

Troisième partie

Interaction lumière-matière



# Chapitre 9

## Systèmes rayonnants

### Sommaire

---

9.1 Rayonnement dipolaire électrique . . . . .	248
9.2 Rayonnement dipolaire magnétique . . . . .	260
9.3 Rayonnement d'une antenne . . . . .	262

---

### Introduction

Ce chapitre traite la théorie du rayonnement de manière classique. Les aspects relativistes seront vus dans le cours de relativité restreinte, en particulier le rayonnement dû à des charges en mouvement.

Jusqu'à maintenant, on a étudié la propagation des ondes électromagnétiques sans se préoccuper de leur production. On va voir dans ce chapitre qu'elles sont créées à partir de charges en mouvement et que lorsqu'une charge est accélérée, les champs peuvent transporter de l'énergie de manière irréversible jusqu'à l'infini. Ce processus est appelé *rayonnement*. En supposant par simplicité une charge localisée à l'origine, la puissance  $\mathcal{P}$  passant à travers la surface d'une sphère de rayon  $r$  est :

$$\mathcal{P}(r, t) = \frac{1}{\mu_0} \oint (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S}$$

Comme les champs dépendent des sources à l'instant retardé  $t' = t - r/c$ , cette énergie a quitté la source à l'instant  $t'$ , donc la puissance rayonnée vaut :

$$\mathcal{P}_{ray} = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{P}\left(r, t' + \frac{r}{c}\right)$$

La sphère centrée sur l'origine a pour surface  $4\pi r^2$ . Pour qu'il existe une puissance rayonnée, le vecteur de **Poynting**  $\vec{R}$  ne doit pas décroître plus vite que  $1/r^2$  (au minimum pour les grandes valeurs de  $r$ ).

Dans le cas statique, les lois de **Coulomb** et **Biot** et **Savart** indiquent que  $\vec{R} \propto 1/r^4$ . Les sources statiques ne peuvent donc pas rayonner. Le rayonnement sera donc dû à des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  qui décroissent plus lentement que  $1/r^2$ .

On fera une étude du rayonnement dans le vide. La généralisation à des milieux matériels linéaires et isotropes se fera en remplaçant la vitesse de la lumière par  $c/n$  pour un milieu d'indice  $n$ .

## 9.1 Rayonnement dipolaire électrique

### 9.1.1 Dipôle de Hertz

D'après la magnétostatique, une portion de conducteur isolée dans l'espace et parcourue par un courant est impossible. Néanmoins, sur le plan du rayonnement, c'est un modèle utile (cf Figure 9.1) car la suppression d'un blindage entre  $N$  et  $P$  est équivalente sur le plan du rayonnement à une portion de conducteur  $NP$  qui participe seule au rayonnement.

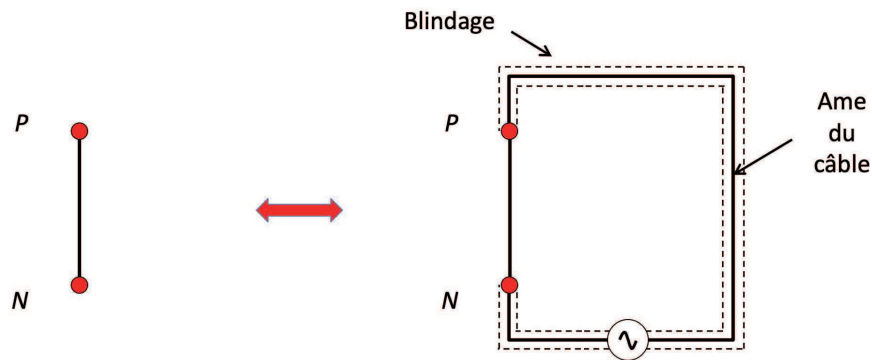


FIGURE 9.1 – Une portion de conducteur  $NP$  isolée dans l'espace est impossible en magnétostatique mais c'est un modèle utile pour l'étude du rayonnement (voir texte).

On pourrait montrer que la portion de conducteur  $NP$  isolée de la Figure 9.1, parcourue par le courant  $I_0 \cos(\omega t)$ , est équivalente, sur le plan du rayonnement, à un doublet de charges, séparées par une distance  $a$  petite devant la distance d'observation (cf Figure 2.12). On appellera *dipôle de Hertz* ce doublet de charges si elles varient de manière sinusoïdale au cours du temps :

$$q(t) = q_m \cos(\omega t) \quad (9.1)$$

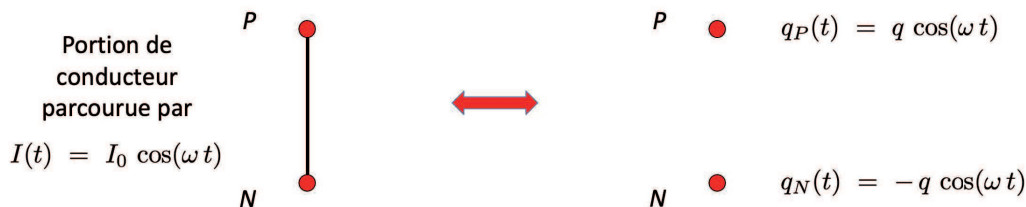


FIGURE 9.2 – Une portion de conducteur parcourue par un courant oscillant (à gauche) est équivalente, sur le plan du rayonnement, à deux charges ponctuelles dont la charge oscille dans le temps (à droite).

