(\alpha) \sin(\phi)] [-\sin(\alpha) \vec{u}_x + \cos(\alpha) \vec{u}_y] d\alpha \\ &\approx \left(1 - \frac{i\omega r}{c}\right) a^2 \frac{\sin(\theta)}{r} \pi [-\sin(\phi) \vec{u}_x + \cos(\phi) \vec{u}_y] \\ &= \left(1 - \frac{i\omega r}{c}\right) \pi a^2 \frac{\sin(\theta)}{r} \pi \vec{u}_\phi \end{aligned}$$

où la 2^e égalité vient de $d\vec{\ell} = [-\sin(\alpha) \vec{u}_x + \cos(\alpha) \vec{u}_y] d\alpha$ et la 4^e de $\vec{u}_\phi = -\sin(\phi) \vec{u}_x + \cos(\phi) \vec{u}_y$.

On en déduit l'expression approchée du potentiel-vecteur :

$$\vec{A}(M, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \left(1 - \frac{i\omega r}{c}\right) \frac{\sin(\theta)}{r^2} m(t-r/c) \vec{u}_\phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{m(t-r/c)}{r^2} + \frac{m'(t-r/c)}{rc} \right] \sin(\theta) \vec{u}_\phi \quad (9.38)$$

où la 2^e égalité vient de la formulation harmonique de la dérivée temporelle. Finalement :

$$\vec{A}(M, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\vec{m}}{r^2} + \frac{\vec{m}'}{rc} \right]_{t'=t-r/c} \times \vec{u}_r \quad (9.39)$$

Remarque 1 : On remarque que \vec{A} est bien porté par \vec{u}_ϕ , comme attendu par la symétrie du système.

Remarque 2 : En utilisant $\vec{\nabla} \times (\vec{r}/r^2) = 0$, $\vec{\nabla} \times (\vec{r}/r^3) = 0$ et (A.9), on peut écrire :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{m} + \frac{\vec{r}}{r^2 c} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{m}' \right)$$

Comme \vec{m} est porté selon l'axe (Oz), on a :

$$\vec{\nabla} \times \vec{m} = \frac{\partial m}{\partial y} \vec{u}_x - \frac{\partial m}{\partial x} \vec{u}_y = -\frac{m'}{rc} (y \vec{u}_x - x \vec{u}_y) \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{m}' = \frac{m''}{rc} (y \vec{u}_x - x \vec{u}_y)$$

Finalement :

$$\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{m} + \frac{\vec{r}}{r^2 c} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{m}' = 0 \quad \text{en développant} \quad \vec{r} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y$$

Le potentiel-vecteur retardé (9.39) vérifie bien $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.

Remarque 3 : En jauge de **Lorenz**, on en déduit que $\Delta\Phi = 0$ car la charge totale du système est nulle. Le potentiel scalaire retardé $\Phi(M, t)$ du dipôle magnétique oscillant vérifie donc :

$$\Phi(M, t) = 0 \quad (9.40)$$

Calcul des champs

On obtient \vec{E} à partir de $\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t$. On en déduit :

$$\vec{E}(M, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{m'(t-r/c)}{r^2} + \frac{m''(t-r/c)}{rc} \right] \sin(\theta) \vec{u}_\phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{i\omega}{r^2} + \frac{\omega^2}{rc} \right) m \sin(\theta) \vec{u}_\phi \quad (9.41)$$

Le champ \vec{B} s'obtient par $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Après quelques calculs, on trouve :

$$\vec{B}(M, t) = \begin{cases} B_r &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m_0 \cos(\theta)}{r^3} \left(1 - \frac{i\omega r}{c}\right) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \\ B_\theta &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_0 \sin(\theta)}{r^3} \left(1 - \frac{i\omega r}{c} - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \\ B_\phi &= 0 \end{cases} \quad (9.42)$$

Remarque 1 : Dans les relations 9.41 et 9.42, le 1^{er} terme représente le champ en l'absence de rayonnement, et le 2^e est dû au retard temporel r/c et traduit l'effet du rayonnement.

Remarque 2 : On notera que \vec{E} est dans la direction \vec{u}_ϕ et que \vec{B} est contenu dans le plan $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. Comme dans le cas du dipôle électrique oscillant (§ 9.1.2), les champs \vec{E} et \vec{B} s'expriment uniquement en fonction de termes proportionnels à m/r^3 , $m'/(r^2 c)$ et $m''/(r c^2)$.

9.2.3 Champ de rayonnement

Dans la zone de rayonnement, c'est-à-dire pour $r/\lambda \ll 1$ ou encore $\omega r/c \gg 2\pi$, on obtient :

$$\vec{E}(M, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2 \sin(\theta)}{r c} m(t - r/c) \vec{u}_\phi \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) \approx -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2 \sin(\theta)}{r c^2} m(t - r/c) \vec{u}_\theta \quad (9.43)$$

Remarque 1 : Les amplitudes des champs \vec{E} et \vec{B} décroissent comme $1/r$.

Remarque 2 : On vérifie que $\vec{E} = c \vec{B} \times \vec{u}_r$, c'est-à-dire que le champ possède localement la structure d'une onde plane qui se propage selon \vec{u}_r . Le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{r})$ est un trièdre direct et les champs \vec{E} et \vec{B} sont en phase.

Remarque 3 : En orientant les dipôles selon Oz (cf Figure 9.17), on remarque que les champs \vec{E} et \vec{B} donnés par (9.43) sont intervertis par rapport à ceux du dipôle électrique donnés par (9.12).

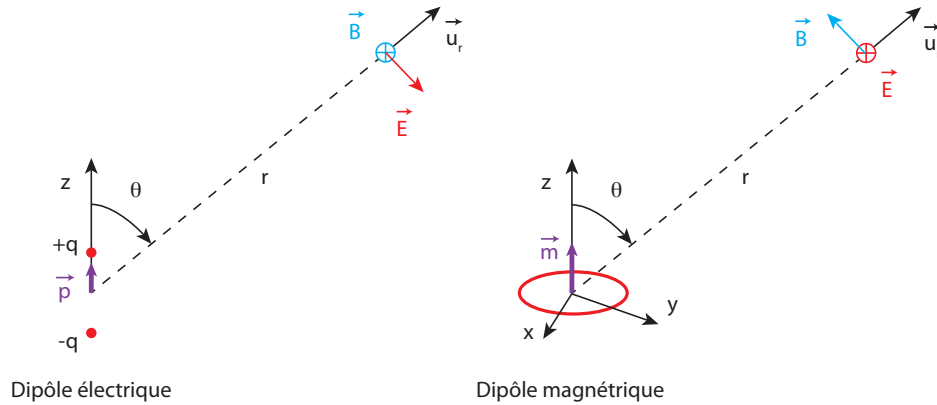


FIGURE 9.17 – Champ de rayonnement d'un dipôle électrique (à gauche) et d'un dipôle magnétique (à droite).

9.2.4 Puissance rayonnée à grande distance

Un calcul simple montre que la valeur moyenne sur le temps du vecteur de **Poynting** vaut :

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{\mu_0}{32\pi^2 c^3} \frac{m_0^2 \omega^4 \sin^2(\theta)}{r^2} \vec{u}_r$$

dont on déduit la puissance moyenne \mathcal{P}_M rayonnée dans toutes les directions :

$$\mathcal{P}_M = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12 \pi c^3}$$

en intégrant sur une sphère de rayon r dans la zone de rayonnement. Comme dans le cas du dipôle électrique oscillant, on constate que les hautes fréquences sont mieux rayonnées que les basses fréquences.

Résistance de rayonnement

Comme dans le cas du dipôle électrique oscillant, on peut définir une *résistance de rayonnement* R_r comme étant la résistance nécessaire pour qu'un conducteur ohmique parcouru par le courant I_m perde par effet Joule la puissance \mathcal{P}_M . On obtient :

$$R_r = \frac{\pi}{6 \epsilon_0 c} (2\pi)^4 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 \approx 308 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 \quad (9.44)$$

On constate que R_r varie selon $1/\lambda^4$, alors que la variation n'était que de $1/\lambda^2$ pour le dipôle électrique oscillant.

Remarque : Pour un dipôle électrique oscillant, on avait $\mathcal{P}_E = p_0^2 \omega^4 / (12 \pi \epsilon_0 c^3)$, où l'ordre de grandeur du moment dipolaire électrique est $p = e a$. Pour le rayonnement dipolaire magnétique, l'ordre de grandeur du moment dipolaire est $m_0 = \pi a^2 e / T = e v a / 2$ puisque $v T = 2 \pi a$.

En ordre de grandeur, on a donc :

$$\frac{\mathcal{P}_M}{\mathcal{P}_E} \approx \left(\frac{m_0}{p_0 c}\right)^2 = \frac{v^2}{4 c^2} \ll 1$$

Le rayonnement dipolaire magnétique est beaucoup plus faible que le rayonnement dipolaire électrique. Dans la pratique, il ne sera observable que lorsque le rayonnement dipolaire électrique sera nul.

9.3 Rayonnement d'une antenne

9.3.1 Généralités

Les divers types d'antennes

On appelle *antenne* un dispositif conçu pour rayonner (ou récupérer) de l'énergie électromagnétique sous une forme donnée. On s'intéressera uniquement au champ de rayonnement.