En utilisant un modèle complexe, on posera :

$$q(t) = q_m \exp(-i\omega t) \quad \text{et} \quad p(t) = p_m \exp(-i\omega t) \quad (9.2)$$

où  $p_m = a q_m$  représente l'amplitude à l'instant  $t$  du moment dipolaire électrique. Le lien entre le courant  $I(t)$  qui circule sur  $NP$  et les charges du dipôle de **Hertz** est donné par (cf Figure 9.3) :

$$I = \frac{dq}{dt} = I_m \exp(-i\omega t) \quad \text{avec} \quad I_m = -\frac{i\omega p_m}{a} \quad (9.3)$$

Ce n'est pas une situation physique réelle, mais c'est un modèle simple qui permet de déterminer facilement les effets de la portion de conducteur  $NP$  parcourue par un courant sinusoïdal. En particulier :

1. Il permet d'interpréter le rayonnement électromagnétique à l'aide du mouvement d'oscillation de charges électriques autour de leur position moyenne.

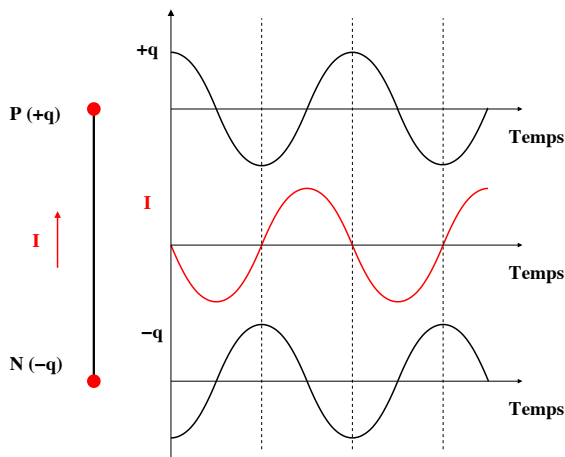


FIGURE 9.3 – Un dipôle oscillant est équivalent, sur le plan du rayonnement, à un courant sinusoïdal circulant sur la portion de conducteur  $NP$ .

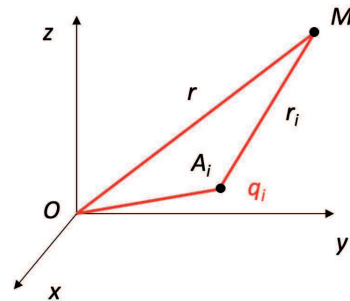


FIGURE 9.4 – Le potentiel  $\Phi$  en  $M$  est dû à l'ensemble des charges  $q_i$  qui se situent aux points  $A_i$  au sein de la distribution de charges. On suppose  $OA_i \ll r_i$  et  $OA_i \ll r$  (voir texte).

2. Le champ rayonné par une antenne peut se ramener au champ créé par la superposition d'un ensemble de dipôles oscillants répartis le long de l'antenne.
3. La variation harmonique (ie à  $\omega$  fixé) du dipôle de **Hertz** ne restreint pas la généralité de l'étude car toute évolution temporelle peut se décomposer en série de Fourier.

## 9.1.2 Calcul des potentiels et des champs

### Une approximation supplémentaire

On a vu au § 1.3.4 l'expression des potentiels de **Liénard-Wiechert**, correspondant aux potentiels  $\vec{A}$  et  $\Phi$  observés en  $M$ , créés par une charge en mouvement. On supposera qu'au sein de la distribution de charges, les charges  $q_i$  sont animées de la vitesse  $\vec{v}_i$ . On en déduit, en reprenant les notations de la Figure 9.4 :

$$\Phi(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \left[ \frac{q_i}{r_i - (\vec{v}_i \cdot \vec{r}_i)/c} \right]_{t-r_i/c} \quad \text{et} \quad \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \left[ \frac{q_i \vec{v}_i}{r_i - (\vec{v}_i \cdot \vec{r}_i)/c} \right]_{t-r_i/c} \quad (9.4)$$

où on a supposé que l'origine  $O$  se situait au sein de la distribution de charges. La difficulté dans l'emploi de ces formules est que toutes ces quantités doivent être calculées aux instants retardés  $t - r_i/c$  et que chaque terme dépend du mouvement individuel des charges  $q_i$ .

On effectue une hypothèse supplémentaire pour contourner la difficulté d'utilisation des termes en  $t - r_i/c$ . En notant  $d$  l'ordre de grandeur de l'extension spatiale de la distribution (« centrée » sur  $O$ ) et  $T$  le temps d'évolution typique (ie la période pour un mouvement périodique), on a lors pour chaque charge  $q_i$  :

$$|r_i - r| \ll d \quad \text{ou encore} \quad |(t - r/c) - (t - r_i/c)| \ll d/c$$

c'est-à-dire que les différents instants retardés diffèrent entre eux au maximum de  $d/c$ . Donc si  $d/c \ll T$ , on pourra négliger ces décalages et remplacer l'instant retardé propre à chaque charge par l'instant retardé commun à toutes les charges  $t - r/c$ . Cette nouvelle condition est également équivalente à  $d \ll cT = \lambda$  pour une oscillation sinusoïdale ou à  $v_i \ll c$  puisque  $d/T$  est l'ordre de grandeur de la vitesse des charges.

Pour l'étude des systèmes rayonnants, en plus de l'approximation dipolaire ( $r \gg d$ ), on utilisera l'*approximation non relativiste* :

$$\frac{d}{c} \ll T \quad \text{ou} \quad d \ll \lambda \quad \text{ou} \quad v_i \ll c \quad (9.5)$$

## Calcul des potentiels

A l'aide de l'approximation dipolaire et de l'approximation non relativiste, on calcule  $\vec{A}$  selon (9.4) en remplaçant  $t - r_i/c$  par  $t' = t - r/c$ . Au dénominateur, on remplace  $r_i$  par  $r$  et on néglige les termes en  $v_i/c$ . On obtient alors :

$$\vec{A}(M, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \left[ \frac{q_i \vec{v}_i}{r} \right]_{t'=t-r/c} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \sum q_i \vec{v}_i(t') \quad (9.6)$$

Le moment dipolaire de la distribution de charges (à l'instant  $t'$ ) en  $O$  s'écrit  $p(t') = \sum_i q_i \vec{OA}_i(t')$ . De plus :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{d\vec{p}}{dt'} \quad \text{puisque} \quad t' = t - \frac{r}{c}$$

dont on déduit :

$$\vec{p}' = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt'} \left( \sum_i q_i \vec{OA}_i(t') \right) = \sum_i q_i \vec{v}_i(t')$$

où  $\vec{p}' = d\vec{p}/dt$  est la dérivée temporelle du moment dipolaire. Finalement, en comparant avec (9.6), on obtient :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{p}'}{r} \quad (9.7)$$

Si la charge totale de la distribution est nulle, après quelques calculs un peu plus pénibles, on montre que le potentiel scalaire  $\Phi$  se met sous la forme :

$$\Phi(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cos(\theta) \left[ \frac{p}{r^2} + \frac{p'}{rc} \right]_{t'=t-r/c} \quad (9.8)$$

Les deux expressions (9.7) et (9.8) sont les *potentiels retardés* du dipôle électrique oscillant, dans lesquels le terme en  $p$  correspond au potentiel du dipôle électrostatique tandis que le potentiel en  $p'$  est caractéristique du rayonnement. La Figure 9.5 représente la variation spatiale des potentiels  $\Phi$  et  $\vec{A}$ . On y voit <sup>1</sup> :

- que la distance entre le centre du dipôle et les sphères marquées  $V(+)$  et  $V(-)$  est proportionnelle à la valeur de  $\Phi$  pour les angles  $\theta$  et  $\phi$  correspondants : le potentiel scalaire est maximum aux pôles et s'annule sur l'équateur (l'effet des charges  $-q$  et  $+q$  s'y annule). On remarque que  $\Phi$  est positif dans l'hémisphère nord (où l'influence de la charge  $+q$  est prédominante) et négatif dans l'hémisphère sud.
- que le potentiel-vecteur  $\vec{A}$  est indépendant des angles  $\theta$  et  $\phi$ .

## Calcul des champs

En reprenant les notations de la Figure 9.6, à l'aide de la définition des potentiels en fonction des champs (E.39), on montre sans difficulté que le champ magnétique  $\vec{B}$  s'écrit :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 \sin(\theta)}{4\pi} \left[ \frac{p'}{r^2} + \frac{p''}{rc} \right]_{t'=t-r/c} \vec{u}_\phi \quad (9.9)$$

De la même manière, on obtient par un calcul un peu plus pénible l'expression du champ électrique  $\vec{E}$  :

$$\vec{E}(M, t) = \begin{cases} E_r &= \frac{2 \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{p}{r^3} + \frac{p'}{r^2 c} \right]_{t'=t-r/c} \\ E_\theta &= \frac{\sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{p}{r^3} + \frac{p'}{r^2 c} + \frac{p''}{r c^2} \right]_{t'=t-r/c} \\ E_\phi &= 0 \end{cases} \quad (9.10)$$

1. Attention, dans cete représentation, le moment dipolaire est centré autour de l'origine, tandis qu'il "démarré" en  $O$  sur la Figure 9.6.

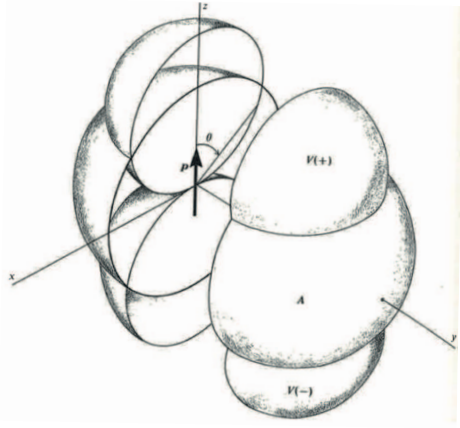


FIGURE 9.5 – Répartition spatiale des potentiels scalaires ( $V$ ) et vecteurs ( $\vec{A}$ ) associés à des charges en mouvement (Figure extraite de [1]).

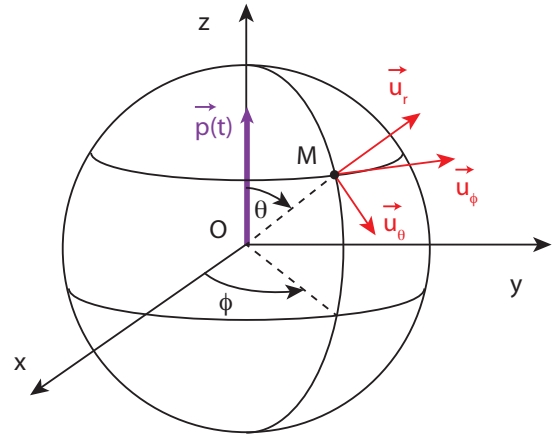


FIGURE 9.6 – Géométrie utile pour le calcul des potentiels créés par le dipôle oscillant. Le dipôle est porté par l'axe ( $Oz$ ).

Dans les relations (9.9) et (9.10), le 1<sup>er</sup> terme représente le champ en l'absence de rayonnement, et le 2<sup>e</sup> est dû au retard temporel  $r/c$  et traduit l'effet du rayonnement.