D'après ce qu'on a vu précédemment, des charges qui se déplacent à vitesse constante dans un conducteur ne produisent pas l'émission d'un rayonnement car leur accélération est nulle. Par contre, si ces charges rencontrent une discontinuité, alors leur vitesse change et provoque l'émission d'un rayonnement. Il en est de même dans une structure en résonance où les charges ont une accélération non nulle (cf Figure 9.18).

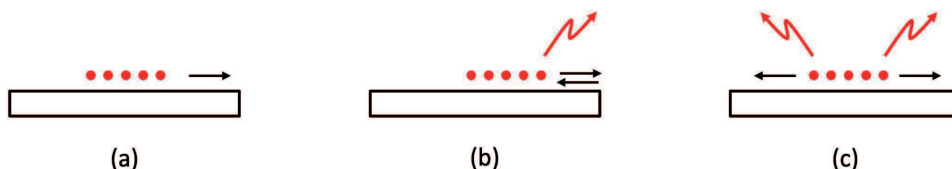


FIGURE 9.18 – Une antenne est constituée de charges qui se déplacent sur un conducteur. Si leur vitesse est uniforme, l'antenne ne rayonne pas (a). Une discontinuité (b) ou un mouvement d'oscillation (c) provoque une émission de rayonnement.

Pour émettre de l'énergie électromagnétique de manière efficace dans une direction donnée, les charges et les courants doivent être disposés de manière optimale.

Une antenne peut être un simple fil conducteur rectiligne, une boucle excitée par un courant sinusoïdal, un orifice à l'extrémité d'un guide d'onde ou un arrangement sophistiqué de tout ceci (voir Figures 9.19, 9.20 et Fig 9.21 pour quelques exemples). Il n'existe pas d'antenne qui rayonne uniformément dans toutes les directions. Le rayonnement d'une antenne doit généralement être étudié en trois dimensions, puisqu'il varie selon θ et ϕ en coordonnées sphériques.

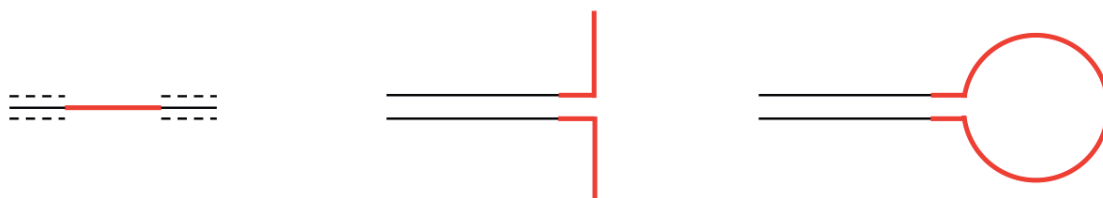


FIGURE 9.19 – Une antenne peut-être constituée d'une interruption du blindage dans un câble coaxial (à gauche), d'un circuit ouvert (au centre) ou fermé (à droite).

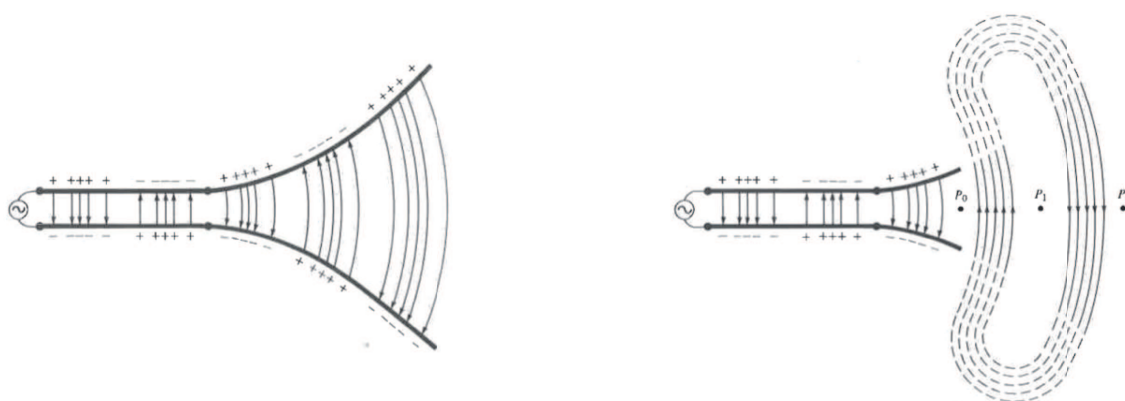


FIGURE 9.20 – Schéma d'une antenne constituée de plaques parallèles parcourues par un courant sinusoïdal. La figure représente les lignes de champ entre les plaques (à gauche) et à l'extérieur (à droite).



FIGURE 9.21 – Une antenne peut-être constituée un orifice dans un guide d'ondes, ou d'une forme plus complexe comprenant plusieurs orifices.

Les antennes linéaires

Une *antenne rectiligne* ou *linéaire* peut être considérée comme un ensemble de dipôles oscillants en alignant les dipôles dans la direction de l'antenne. On contrebalance alors l'effet des très faibles résistances de rayonnement d'un dipôle (§ 9.1.5). Elle est constituée de conducteurs alimentés en leur centre et ayant une longueur de l'ordre de la longueur d'onde.

En théorie, si la distribution de courant est connue, on obtient le champ en intégrant l'effet d'un dipôle sur tout le volume de l'antenne. Ce n'est qu'un simple problème de conditions aux limites sur le conducteur (courant nul aux extrémités et champ $\vec{E}_{Transverse}$ nul sur toute la surface de l'antenne). Dans la pratique, la détermination de la densité de courant réelle est très délicate, même pour des conducteurs parfaits. Considérer

les conducteurs réels est encore plus complexe. Dans tout ce cours, on simplifiera le problème en négligeant l'effet de l'épaisseur de l'antenne.

9.3.2 Cas particulier d'une antenne demi-onde

Le cas particulier d'une antenne demi-onde est décrit sur la Figure 9.22. Une antenne *demi-onde* est simplement constitué de deux conducteurs, chacun de longueur $h/2 = \lambda/4$, alimentés au centre du dispositif par un courant $I_m \cos(\omega t)$ (λ est la longueur d'onde d'une onde plane se propageant dans le milieu).

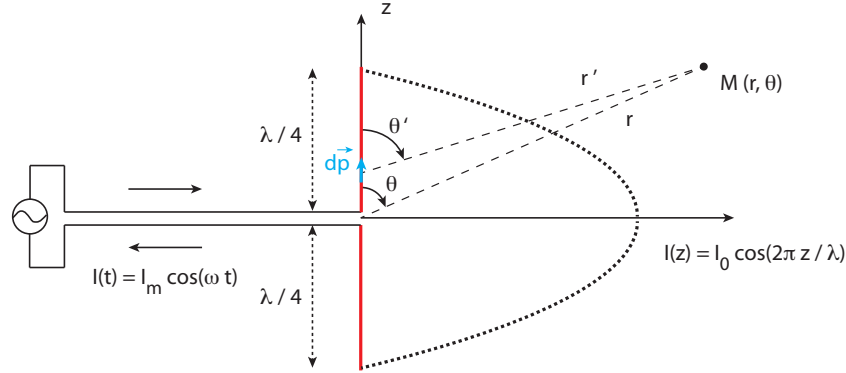


FIGURE 9.22 – Principe d'une antenne demi-onde constituée d'une infinité de moments élémentaires $d\vec{p}$. La courbe en pointillés représente l'onde stationnaire de courant pour $\cos(\omega t) = 1$. La figure n'est pas à l'échelle puisque le point d'observation M se situe à grande distance de l'antenne.

L'antenne porte une onde stationnaire de courant avec un maximum au centre et des nœuds aux extrémités. Le courant à la position z sur la partie du conducteur qui rayonne s'écrit donc :

$$I(t) = I_m \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) \exp(-i\omega t) \quad (9.45)$$

D'après ce qu'on a vu précédemment, chaque portion de conducteur dz va rayonner comme un dipôle de **Hertz**⁴. L'onde stationnaire peut être décomposée en somme de deux ondes progressives, dirigées respectivement vers les z positifs et les z négatifs, chacune d'amplitude $I/2$:

$$I(t) = \frac{I_m}{2} \left[\exp\left(-i\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right)\right) + \exp\left(-i\left(\omega t + \frac{2\pi z}{\lambda}\right)\right) \right] \quad (9.46)$$

Champ électrique

On ne considèrera que le cas d'un point d'observation M dans la zone de rayonnement. On a alors $\theta' \approx \theta$ et $r' \approx r - z \cos(\theta)$ (cf Figure 9.22). D'après (9.12), le champ $d\vec{E}$ créé par le moment dipolaire élémentaire $d\vec{p}$ s'écrit :

$$d\vec{E} = -\frac{\mu_0 \omega^2 dp}{4\pi r'} \sin(\theta) \vec{u}_\theta$$

où le moment dipolaire $d\vec{p}$ est exprimé à l'instant retardé $t' = t - r/c$. Après calcul, on obtient :

$$d\vec{E} = -i \frac{\mu_0 \omega I_m}{8\pi r'} \left[\exp\left(-i\left(\omega t' - \frac{2\pi z}{\lambda}\right)\right) + \exp\left(-i\left(\omega t' + \frac{2\pi z}{\lambda}\right)\right) \right] \sin \theta dz \vec{u}_\theta \quad (9.47)$$

soit encore :

$$d\vec{E} = -i \frac{\mu_0 \omega}{4\pi r'} I(t') \sin \theta dz \vec{u}_\theta \quad (9.48)$$

4. Cette description d'une antenne demi-onde est sujette à caution car l'onde de courant le long de l'antenne ne peut être réellement sinusoïdale que dans le cas d'une absence de perte, c'est-à-dire sans phénomène de rayonnement. Dans une antenne réelle, la distribution de courant n'est pas exactement sinusoïdale, mais ce phénomène peut être négligé (et de toute façon, on ne sait pas faire autrement..).

Pour intégrer le long de l'antenne, on peut utiliser $r' \approx r$ au dénominateur car $r \gg \lambda$. Attention, on ne peut pas utiliser cette approximation dans l'expression du temps retardé $t' = t - r'/c$ parce que la phase des termes exponentiels dans (9.48) varie rapidement avec r' . Il faut donc poser :

$$t' \approx t - \frac{r - z \cos(\theta)}{c} = t - \frac{r}{c} + \frac{z \cos \theta}{c}$$

En un point M donné, toutes les contributions élémentaires $d\vec{E}$ ont la même direction selon \vec{u}_θ et la même amplitude. Seules les phases sont modifiées. Le champ total s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{E}(M, t) &= -i \frac{\mu_0 \omega I_m}{8 \pi r} \sin(\theta) \exp\left(-i \omega \left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \\ &\times \int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4} \left[\exp\left(-i \frac{2 \pi z (\cos \theta - 1)}{\lambda}\right) + \exp\left(-i \frac{2 \pi z (\cos \theta + 1)}{\lambda}\right) \right] dz \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

puis en intégrant :

$$\vec{E}(M, t) = -i \frac{I_m}{4 \pi c \epsilon_0 r} \sin(\theta) \exp\left(-i \omega \left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \left(\frac{\sin(\pi (\cos \theta - 1)/2)}{\cos \theta - 1} + \frac{\sin(\pi (\cos \theta + 1)/2)}{\cos \theta + 1} \right) \vec{u}_\theta$$

Après calculs⁵ :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{-i I(t')}{2 \pi c \epsilon_0 r} \frac{\cos(\pi/2 \times \cos \theta)}{\sin \theta} \vec{u}_\theta \quad (9.49)$$

Remarque 1 : On remarque que le champ électrique est indépendant de la fréquence d'excitation. C'est cohérent car le champ \vec{E} pour un dipôle est proportionnel à $1/\lambda$ mais la longueur de l'antenne est égale à $\lambda/2$.

Remarque 2 : L'expression (9.49) n'est pas définie pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. Mais, selon la *règle de l'Hôpital* (ou *règle de Bernoulli*), la limite est égale à la limite du rapport des dérivées. On en déduit que :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} (E) = \lim_{\theta \rightarrow \pi} (E) = 0$$

ce qui est cohérent avec le fait que les dipôles ne rayonnent pas dans la direction de leur axe.

Champ magnétique

Comme $B = E/c$ dans la zone de rayonnement, on a immédiatement :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{-i \mu_0 I(t')}{2 \pi r} \frac{\cos(\pi/2 \times \cos \theta)}{\sin \theta} \vec{u}_\phi \quad (9.50)$$

Puissance rayonnée

Après calcul, le vecteur de **Poynting** moyen dans la zone de rayonnement est :

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{\pi \epsilon_0 c} \frac{I_m^2}{8 \pi r^2} \frac{\cos^2(\pi/2 \times \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \vec{u}_r \quad (9.51)$$

La puissance totale rayonnée \mathcal{P} s'obtient en intégrant $\vec{E} \times \vec{B}/\mu_0$ sur une sphère de rayon r . On obtient :

$$\mathcal{P} = \frac{I_m^2}{8 \pi^2 \epsilon_0 c} \int_0^\pi \frac{\cos^2(\pi/2 \times \cos \theta)}{r^2 \sin^2 \theta} r^2 \sin \theta d\theta \approx 36,54 I_m^2$$

5. Au cours de vos études, vous avez (peut-être) vu que :

$$\sin\left(\frac{\pi(\cos \theta - 1)}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi(\cos \theta + 1)}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)$$

puisque qu'on montre numériquement que l'intégrale vaut 1,219.

Remarque 1 : La résistance de rayonnement de l'antenne est donc $R_r \approx 73 \Omega$, soit environ 10^5 fois plus que dans le cas du dipôle de **Hertz**.

Remarque 2 : La puissance est principalement émise dans le plan équatorial (Figure 9.23). En comparant avec le diagramme du dipôle oscillant retardé, on constate que la puissance est plus rayonnée dans le plan équatorial dans le cas de l'antenne demi-onde que dans le cas des dipôles élémentaires qui la constituent.

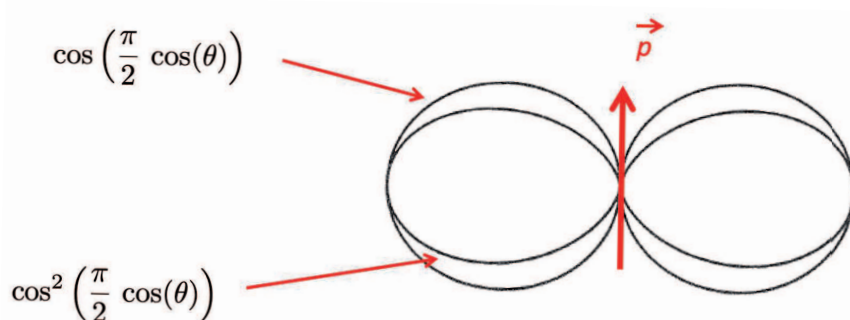


FIGURE 9.23 – Diagramme polaire des fonctions $\cos(\pi/2 \times \cos \theta)$ (courbe externe) et $\cos^2(\pi/2 \times \cos \theta)$ (courbe interne).

9.3.3 Autres antennes rectilignes

En posant $\beta = 2\pi/\lambda$, on modélise la distribution de courant le long d'une antenne rectiligne quelconque de longueur $2h$ par :

$$I(z, t) = I_m \sin(\beta(h - |z|)) \cos(\omega t)$$

En développant des calculs identiques à ceux du paragraphe précédent, on obtient le champ en superposant les champs créés par les différents éléments de l'antenne, de longueur élémentaire dz :

$$\vec{E} \approx -i \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_m}{r} \exp(i\beta r) F(\theta) \quad \text{avec} \quad F(\theta) = \frac{\cos(\beta h \cos \theta) - \cos(\beta h)}{\sin \theta}$$

où $F(\theta)$ est le *diagramme de rayonnement du champ \vec{E}* pour l'antenne linéaire dipolaire. La forme de $F(\theta)$ dépend de la valeur de $\beta h = 2\pi h/\lambda$ et peut-être très différente selon ces valeurs (cf Figure 9.24). On remarque que $F(\theta)$ est toujours symétrique par rapport au plan $\theta = \pi/2$ et que le diagramme de rayonnement de \vec{B} sera toujours des cercles puisque $F(\theta)$ ne dépend pas de ϕ .

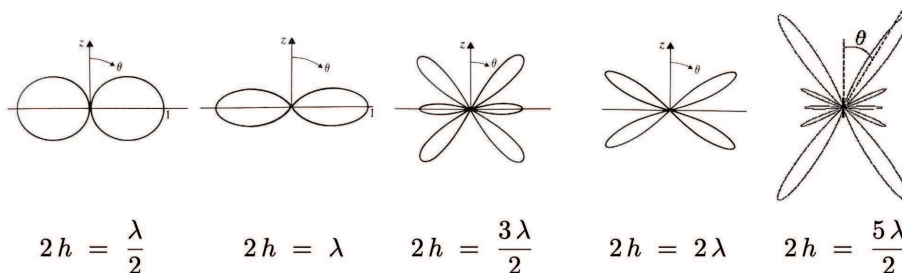


FIGURE 9.24 – Diagramme de rayonnement des antennes linéaires dipolaires pour diverses valeurs de $\beta h = 2\pi h/\lambda$ ($\beta h = \pi/2$, $\beta h = 3\pi/2$ et $\beta h = 5\pi/2$).

Après calculs, on obtient la puissance moyenne émise par cette antenne :

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = \frac{\mu_0 c I_m^2}{8 \pi^2} \left(\frac{\cos(\beta h \cos(\theta)) - \cos(\beta h)}{\sin(\theta)} \right)^2 \quad (9.52)$$

L'intégration de cette équation sur tous les angles solides fournit la puissance totale rayonnée par l'antenne, mais un calcul complet nécessite de connaître précisément la forme de $F(\theta)$. Comme il y a autant de cas différents que d'expressions différentes de $F(\theta)$, un calcul général du rayonnement d'une antenne n'a donc pas de sens. Il est trop dépendant de la géométrie de l'antenne choisie. Si on sait traiter le cas de l'antenne demi-onde, on sait traiter tous les cas! On peut simplement dire que la présence de I_m dans (9.52) permet de toujours définir une *résistance de rayonnement* (cf Figure 9.25).