On notera que  $\vec{B}$  est dans la direction  $\vec{u}_\phi$  et que  $\vec{E}$  est contenu dans le plan  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ . D'après (9.9) et (9.10),  $\vec{B}$  et  $\vec{E}$  s'expriment uniquement en fonction de termes proportionnels à  $p/r^3$ ,  $p'/(r^2 c)$  et  $p''/(r c^2)$ . Si l'on suppose une dépendance sinusoïdale en  $p(t') = p_0 \cos(\omega t')$ , on a  $p'(t') = -p_0 \omega \sin(\omega t')$  et  $p''(t') = -p_0 \omega^2 \cos(\omega t')$ . Les amplitudes des trois termes en  $p/r^3$ ,  $p'/(r^2 c)$  et  $p''/(r c^2)$  sont alors respectivement :

$$\frac{p_0}{r^3} \quad \frac{p_0 \omega}{r^2 c} = \frac{p_0}{r^2} \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \frac{p_0}{r^3} \left(\frac{r}{\lambda}\right) \quad \frac{p_0 \omega^2}{r c^2} = \frac{p_0}{r} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = 4\pi^2 \frac{p_0}{r^3} \left(\frac{r}{\lambda}\right)^2 \quad (9.11)$$

En utilisant ceci et l'expression (9.10) de  $\vec{E}$ , on définit naturellement trois zones selon les valeurs relatives de  $r$  et  $\lambda$  :

- la *zone statique* pour laquelle  $r \ll \lambda$ . Les termes en  $r/\lambda$  et  $(r/\lambda)^2$  y sont négligeables ou, de manière équivalente, les termes en  $p'$  et  $p''$  y sont négligeables.
- la *zone intermédiaire* pour laquelle  $r \approx \lambda$ . Il est difficile d'établir des expressions simples dans cette zone mais elle est très localisée dans l'espace et présente donc peu d'intérêt.
- la *zone de rayonnement* pour laquelle  $r \gg \lambda$  pour laquelle les termes en  $(r/\lambda)^2$  (ou en  $p''$ ) sont prépondérants.

### 9.1.3 Champ de rayonnement

#### Définition

On appelle *champs de rayonnement du dipôle* ou *champs lointains* les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dans la zone de rayonnement. Pour des angles  $\theta$  différents de 0, ces champs de rayonnement s'expriment finalement selon :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p'' \sin(\theta)}{r} \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p'' \sin(\theta)}{r c} \vec{u}_\phi \quad (9.12)$$

et sont représentés sur la Figure 9.7. Le point marquant de ces expressions est que le champ de rayonnement varie en  $1/r$  (alors que le champ du dipôle électrostatique varie en  $1/r^3$ ). Par contre, contrairement à l'onde sphérique, l'onde rayonnée n'est pas isotrope.

On remarque que la structure locale du champ de rayonnement est celle d'une onde plane. En particulier, on a :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\vec{u}_r \times \vec{E}(r, t)}{c} \quad (9.13)$$

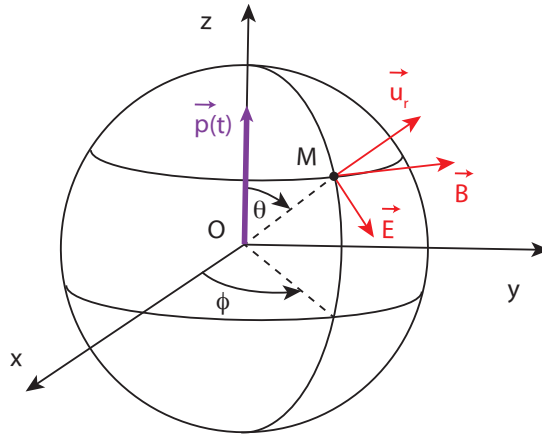


FIGURE 9.7 – Direction des champs de rayonnement du dipôle oscillant.

### Amplitude de $\vec{E}$

En prenant un modèle harmonique pour lequel  $p(t') = p_m \cos(\omega t')$ , l'amplitude  $|E_m|$  du champ de rayonnement se met sous la forme :

$$|E_m| = \frac{\mu_0}{4\pi} \omega^2 |p_m| \frac{|\sin(\theta)|}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} a I_m \frac{2\pi c}{\lambda} \frac{|\sin(\theta)|}{r} \quad (9.14)$$

en fonction de l'amplitude  $I_m$  du courant équivalent au dipôle puisque l'amplitude vérifie  $|p_m| = a I_m / \omega$  d'après (9.3). Il reste finalement :

$$|E_m| = R_{vide} \frac{I_m a |\sin(\theta)|}{2\lambda r} \quad \text{avec} \quad R_{vide} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \Omega \quad (9.15)$$

où  $R_{vide}$  représente l'impédance du vide  $R_{vide}$ . Finalement, on peut écrire dans le vide :

$$|E_m| \approx 188 I_m \frac{a}{\lambda} \frac{|\sin(\theta)|}{r} \quad (9.16)$$

### Diagramme de rayonnement

Par définition, le *diagramme polaire* ou *diagramme de rayonnement* du champ est le lieu des points pour lequel  $|E_m| = Cste$ . Il est donc de la forme  $r = Cste \times |\sin(\theta)|$ . On remarque que  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont nuls sur l'axe du dipôle et maximum dans le plan équatorial ( $\theta = \pi/2$ ).

On représente souvent le champ  $\vec{E}$  normalisé à sa valeur maximale en fonction de  $\theta$  pour  $\phi$  constant (c'est un tore de rayon intérieur nul) ou l'amplitude  $E/c$  du champ  $\vec{B}$  en fonction de  $\phi$  pour  $\theta = \pi/2$  (cf Figure 9.8 dans le cas du dipôle de **Hertz**).

### Cas des régimes stationnaires

En régime stationnaire, pour lequel  $\omega = 0$  donc  $p = p' = 0$ , (9.9) et (9.10) s'écrivent :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0}{r^3} [2 \cos(\theta) \vec{u}_r + \sin(\theta) \vec{u}_\theta] \quad \text{et} \quad \vec{B}(M) = \vec{0} \quad (9.17)$$

On retrouve le champ créé par un dipôle électrostatique.