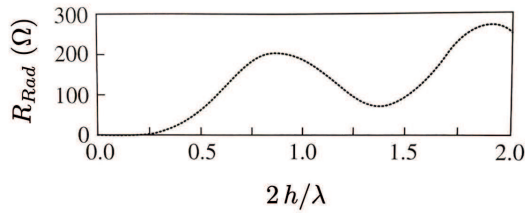


FIGURE 9.25 – Résistance de rayonnement des antennes dipolaires de longueur totale $2h$ et de longueur d'onde λ (Figure extraite de [13]).

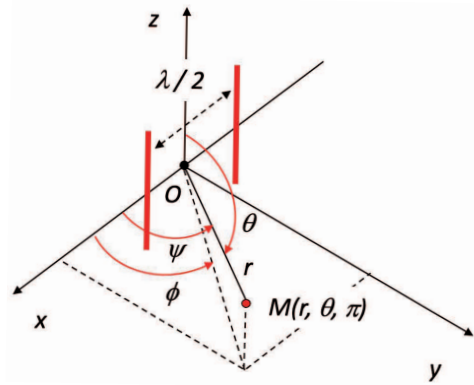


FIGURE 9.26 – Réseau de deux antennes demi-ondes séparées par $\lambda/2$. Les distances du centre des antennes au point M sont respectivement $r - \lambda/4 \times \cos(\psi)$ et $r + \lambda/4 \times \cos(\psi)$.

9.3.4 Réseaux d'antennes rectilignes

Le champ électrique de l'antenne demi-onde est maximum dans le plan équatorial. Dans ce plan, à une distance donnée, l'amplitude du champ est identique. Lorsqu'on cherche à maximiser le champ dans une direction particulière, on n'utilise plus une seule antenne mais des *réseaux d'antennes*. On va illustrer ce propos sur l'exemple de deux antennes demi-onde séparées de $\lambda/2$, d'abord alimentées en phase et ensuite en opposition de phase (cf Figure 9.26).

Deux antennes demi-onde en phase

Comme les antennes sont en phase, le champ \vec{E} en M sera juste la somme des contributions (9.49) de chaque antenne, en prenant en compte la distance qui est $r - \lambda/4 \times \cos(\psi)$ pour une antenne et $r + \lambda/4 \times \cos(\psi)$ pour l'autre. Donc une antenne verra son signal arriver en avance par rapport à celui d'une antenne imaginaire située au centre, d'une phase :

$$\frac{2 \pi \lambda \cos(\psi)}{\lambda \cdot 4} = \frac{\pi}{2} \cos(\psi)$$

tandis que l'autre verra arriver son signal en retard avec la phase opposée. Le champ total sera donc :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{-i}{2 \pi c \epsilon_0} \frac{\cos(\pi/2 \times \cos(\theta))}{r \sin(\theta)} \left(\exp\left(-i \frac{\pi}{2} \cos(\psi)\right) + \exp\left(i \frac{\pi}{2} \cos(\psi)\right) \right) I(t') \vec{u}_\theta \quad (9.53)$$

Comme $r \cos(\psi) = r \sin(\theta) \cos(\phi)$, le champ total peut s'écrire :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{-i}{\pi c \epsilon_0} \frac{\cos(\pi/2 \times \cos(\theta))}{r \sin(\theta)} \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin(\theta) \cos(\phi)\right) I(t') \vec{u}_\theta \quad (9.54)$$

On peut considérer trois plans particuliers :

1. Plan (Oxy) pour lequel $\theta = \pi/2$:

$$E(M, t) \propto \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(\phi)\right)$$

Le champ est nul pour $\phi = 0$ ou $\phi = \pi$, et maximum pour $\phi = \pi/2$: il y a une interférence destructive le long de l'axe (Ox) et constructive le long de l'axe (Oy).

2. Plan (Oxz) pour lequel $\phi = 0$:

$$E(M, t) \propto \frac{\cos(\pi/2 \times \cos(\theta))}{\sin(\theta)} \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin(\theta)\right)$$

Le 1^{er} terme représente la distribution angulaire d'une antenne demi-onde (0 à $\theta = 0$ et maximum à $\theta = \pi/2$). Le 2^e terme vient de l'interférence entre les deux antennes (maximum à $\theta = 0$ et nul à $\theta = \pi/2$). Le produit des deux est donc nul à $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$.

3. Plan (Oyz) pour lequel $\phi = \pi/2$:

$$E(M, t) \propto \frac{\cos(\pi/2 \times \cos(\theta))}{\sin(\theta)}$$

comme pour l'antenne demi-onde. Les deux ondes sont en phase et le champ total est le double du champ d'une antenne demi-onde.

Le diagramme de rayonnement est indiqué sur la Figure 9.27.

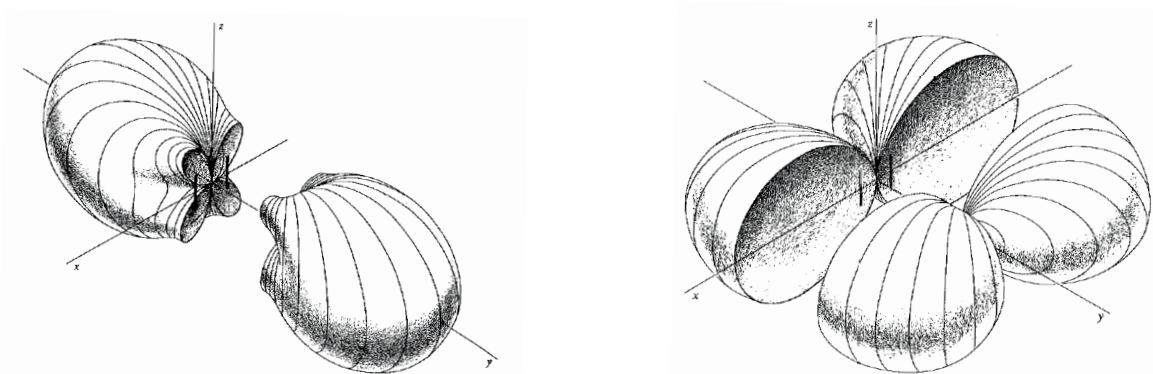


FIGURE 9.27 – Diagramme de rayonnement de deux antenne demi-onde séparées de $\lambda/2$ et alimentées en phase (à gauche) ou en opposition de phase (à droite). Le spectre total a été coupé en deux pour plus de clarté (Figures extraites de [1]).

Deux antennes demi-onde en opposition de phase

Si la 2^e antenne est maintenant déphasée de π , (9.53) reste valide en changeant le signe du 2^e terme. On obtient alors :

$$\vec{E} = \frac{1}{\pi c \epsilon_0} \frac{\cos(\pi/2 \times \cos(\theta))}{r \sin(\theta)} \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin(\theta) \cos(\phi)\right) I(t') \vec{u}_\theta \quad (9.55)$$

Le diagramme de rayonnement est indiqué sur la Figure 9.27.

On conclut de tout ceci qu'on peut obtenir une grande variété de diagrammes de rayonnement en variant la géométrie et la phase des diverses antennes. A titre d'exemple, la Figure 9.28 représente le champ \vec{E} rayonné en fonction de l'angle θ . Les conclusions sont généralisables : on observe un lobe principal à $\theta = 0$ et des lobes secondaires sur les cotés.

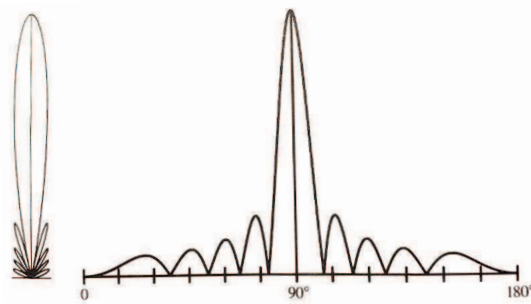


FIGURE 9.28 – Diagramme de rayonnement (coordonnées polaires à gauche et cartésiennes à droite) de $|\vec{E}|$ en fonction de θ pour un réseau de 10 antennes linéaires demi-ondes en phase (Figure extraite de [13]).

9.3.5 Les antennes à ouverture

Il existe d'autres types d'antennes que les antennes linéaires. Par exemple, parmi les plus utilisées, certaines antennes sont caractérisées par la présence de surfaces métalliques dans lesquelles on a pratiqué une ou plusieurs ouvertures : *cornets*, *guides d'ondes ouverts*, *antennes à fentes*, etc..

Du point de vue physique, le rayonnement électromagnétique de ces antennes est toujours produit par les courants qui circulent sur les parties métalliques de l'antenne (cf Figure 9.29). Tout se passe comme si le rayonnement était issu de l'ouverture de l'antenne.

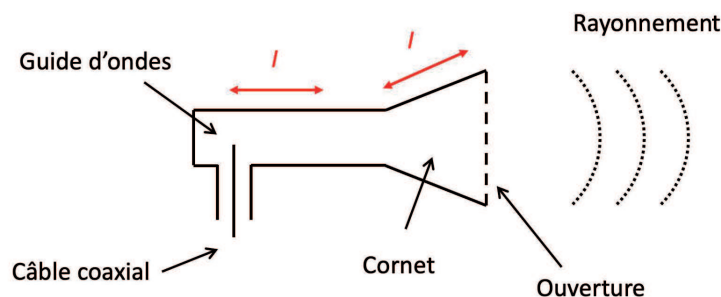


FIGURE 9.29 – Principe d'un corne, alimenté par un câble coaxial.