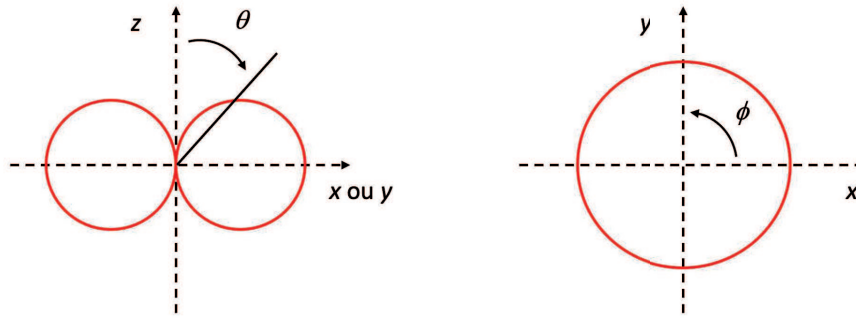


FIGURE 9.8 – Diagramme de rayonnement du champ  $\vec{E}$  (à gauche) et du champ  $\vec{B}$  (à droite) pour le dipôle de Hertz. Le moment dipolaire est orienté selon l'axe ( $Oz$ ).

### 9.1.4 Lignes de champ à grande distance

#### Lignes du champ $\vec{E}$ et surfaces $k\lambda$

Un calcul un peu pénible mais sans difficulté [1] montre que les lignes du champ  $\vec{E}$  se mettent sous la forme :

$$\sin^2 \left( \theta \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{r^2}} \right) \cos \left( \omega t - \frac{r}{\lambda} + \arctan \left( \frac{r}{\lambda} \right) \right) = k \lambda \quad (9.18)$$

où le paramètre  $k$  varie d'une ligne à l'autre et où  $\lambda = \lambda/(2\pi)$ . Pour  $r \gg \lambda$ , on a finalement :

$$\sin^2(\theta) \cos \left( \omega t - \frac{r}{\lambda} + \frac{\pi}{2} \right) = k \lambda \quad (9.19)$$

**Remarque 1 :** La Figure 9.9 représente la relation (9.18) à 3 dimensions. Au fur et à mesure que le temps augmente, l'argument du cosinus augmente et les ondulations s'éloignent de l'axe du dipôle comme une onde amortie.

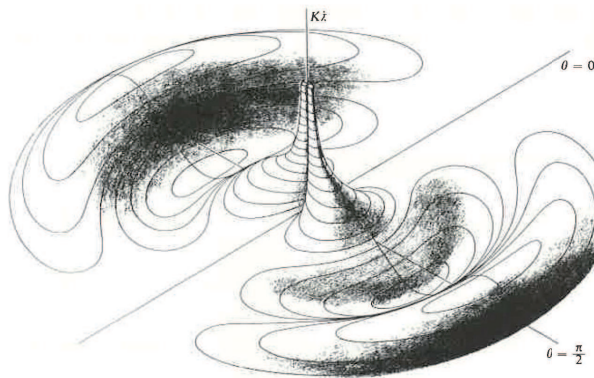


FIGURE 9.9 – Variation à 3 dimensions de  $k\lambda$  en fonction de  $r$  et  $\theta$  à  $t = 0$  pour un dipôle électrique oscillant. Le dipôle est au centre, sur l'axe  $\theta = 0$ . Lorsque  $t$  augmente, le pic central oscille de  $-\infty$  et  $+\infty$  et les ondulations se déplacent radialement. Les courbes fermées sont à la fois des lignes du champ  $\vec{E}$  et des lignes de niveau de l'amplitude de  $\vec{E}$  (Figure extraite de [1]).

**Remarque 2 :** La relation (9.19) indique que les lignes de  $\vec{E}$  se déplacent vers l'extérieur à la vitesse  $\omega\lambda = c$  dans la zone de rayonnement. Plus proche du centre, le terme en arctan de (9.18) est une fonction de  $r$  et la vitesse des lignes de champ est supérieure à  $c$ . Cet effet est bien visible sur la Figure 9.10.

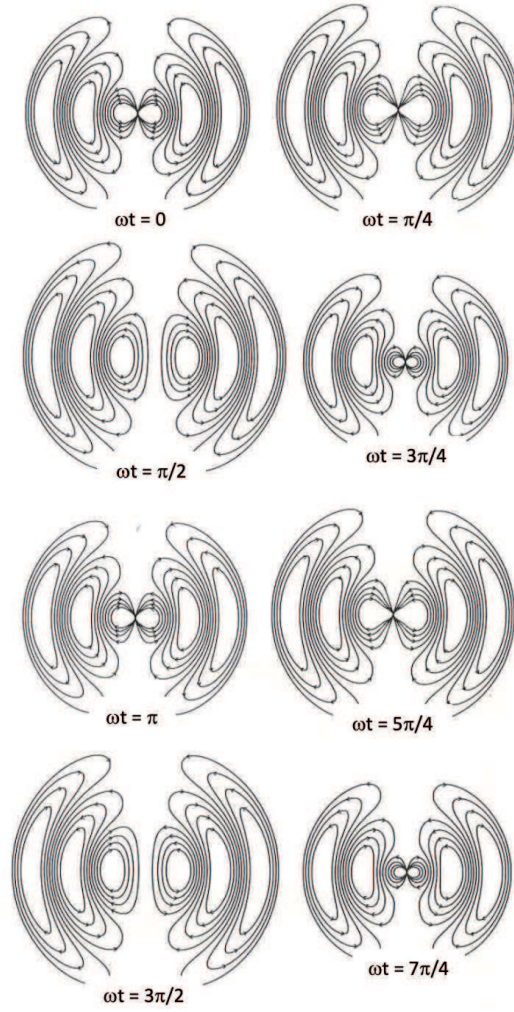


FIGURE 9.10 – Lignes de  $\vec{E}$  pour un dipôle électrique oscillant, entre les instants  $\omega t = 0$  et  $\omega t = 7\pi/4$ . Le dipôle est vertical au centre des diagrammes. On note que la longueur d'onde décroît avec la distance au centre (Figure extraite de [1]).