L'analyse mathématique exacte de ces antennes à partir des courants dans les parois est délicate, en particulier parce que la répartition des courants n'est pas facile à obtenir. Ces calculs ne peuvent généralement pas se faire de manière analytique, mais uniquement par modélisation numérique à l'aide de méthodes par éléments finis.

Si on veut obtenir des résultats sans passer par ces méthodes nécessitant une forte puissance de calcul, on peut obtenir quelques résultats approchés en utilisant des méthodes qui utilisent l'ouverture de l'antenne comme la source principale du rayonnement. Certaines de ces méthodes sont brièvement exposées dans le Complément G.3 à la fin de cette partie.

9.3.6 Mode récepteur des antennes

Les dispositifs vus jusqu'à présent étaient utilisés pour émettre une puissance \mathcal{P} à grande distance. Ils peuvent également être utilisés pour détecter un champ électromagnétique. On pourrait montrer (voir le Complément G.3.4) que le diagramme de rayonnement est identique à l'émission ou à la réception pour tout élément rayonnant passif.

Par exemple, la Figure 9.30 représente une antenne dipolaire utilisée en mode récepteur. Si l'impédance d'entrée du système est très élevée, l'antenne va générer une tension égale à la composante tangentielle de \vec{E} sur l'antenne, multipliée par la longueur de l'antenne.

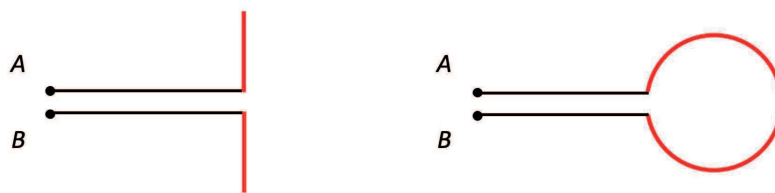


FIGURE 9.30 – Schéma d’une antenne dipolaire électrique (à gauche) et d’une antenne dipolaire magnétique (à droite) en mode récepteur.

Une boucle de courant peut également être utilisée comme antenne réceptrice (cf Figure 9.30). Le champ électromoteur sera maximal lorsque le champ \vec{B} sera orienté dans la direction orthogonale à la spire. Pour augmenter le flux de \vec{B} à travers la bobine, et en particulier la tension aux bornes du circuit, on peut utiliser un bobinage autour d’une âme en matériau magnétique (par exemple une ferrite).

Conclusion

La théorie des antennes repose sur la généralisation à grande dimension des concepts des dipôles électriques et magnétiques oscillants. On est néanmoins forcé de faire des approximations importantes, en particulier liées au fait qu’on ne sait pas prendre en compte la forme réelle de la distribution de courant dans le volume de l’antenne.

Annexe G

Compléments des Chapitres 9 à 11

Sommaire

G.1 Diffusion de Mie	273
G.2 Rayonnement d'une distribution quelconque	274
G.3 Quelques développements théoriques pour la modélisation des antennes . . .	276

G.1 Diffusion de Mie

La *diffusion Rayleigh* vue au § 9.1.6 n'est valable que pour les particules diffusantes très petites devant la longueur d'onde. La *diffusion de Mie* est une théorie complexe de la diffraction de la lumière par des particules sphériques, dont le rayon varie entre 0.1 et 10 fois la longueur d'onde. Etant donné qu'il n'y a pas de solution analytique au problème, il a fallu attendre, pour son étude extensive, les progrès en calcul numérique de ces dernières années. La diffusion **Rayleigh** est un cas limite de la diffusion de **Mie**.

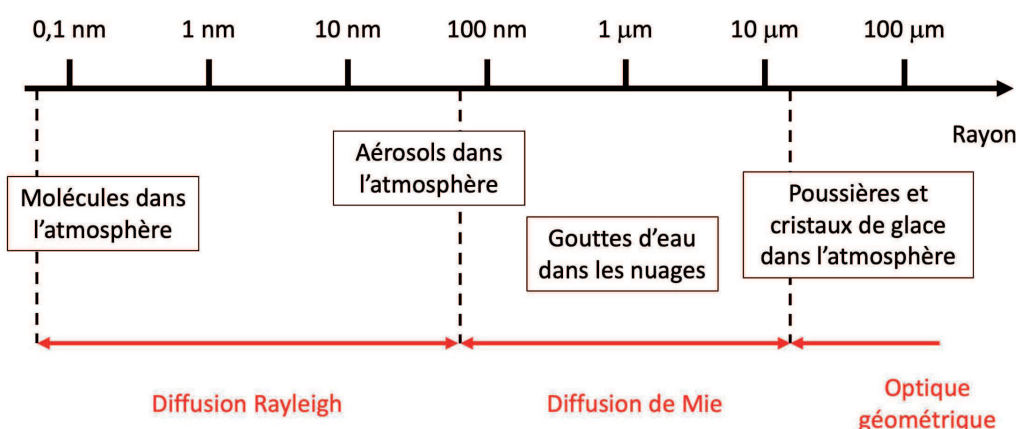


FIGURE G.1 – Répartition typique des différents processus de diffusion du rayonnement électromagnétique.

On peut voir la différence entre la diffusion **Rayleigh** et la diffusion de **Mie** dans deux phénomènes liés à l'atmosphère terrestre (cf Figure G.1) :

1. La diffusion **Rayleigh** sur les molécules de l'atmosphère explique la couleur du ciel (§ 9.1.6). Cette diffusion dépend de la longueur d'onde et disperse uniformément dans toutes les directions.
2. La diffusion de **Mie** provient de la diffusion de la lumière sur les aérosols présents dans l'atmosphère et sur les fines gouttes d'eau qui constituent les nuages. Cette diffusion varie peu avec la

longueur d'onde mais n'est pas isotrope car elle diffuse préférentiellement vers l'avant (cf Figure G.2). Elle explique la couleur des nuages : toutes les longueurs d'onde sont diffusées vers l'observateur qui voit donc un nuage blanc.

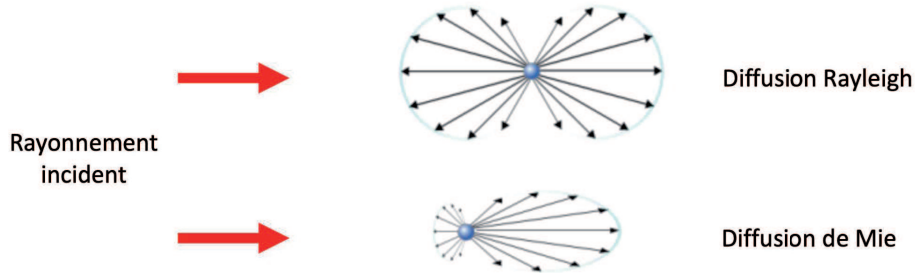


FIGURE G.2 – Indicatrices de rayonnement typiques pour la diffusion **Rayleigh** et la diffusion de **Mie**.

3. Lorsque la taille des particules cibles est très grande devant la longueur d'onde, les lois de l'optique géométrique sont applicables. C'est par les lois de Snell-Descartes qu'on traite le cas de la diffusion à travers une goutte d'eau (ce qui amène à la formation des arcs-en-ciel).

G.2 Rayonnement d'une distribution quelconque

On peut utiliser ce qui a été vu pour le rayonnement des dipôles électriques et magnétiques oscillants au cas d'une distribution arbitraire contenant des charges et des courants. La seule contrainte admise est que cette distribution est localisée dans une zone finie de l'espace (cf Figure G.3). On va faire dans ce paragraphe un développement multipolaire des potentiels retardés.

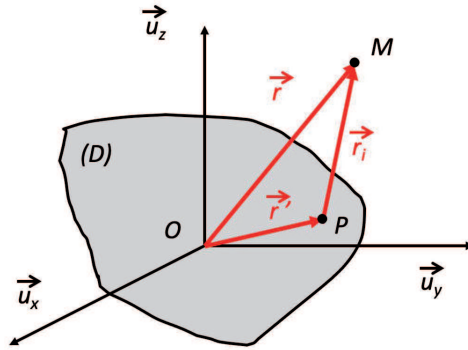


FIGURE G.3 – Rayonnement en M d'une distribution de charges et de courants (D) localisée dans l'espace. Le point courant P décrit la distribution volumique. La figure n'est pas à l'échelle puisqu'on considère que le point d'observation M est éloigné de l'origine O .

G.2.1 Calcul des potentiels et des champs

Calcul des potentiels retardé

Le potentiel scalaire retardé se met sous la forme :

$$\Phi(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_D \frac{\rho(\vec{r}', t - r_i/c)}{r_i} dV \quad \text{avec} \quad r_i = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} \quad (\text{G.1})$$

Comme précédemment, on est amené à faire plusieurs approximations :

1. L'approximation dipolaire consiste à dire que $r' \ll r$. On écrira donc :

$$r_i \approx r \left(1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right) \quad \text{et} \quad \rho(\vec{r}', t - r_i/c) \approx \rho \left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{c} \right)$$

En notant $t_0 = t - r/c$ le temps retardé à l'origine, on peut faire un développement de Taylor et dire que :

$$\rho(\vec{r}', t - r_i/c) \approx \rho(\vec{r}', t_0) + \dot{\rho}(\vec{r}', t_0) \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{c} + \frac{1}{2} \ddot{\rho} \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{c} \right)^2 + \frac{1}{3!} \dddot{\rho} \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{c} \right)^3 + \dots \quad (\text{G.2})$$

2. L'approximation non-relativiste consiste à dire que les charges ne se déplacent pas "trop" rapidement. Pour le cas du dipôle, cette approximation se traduit par ω/c petit. Dans le cas général d'une distribution quelconque, il est plus délicat de tirer une conclusion définitive. On admettra que cette approximation, combinée à l'approximation dipolaire, permet simplement de ne conserver que les termes du 1^{er} ordre en r' .