### Lignes du champ $\vec{B}$

Comme  $\vec{B}$  n'a de composante à grande distance que selon  $\vec{u}_\phi$ , les lignes de  $\vec{B}$  sont des cercles centrés sur l'axe du dipôle, dans un plan orthogonal.

### 9.1.5 Puissance rayonnée à grande distance

Dans la zone de rayonnement, le vecteur de **Poynting** a pour expression :

$$\vec{R}(M) = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{p''^2}{r^2 c} \sin^2(\theta) \vec{u}_r \quad (9.20)$$

qui montre que  $\vec{R}$  est radial et toujours dirigé vers l'extérieur : le dipôle rayonne de l'énergie. Dans le cas d'une oscillation harmonique en  $p(t') = p_0 \cos(\omega t')$ , on a :

$$\langle \vec{R}(M) \rangle = \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left( \frac{p_0 \omega^2 \sin(\theta)}{r} \right)^2 \vec{u}_r \quad (9.21)$$

La puissance rayonnée  $\mathcal{P}$  à grande distance s'obtient à l'aide du flux de  $\langle \vec{R} \rangle$  à travers une sphère de centre  $O$  et de rayon  $r$  :

$$\mathcal{P} = \oint_{(S)} \langle \vec{R}(M) \rangle \cdot d\vec{S} = \frac{p_0^2 \omega^4}{32 \pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \quad (9.22)$$

En introduisant l'accélération du dipôle  $a$  définie par  $p'' = q a$ , on obtient après calculs<sup>2</sup> :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{p_0^2 \omega^4}{3 c^3} = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0} \frac{2 a^2}{3 c^3} \quad (9.23)$$

Cette relation est connue sous le nom de *formule de Larmor*. La Figure 9.11 représente les diagrammes polaires de  $\vec{E}$  et  $\vec{R}$ .

**Remarque 1 :** La relation (9.23) n'est pas totalement exacte car elle intègre une zone proche de l'axe mal modélisée.

**Remarque 2 :** La puissance rayonnée ne dépend évidemment pas de  $r$ . Il est logique de constater que c'est une caractéristique de l'émetteur !

**Remarque 3 :** On voit sur (9.23) que les hautes fréquences sont mieux rayonnées que les basses fréquences. Ceci a deux conséquences immédiates :

1. On utilise des hautes fréquences pour les antennes.
2. Pour le transport du courant, il faut  $\mathcal{P}$  la plus basse possible, donc une basse fréquence.

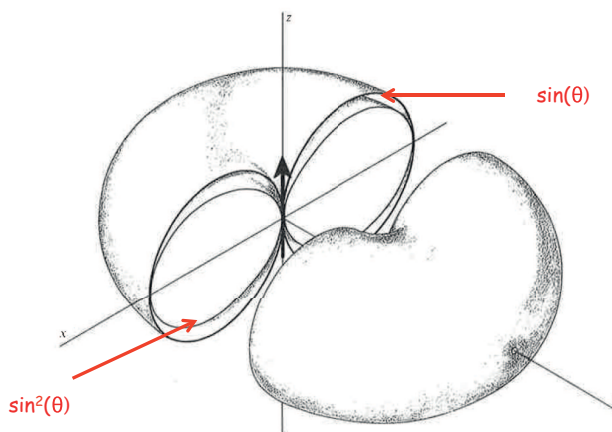


FIGURE 9.11 – Diagramme polaires de  $E$  - proportionnel à  $\sin(\theta)$  - et  $\langle R \rangle$  proportionnel à  $\sin^2(\theta)$  - (Figure extraite de [1]).

### Résistance du rayonnement

Par définition, la *résistance de rayonnement* est la résistance  $R_r$  d'un conducteur ohmique qui dissiperait la même puissance par effet **Joule** s'il était parcouru par le courant  $I_m$ , soit :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} R_r I_m^2 \quad (9.24)$$

2. En utilisant l'intégrale classique :

$$\int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos^2(\theta)) d(-\cos(\theta)) = \left[ -\cos(\theta) \frac{\cos^3(\theta)}{3} \right]_0^\pi = \frac{4}{3}$$

Cette résistance traduit le couplage avec l'espace du doublet de charges qui oscillent à la pulsation  $\omega$ . Comme  $I_m a = p_0 \omega$ , on peut réécrire (9.23) sous la forme :

$$\mathcal{P} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \frac{I_m}{2}$$

En comparant avec (9.24), on a tout de suite :

$$R_r = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \quad (9.25)$$

$R_r$  est bien homogène à une résistance car  $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi = 377\ \Omega$  est l'*impédance du vide*. Dans le cas d'une propagation dans le vide, on a :

$$R_r = 80\pi^2 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \approx 790 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \Omega \quad (9.26)$$

En prenant une valeur typique de  $a/\lambda = 1/1000$ , on obtient  $R_r \approx 790\ \mu\Omega$ . On en déduit que la puissance rayonnée par un dipôle unique sera toujours extrêmement faible et qu'une forte puissance rayonnée devra nécessairement impliquer un grand nombre de dipôles !

### Gain directionnel du rayonnement

On définit le *gain directionnel du rayonnement*  $G(\theta)$  par :

$$G(\theta) = 4\pi r^2 \frac{\langle R \rangle}{\mathcal{P}} \quad (9.27)$$

Dans le cas du dipôle de **Hertz**, on obtient (cf Figure 9.12) :

$$G(\theta) = \frac{3}{2} \sin^2(\theta) \quad (9.28)$$

La largeur angulaire  $\Delta\theta$  pour laquelle la puissance est divisée par deux par rapport à la valeur maximale vaut alors  $\Delta\theta = 90^\circ$ .