Finalement, on écrira :

$$\Phi(M, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\iiint_D \rho(\vec{r}', t_0) dV + \frac{\vec{u}_r}{r} \cdot \iiint_D \vec{r}' \rho(\vec{r}', t_0) dV + \frac{\vec{u}_r}{c} \cdot \frac{d}{dt} \left(\iiint_D \vec{r}' \rho(\vec{r}', t_0) dV \right) \right]$$

où la 1^{re} intégrale est la charge totale Q de la distribution et les deux autres intégrales représentent le moment dipolaire à l'instant t_0 .

On écrira donc :

$$\Phi(M, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{p}(t_0)}{r^2} + \frac{\vec{u}_r \cdot \dot{\vec{p}}(t_0)}{rc} \right) \quad (\text{G.3})$$

On peut remarquer que le 3^e terme dans le développement de Φ n'est pas présent dans le cas statique et est donc caractéristique du rayonnement.

Pour le potentiel-vecteur, on aura :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_D \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - r_i/c)}{r_i} dV$$

Comme précédemment, pour les problèmes de rayonnement, on peut se contenter pour \vec{A} du 1^{er} ordre en r pour le développement. On obtient alors :

$$\vec{A}(M, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_D \vec{J}(\vec{r}', t_0) dV$$

puis :

$$\vec{A}(M, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}(t_0)}{r} \quad (\text{G.4})$$

Calcul des champs dans la zone de rayonnement

On se s'intéresse qu'aux champs qui varient plus lentement que les champs statiques, c'est-à-dire aux champs qui varient comme $1/r$. On négligera systématiquement les termes en $1/r^2, 1/r^3, \dots$. Après calculs, on obtient :

$$\vec{E}(M, t) \approx \frac{\mu_0 \ddot{\vec{p}}(t_0)}{4\pi} \frac{\sin(\theta)}{r} \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) \approx \frac{\mu_0 \ddot{\vec{p}}(t_0)}{4\pi c} \frac{\sin(\theta)}{r} \vec{u}_\phi \quad (\text{G.5})$$

Remarque 1 : On retrouve que les champs \vec{E} et \vec{B} ont localement une structure d'onde plane, comme pour tous les phénomènes de rayonnement.

Remarque 2 : Dans ce paragraphe, on a fait un développement multipolaire des potentiels retardés pour trouver les champs qui sont source d'un rayonnement, à l'ordre le plus bas en r'/r . On trouve qu'il s'agit de

moment dipolaire électrique, aussi bien pour \vec{E} que pour \vec{B} . Un monopôle électrique, tel que présent dans (G.3), ne rayonne pas. On en déduit par exemple qu'une sphère chargée, dont le rayon varie, ne rayonne pas, ce qui n'est peut-être pas intuitif¹.

Remarque 3 : Si le moment dipolaire électrique \vec{p} est nul, il n'y a pas de rayonnement dipolaire et on doit alors aller à l'ordre suivant en r'/r . Ce terme est en deux parties : l'une est liée au moment dipolaire magnétique de la distribution, l'autre à son moment quadrupolaire électrique.

G.2.2 Puissance rayonnée à grande distance

Le vecteur de **Poynting** s'écrit alors :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \approx \frac{\mu_0}{16 \pi^2 c} [\ddot{p}(t_0)]^2 \frac{\sin^2(\theta)}{r^2} \vec{u}_r \quad (\text{G.6})$$

En intégrant à travers une sphère de rayon r , on obtient finalement la puissance totale rayonnée par la distribution :

$$\mathcal{P}_{ray} \approx \frac{\mu_0}{6 \pi c} [\ddot{p}(t_0)]^2 \quad (\text{G.7})$$

G.3 Quelques développements théoriques pour la modélisation des antennes

Pour l'étude du fonctionnement des antennes, quatre grands théorèmes fondamentaux ou principes sont utilisés :

1. Le théorème d'équivalence
2. La théorie des images
3. Le principe de Babinet
4. Le théorème de réciprocité de **Lorentz**

Ils sont décrits dans la suite de ce paragraphe.

G.3.1 Théorème d'équivalence

La démonstration rigoureuse de ce théorème est récente car elle se fait à l'aide de la théorie des distributions. Ayant été pressenti initialement en optique par Huygens et Fresnel, il est parfois connu sous le nom de principe de *Huygens-Fresnel*.

On considère des champs \vec{E} et \vec{B} créés par des sources localisées dans l'espace. On sépare l'espace en deux domaines par une surface fictive (S), appelée *surface de Huygens* : à l'extérieur le champ électromagnétique est (\vec{E}_0, \vec{B}_0) . A l'intérieur, on impose un champ nul (cf Figure G.4).

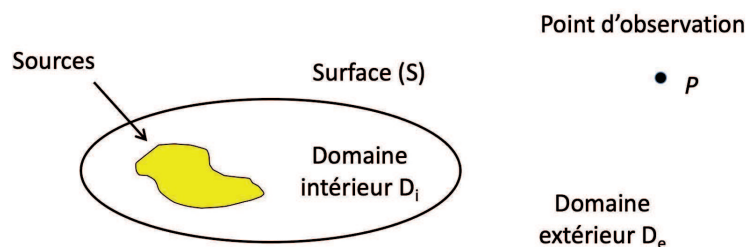


FIGURE G.4 – Domaines intérieur D_i et extérieur D_e du théorème d'équivalence (voir texte).

1. Le champ est alors constant et vaut $Q/(4 \pi \epsilon_0) \vec{u}_r$.

On note $U(M)$ la fonction caractéristique associée à l'espace extérieur aux sources : $U(M) = 1$ si $M \in D_e$ et $U(M) = 0$ si $M \in D_i$. A l'aide de ces notations, on peut écrire le champ dans tout l'espace sous la forme :

$$\vec{E}(M, t) = U(M) \vec{E}_0(M, t) \quad \text{et} \quad \vec{H}(M, t) = U(M) \vec{H}_0(M, t) \quad (\text{G.8})$$

En dehors des sources, le champ vérifie :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{G.9})$$

Pour évaluer les champs \vec{E} et \vec{H} à l'aide de ces deux relations, il faut utiliser la théorie des distributions car on passe brutalement de la zone de champ nul à la zone de champ non nul.

On écrira donc :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(M) = U(M) (\vec{\nabla} \times \vec{E}_0(M)) + \vec{n} \times (\delta\Sigma \Delta \vec{E}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{H}(M) = U(M) (\vec{\nabla} \times \vec{H}_0(M)) + \vec{n} \times (\delta\Sigma \Delta \vec{H}) \end{cases} \quad (\text{G.10})$$

où :

- $\Delta \vec{E}$ et $\Delta \vec{H}$: sauts de \vec{E} et \vec{H} en tout point M de la surface (S) .
- $\delta(\Sigma)$: distribution associée à tout point M de la surface (S) .
- \vec{n} : normale sortante de la surface (S) .

Le champ électromagnétique est nul du côté interne de la surface (S) et vaut (\vec{E}_0, \vec{H}_0) juste à l'extérieur de (S) . On peut donc écrire que :

$$\delta\Sigma \Delta \vec{E} = \delta\Sigma \vec{E}_0(M) \quad \text{et} \quad \delta\Sigma \Delta \vec{H} = \delta\Sigma \vec{H}_0(M) \quad (\text{G.11})$$

En utilisant (G.11), et en injectant (G.9) dans (G.10)

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E}(P) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}(P)}{\partial t} + \delta\Sigma \vec{n} \times \vec{E}_0(P) \\ \vec{\nabla} \times \vec{H}(P) = -\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(P)}{\partial t} + \delta\Sigma \vec{n} \times \vec{H}_0(P) \end{cases} \quad (\text{G.12})$$

En comparant (G.9) et (G.12), on voit que tout se passe comme si les champs dans le domaine extérieur D_e étaient dus à des courants équivalents :

$$\vec{J}_e = \delta\Sigma \vec{n} \times \vec{H}_0(M) \quad \text{et} \quad \vec{J}_m = -\delta\Sigma \vec{n} \times \vec{E}_0(M) \quad (\text{G.13})$$

La connaissance des champs sur la frontière (S) permet de connaître le champ en tout point du milieu extérieur. On peut traiter le problème en considérant le rayonnement des sources équivalentes \vec{J}_e et \vec{J}_m .

Remarque 1 : Noter que les courants \vec{J}_e et \vec{J}_m sont des courants liés, qui n'ont pas d'existence réelle. Ils ne sont à considérer que comme des artifices de calcul.

Remarque 2 : En toute rigueur, pour appliquer le principe d'équivalence, il faut que la surface de Huygens soit fermée. Son application à des surfaces ouvertes amène parfois des résultats éloignés de la réalité.