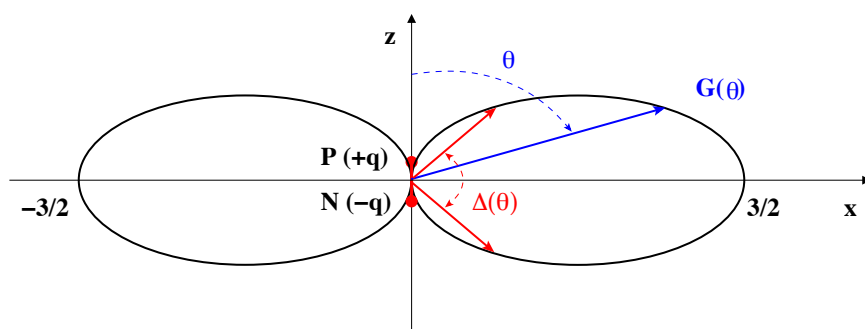


FIGURE 9.12 – Gain directionnel du rayonnement pour le dipôle de **Hertz**.

## 9.1.6 Rayonnement dipolaire de l'électron atomique

### Généralités

On utilise le modèle de l'électron élastiquement lié pour assimiler un électron atomique à un dipôle oscillant de pulsation  $\omega_0$ . Le moment de ce dipôle vaut  $p(t) = -e\vec{r}$  ce qui permet d'écrire que  $\langle p'^2 \rangle = e^2 \langle a^2 \rangle$  (où  $a$  est l'accélération de l'électron atomique).

La puissance moyenne rayonnée par l'électron vaut :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \langle a^2 \rangle}{3c^3} \quad (9.29)$$

Cette puissance rayonnée par le dipôle vient de son énergie mécanique  $E_{Méca} = 1/2 \times m_e \omega_0^2 p_0^2 / e^2$  qui diminue au cours du temps. On aura  $\langle \mathcal{P} \rangle dt = -dE_{Méca}$  en supposant que  $dt$  est très grand devant le temps sur lequel on effectue la moyenne. On peut donc introduire le temps caractéristique  $\tau$  tel que :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{E_{Méca}}{\tau} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{2r_e \omega_0^2}{3c}$$

ou  $r_e = e^2 / (4\pi\epsilon_0 m_e c^2) = 2,8 \cdot 10^{-15}$  m est le rayon classique de l'électron. En supposant que  $dt \ll \tau$ , on aura :

$$-\frac{dE_{Méca}}{E_{Méca}} = \frac{dt}{\tau} \quad \text{soit} \quad E_{Méca}(t) = E_{Méca}(0) \exp(-t/\tau) \quad (9.30)$$

On retrouve bien le fait que l'énergie mécanique décroît avec le temps. Le mouvement de l'oscillateur étant amorti, le rayonnement qui en résulte ne peut pas être monochromatique.

### Diffusion du rayonnement électromagnétique par un électron atomique

La diffusion d'un rayonnement incident par un électron atomique constitue un exemple important de rayonnement dipolaire :

1. Le champ d'une onde électromagnétique peut interagir avec un atome ou une molécule qui va absorber une partie de l'énergie du rayonnement incident.
2. Les dipôles atomiques induits vont réémettre des ondes électromagnétiques dans des directions différentes de la direction de l'onde incidente : il y a diffusion.

On utilise un modèle classique pour décrire l'interaction entre un atome et le champ électromagnétique d'une onde incidente. Le modèle de l'électron élastiquement lié permet de décrire le mouvement d'un électron autour de sa position d'équilibre en introduisant une force de rappel  $\vec{f}_{rapp}$  et une force de frottement visqueux  $\vec{f}_v$  telles que :

$$\vec{f}_{rapp} = -m\omega_0^2 \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{f}_v = -\alpha \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (9.31)$$

où  $\alpha$  est le *coefficient d'amortissement*. Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire l'équation régissant le mouvement de l'électron selon :

$$m \vec{r}'' = -e \vec{E}(t) - \alpha \vec{r}' - m\omega_0^2 \vec{r} \quad (9.32)$$

En régime sinusoïdal établi et en projetant sur la direction du champ prise suivant l'axe ( $Oz$ ) :

$$m z'' = -e E_m \exp(-i\omega t) - \alpha z' - m\omega_0^2 z$$

ou encore :

$$z'' + \frac{1}{\tau} z' + \omega_0^2 z = -\frac{e E_m}{m} \exp(-i\omega t) \quad \text{en posant} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{\alpha}{m}$$

dont la solution s'écrit :

$$z(\omega) = \frac{-e E_m \exp(-i\omega t)}{m [(\omega_0^2 - \omega^2) - i \frac{\omega}{\tau}]}$$

On en déduit le moment dipolaire électrique :

$$\vec{p} = -e z(\omega) \vec{u}_z = p_0(\omega) \exp(-i\omega t) \quad \text{avec} \quad p_0(\omega) = \frac{e^2 E_m}{m [(\omega_0^2 - \omega^2) - i \frac{\omega}{\tau}]}$$

D'après (9.23), un tel dipôle rayonne une puissance électromagnétique  $\langle \mathcal{P} \rangle$  donnée par :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{p_0^2(\omega) \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^2}$$

soit après calculs :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \sigma(\omega) \frac{\epsilon_0 c E_m^2}{2} \quad \text{avec} \quad \sigma(\omega) = \frac{8 \pi r_e^2}{3} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2} \quad (9.33)$$

où  $\sigma(\omega)$  représente la *section efficace de diffusion du rayonnement*, homogène à une surface. On peut distinguer trois domaines dans la section efficace (cf Figure 9.13) :

### 1. Diffusion résonnante

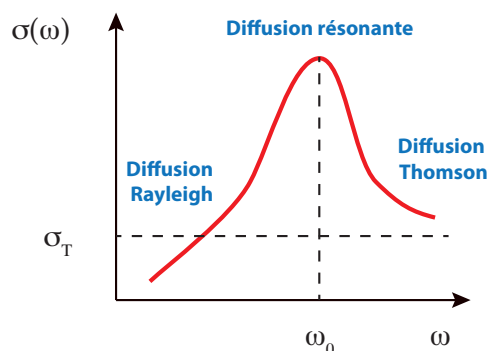


FIGURE 9.13 – Variation en échelle logarithmique de la section efficace de diffusion du rayonnement  $\sigma(\omega)$  en fonction de la pulsation  $\omega$ .