Pour de nombreuses antennes (métalliques la plupart du temps), il est possible de connaître une expression analytique des champs proches de la surface. On utilise alors le théorème d'équivalence pour en déduire le rayonnement de ces antennes, même si les surfaces ne sont pas fermées. On est souvent amené à agir ainsi car il s'agit souvent de la seule façon d'obtenir une expression analytique des champs rayonnés.

G.3.2 Théorème des images

Ce théorème permet une simplification du calcul des champs, dès lors qu'on peut supposer la présence d'un plan infini parfaitement conducteur.

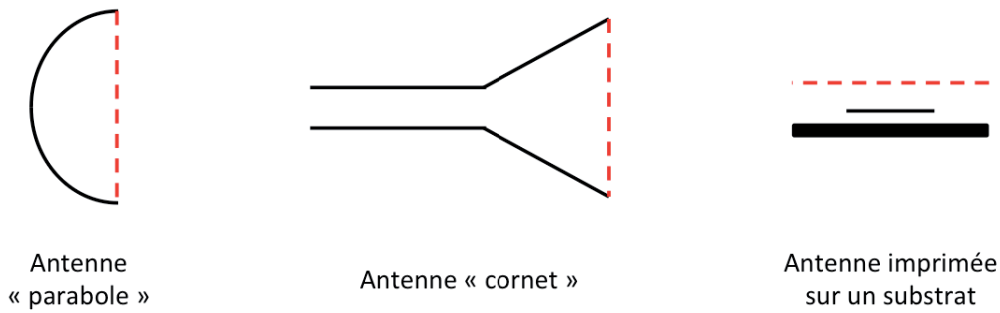


FIGURE G.5 – Exemple de quelques surfaces de Huygens (en pointillés) proches d’une antenne.

Théorème des images en électrostatique

On a vu (§ 2.3.2) que la méthode des images (cf Figure G.6) permet de trouver rapidement le champ d’une charge en présence d’un plan infini parfaitement conducteur.

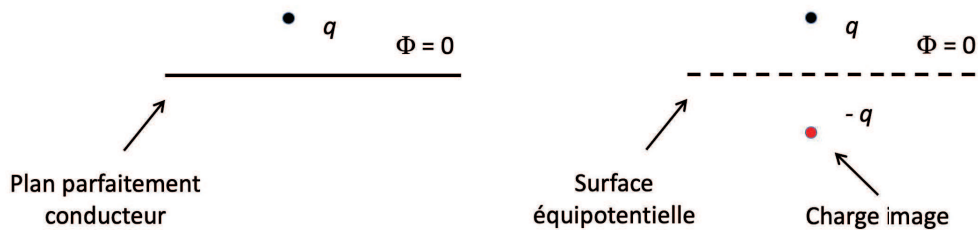


FIGURE G.6 – La méthode des images permet d’obtenir facilement le champ \vec{E} en présence d’un plan infini parfaitement conducteur.

Théorème des images en optique géométrique

Une réflexion totale sur un plan parfaitement conducteur suit la loi de Descartes : tout se passe comme si le rayonnement était émis depuis le point image M' en direction du point P (cf Figure G.7).

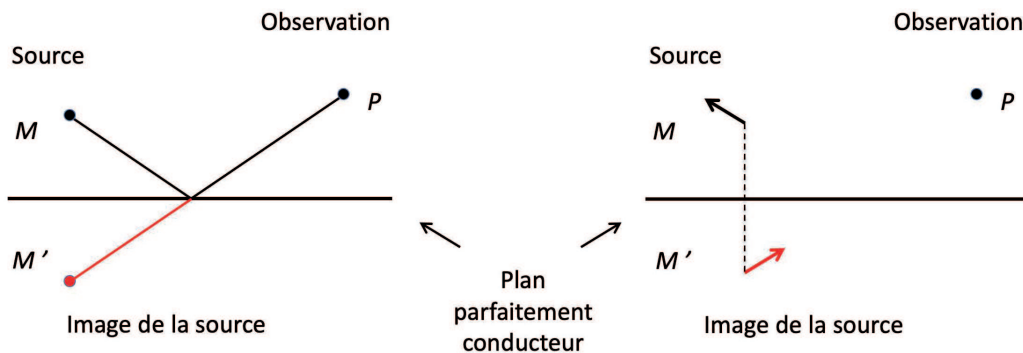


FIGURE G.7 – Image d’une source ponctuelle (à gauche) et d’un courant (à droite) sur un plan parfaitement conducteur.

On a vu au § 1.7.2 que la composante tangentielle de \vec{E} se réfléchit en changeant de signe, tandis que la composante normale de \vec{E} se réfléchit sans changer de signe. La conséquence de ceci est que l’image d’un élément de courant parallèle au plan conducteur est un élément de courant au point image M' orienté en

sens opposé, alors que l'image d'un élément de courant normal au plan sera dans le même sens que la source (cf Figure G.7).

Théorème des images en électromagnétisme

Historiquement, de nombreuses propriétés électromagnétiques ont été d'abord étudiées par le biais de l'optique. L'optique géométrique étant la limite asymptotique des équations de Maxwell à la limite des hautes fréquences, les propriétés des images qu'on vient de rappeler sont valables en champ lointain.

On pourrait également montrer que le théorème des images reste également valable en champ proche.

G.3.3 Théorème de Babinet

Principe de Babinet en optique géométrique

Le principe de Babinet de l'optique géométrique stipule que si, entre une source ponctuelle et un écran d'observation, on interpose successivement deux écrans complémentaires l'un de l'autre, la somme des champs observés est égale au champ obtenu en l'absence de tout écran (cf Figure G.8).

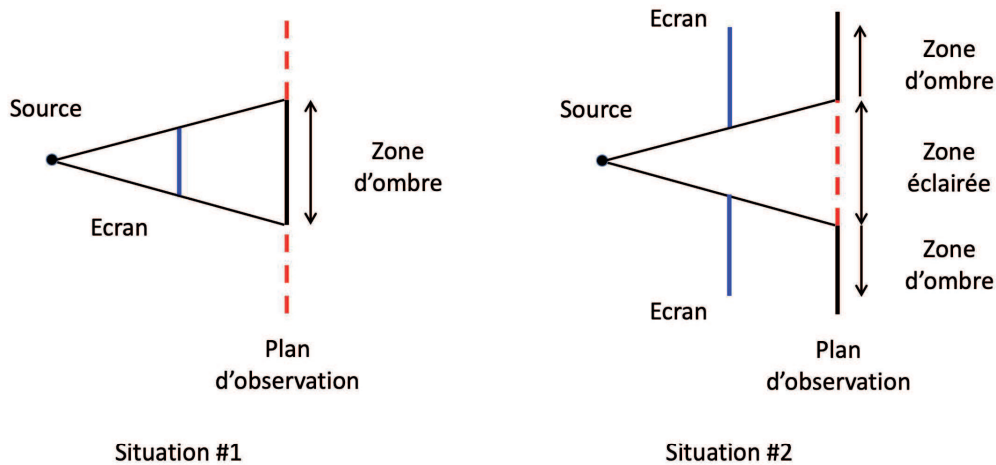


FIGURE G.8 – Le principe de Babinet en optique géométrique stipule que la somme des champs sur le plan d'observation mesurés lors des situations #1 et #2 correspond au champ observé en l'absence d'écran intermédiaire.

Théorème de Babinet en électromagnétisme

On considère une source de champs électromagnétique qui provoque en un point P , en l'absence de tout obstacle, des champs \vec{E}_i et \vec{H}_i (cf Figure G.9). On considère désormais un objet de dimension quelconque qui modifie le champ électromagnétique reçu par le point P . On note \vec{E}_T et \vec{H}_T les champs totaux au point P en présence de l'obstacle.

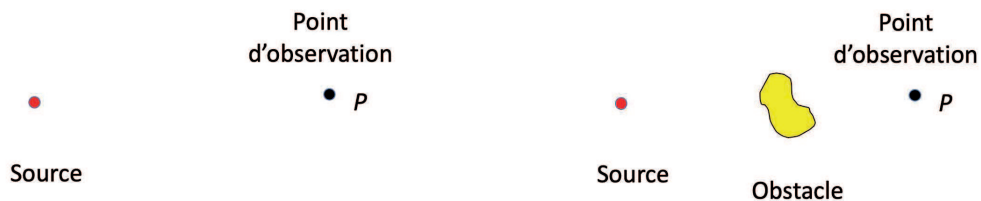


FIGURE G.9 – Un obstacle de dimension quelconque entre la source et le point d'observation y modifie la valeur du champ électromagnétique.

Comme en optique géométrique, on peut définir le champ diffracté par l'objet (noté \vec{E}_D et \vec{H}_D). Il est défini en tout point de l'espace par :

$$\vec{E}_T = \vec{E}_i + \vec{E}_D \quad \text{et} \quad \vec{H}_T = \vec{H}_i + \vec{H}_D$$

et traduit la perturbation au champ électromagnétique généré par la présence de l'objet entre la source et le point P .

On considère une ouverture (Σ) dans un plan infini, parfaitement conducteur, illuminé par une onde électromagnétique. La surface (Σ) peut être, comme sur la Figure G.10, constituée de plusieurs surfaces différentes (un cercle et un rectangle ici).