La diffusion est particulièrement importante lorsque  $\omega \approx \omega_0$ . En utilisant le fait qu'on a alors  $\omega_0^2 - \omega^2 \approx 2\omega_0(\omega - \omega_0)$ , on montre que la section efficace de diffusion se met sous la forme :

$$\sigma(\omega) = \frac{8 \pi r_e^2 \omega_0^2 \tau^2}{3} L(\omega) \quad \text{avec} \quad L(\omega) = \frac{\omega^2}{1 + 4 \tau^2 (\omega - \omega_0)^2} \quad (9.34)$$

La fonction  $L(\omega)$  est une *lorentzienne*, dont la forme est caractéristique d'une résonance. Cette diffusion est parfois appelée la *diffusion Rayleigh résonnante*.

La Figure 9.14 présente un exemple de diffusion résonnante obtenue en éclairant une vapeur de sodium successivement avec une lampe à vapeur de mercure puis avec une lampe à vapeur de sodium<sup>3</sup>. Les dipôles contenus dans le gaz se mettent à osciller et diffusent un rayonnement électromagnétique intense. Noter la très faible largeur de la résonance.

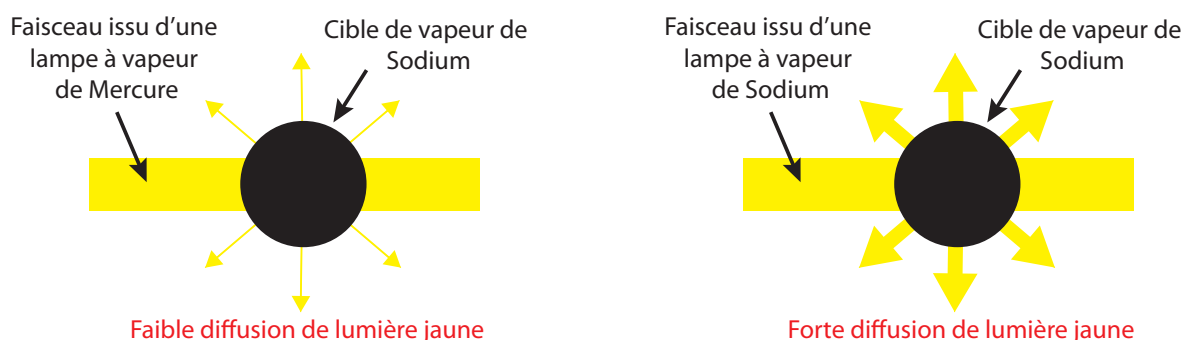


FIGURE 9.14 – Selon la longueur d'onde du rayonnement incident, on observe ou non une diffusion résonnante sur de la vapeur de sodium.

3. Une lampe à vapeur de mercure comprend un doublet jaune à 577 et 579 nm, tandis qu'une lampe à vapeur de sodium comprend un doublet jaune à 589 et 589,6 nm.

## 2. Diffusion Rayleigh

On se place dans la région où  $\omega \ll \omega_0$ . La section efficace (9.33) devient :

$$\sigma(\omega) \approx \frac{8\pi r_e^2}{3} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \quad (9.35)$$

La Figure 9.15 présente un exemple de diffusion **Rayleigh** lorsque les rayonnements issus du Soleil arrivent sur la haute atmosphère terrestre. La diffusion d'une partie du spectre explique la couleur apparente du ciel.

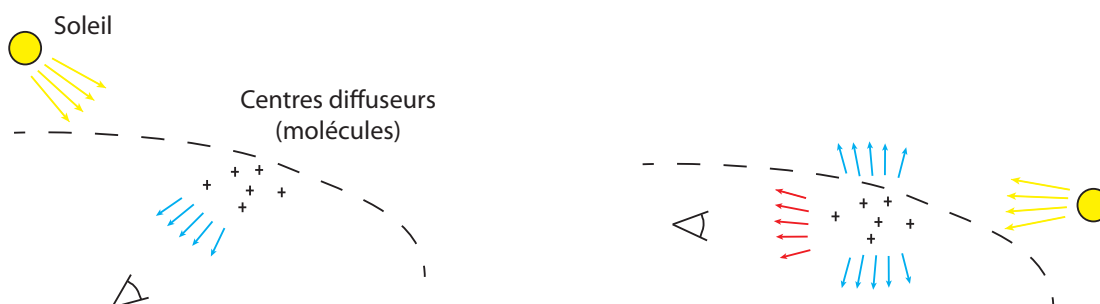


FIGURE 9.15 – La diffusion **Rayleigh** sur les molécules de l'atmosphère permet d'expliquer la couleur du ciel.

## 3. Diffusion Thomson

Dans le cas contraire où  $\omega \gg \omega_0$ , la section efficace tend vers une valeur constante, la *section efficace de Thomson* :

$$\sigma(\omega) \approx \sigma_T = \frac{8\pi r_e^2}{3} = 0,67 \text{ barn} \quad (9.36)$$

### Polarisation du rayonnement par diffusion

Le rayonnement émis peut-être polarisé. On considère par exemple le cas d'une onde se propageant selon  $Oz$  et polarisée selon  $Ox$ .

Le moment dipolaire induit est dirigé selon  $Ox$  (parallèle à la direction de la polarisation incidente).

Dans la zone de rayonnement, le rayonnement diffusé est polarisé rectilignement. Son intensité est maximale dans  $Oyz$ . Dans ce plan, le dipôle émet isotropiquement des ondes polarisées selon  $Ox$ . La diffusion est négligeable dans les directions voisines de  $Ox$ .