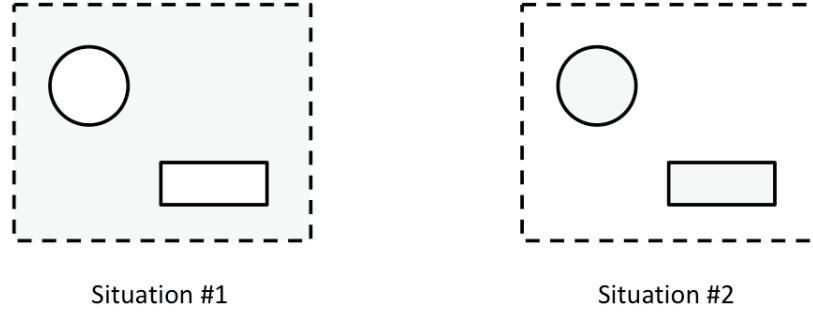


FIGURE G.10 – Le théorème de Babinet relie le champ électromagnétique derrière un écran conducteur parfait (Situation #1) et derrière son complémentaire (Situation #2) (voir texte).

Le théorème de Babinet stipule, dans le demi-espace ne contenant pas les sources, les relations suivantes entre les champs totaux et diffractés :

$$\left(\vec{E}_T\right)_1 = \left(\vec{H}_D\right)_2 \quad \text{et} \quad \left(\vec{E}_D\right)_1 = \left(\vec{H}_T\right)_2 \quad (\text{G.14})$$

Cette relation permet de relier le rayonnement de structures en apparence très différentes. Dans l'exemple de la Figure G.10, on en déduit que le champ \vec{E} rayonné à travers les orifices de la situation #1 est le même que le champ \vec{H} rayonné à travers les deux surfaces de la situation #2.

G.3.4 Théorème de réciprocité de Lorentz

On considère deux milieux (1) et (2), où des sources \vec{J}_i ($i = 1$ ou 2) produisent des champs \vec{E}_i et \vec{H}_i . Si on considère des milieux lhi pour lesquels $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ et $\vec{B} = \mu \vec{H}$, on pourra écrire :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = i\omega\mu \vec{H}_1 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H}_1 = \vec{J}_1 + \frac{\partial \vec{D}_1}{\partial t} = \vec{J}_1 - i\omega\epsilon \vec{E}_1$$

et les mêmes formes pour les champs du milieu (2).

En suivant un raisonnement proche de celui ayant amené au théorème de **Poynting** (§ 1.4.1), on cherche à calculer $\vec{\nabla} \cdot \vec{X}$ où $\vec{X} = \vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1$. On obtient :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{X} &= \vec{H}_2 \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}_1) - \vec{E}_1 \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}_2) - \vec{H}_1 \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}_2) + \vec{E}_2 \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}_1) \\ &= \vec{H}_2 \cdot (i\omega\mu \vec{H}_1) - \vec{E}_1 \cdot (\vec{J}_2 - i\omega\epsilon \vec{E}_2) - \vec{H}_1 \cdot (i\omega\mu \vec{H}_2) + \vec{E}_2 \cdot (\vec{J}_1 - i\omega\epsilon \vec{E}_1) \\ &= \vec{E}_2 \cdot \vec{J}_1 - \vec{E}_1 \cdot \vec{J}_2 \end{aligned}$$

On intègre cette dernière relation sur un volume (V), séparé du milieu extérieur par une surface (S). Il reste :

$$\iiint_{(V)} (\vec{E}_2 \cdot \vec{J}_1 - \vec{E}_1 \cdot \vec{J}_2) dV = \oint_{(S)} (\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1) \cdot d\vec{S} \quad (\text{G.15})$$

Cette relation est connue sous le nom de *Théorème de réciprocité de Lorentz*.

Un cas particulier important correspond à un volume qui tend vers l'espace entier (la surface (S) est alors rejetée à l'infini). Dans ce cas, si les charges sont localisées dans une zone finie de l'espace, l'intégrale surfacique de (G.15) est nulle. On en déduit que :

$$\iiint_{(V_2)} \vec{E}_1 \cdot \vec{J}_2 dV = \iiint_{(V_1)} \vec{E}_2 \cdot \vec{J}_1 dV \quad (\text{G.16})$$

où les intégrations se limitent aux volumes (V_i) sur lesquels les courants sont non nuls.

On en déduit une propriété fondamentale des antennes : le diagramme de rayonnement est identique à l'émission ou à la réception pour tout élément rayonnant passif au comportement linéaire et réciproque.

Remarque : Les champs s'annulent également sur la surface (S) de (G.15) si (S) est parfaitement conductrice puisqu'on a alors d'après les relations de passage dans un modèle surfacique et en notant \vec{n} une normale sortante du conducteur :

$$\vec{n} \times \vec{E}_i = \vec{0} \quad \text{soit} \quad (\vec{E}_1 \times \vec{H}_2) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{et} \quad (\vec{E}_2 \times \vec{H}_1) \cdot \vec{n} = 0$$

Table des matières

A	Rappels mathématiques	1
A.1	Formes différentielles	1
A.2	Outils mathématiques	3
A.3	Systèmes de coordonnées	7
A.4	Compléments sur les opérateurs	9
A.5	Résolution de l'équation de Bessel	10
A.6	Quelques notions sur l'analyse de Fourier	12
B	Electromagnétisme hors système MKSA	15
I	Théorie électromagnétique dans le vide	17
1	Electromagnétisme & équations de Maxwell	19
1.1	Distributions de charge et de courant	19
1.2	Equations de Maxwell dans le vide	22
1.3	Potentiels en électromagnétisme	24
1.4	Champ électromagnétique	28
1.5	Régimes particuliers de l'électromagnétisme	34
1.6	Invariances et symétries du champ électromagnétique	35
1.7	Relations de continuité du champ électromagnétique	40
2	Electrostatique	45
2.1	Loi de Coulomb, champs et potentiels en électrostatique	46
2.2	Théorème de Gauss et équations de l'électrostatique	53
2.3	Méthodes de calcul en électrostatique	55
2.4	Aspects énergétiques liés à l'électrostatique	59
2.5	Dipôles électrostatiques	65
3	Magnétostatique	75
3.1	Action du champ magnétique	76
3.2	Loi de Biot et Savart	79
3.3	Théorème d'Ampère et équations de la magnétostatique	82
3.4	Méthodes de calcul en magnétostatique	85
3.5	Travail mécanique des forces de Laplace	86

3.6	Dipôles magnétiques	88
4	Induction électromagnétique	95
4.1	Force électromagnétique d'induction	95
4.2	Théorie de l'induction électromagnétique	96
4.3	Auto-induction et induction mutuelle	104
4.4	Energie magnétique	107
4.5	Les courants de Foucault	111
C	Illustrations des Chapitres 1 à 4	115
C.1	Exemples de l'action d'un champ électrique	115
C.2	Exemples de l'action d'un champ magnétique	119
C.3	Champ magnétique terrestre	126
C.4	Exemples d'application de l'induction électromagnétique	127
D	Compléments des Chapitres 1 à 4	133
D.1	Détermination des équations de Maxwell à l'aide du principe de moindre action	133
D.2	Electromagnétisme et changements de référentiel galiléen	137
D.3	Résolution des équations de Maxwell	140
D.4	Magnétostatique et charges isolées	144
D.5	Variation du flux à travers un circuit en mouvement	145
II	Modélisation de la matière	149
5	Milieux diélectriques	151
5.1	Sources microscopiques de la polarisation en régime statique	152
5.2	Etude macroscopique de la polarisation en régime statique	155
5.3	Susceptibilité électrique	169
5.4	Polarisation en régime variable	172
5.5	Aspects énergétiques des milieux diélectriques : le travail de polarisation	183
6	Milieux conducteurs	185
6.1	Conducteurs en équilibre électrostatique	185
6.2	Propriétés de l'espace entre conducteurs à l'équilibre électrostatique	189
6.3	Capacités et aspects énergétiques	193
6.4	Quelques éléments d'électrocinétique	195
7	Milieux magnétiques	199
7.1	Sources microscopiques de l'aimantation en régime statique	200
7.2	Etude macroscopique de l'aimantation en régime statique	202
7.3	Les divers types de milieu magnétiques	210
7.4	Aimantation en régime variable	222
7.5	Aspects énergétiques des milieux magnétiques : le travail d'aimantation	223
8	Electrodynamique dans les milieux	225

8.1	Equations de Maxwell	225
8.2	Une nouvelle forme pour u et \vec{R} à partir des charges libres	227
8.3	Energie et quantité de mouvement du champ	228
E	Compléments des Chapitres 5 à 8	231
E.1	Réponse d'un milieu à une excitation selon sa géométrie	231
E.2	Relations de Kramers-Kronig	233
E.3	Complément sur l'énergie associée aux milieux diélectriques	234
E.4	Complément sur l'énergie associée aux milieux magnétiques	239
E.5	Complément d'électrodynamique dans les milieux	241
III	Interaction lumière-matière	245
9	Systèmes rayonnants	247
9.1	Rayonnement dipolaire électrique	248
9.2	Rayonnement dipolaire magnétique	260
9.3	Rayonnement d'une antenne	263
G	Compléments des Chapitres 9 à 11	273
G.1	Diffusion de Mie	273
G.2	Rayonnement d'une distribution quelconque	274
G.3	Quelques développements théoriques pour la modélisation des antennes	276