

Deuxième partie

Modélisation de la matière

Chapitre 5

Milieux diélectriques

Sommaire

5.1	Sources microscopiques de la polarisation en régime statique	152
5.2	Etude macroscopique de la polarisation en régime statique	155
5.3	Susceptibilité électrique	169
5.4	Polarisation en régime variable	172
5.5	Aspects énergétiques des milieux diélectriques : le travail de polarisation . .	183

Introduction

On n'a considéré jusqu'à présent que le vide et des conducteurs. On verra au chapitre 6 que dans un conducteur, la présence de charges libres de se déplacer fait qu'à l'équilibre électrostatique, le champ \vec{E} y est toujours nul. On va considérer dans ce chapitre un autre type de matériaux, dits *diélectriques*. Dans un diélectrique, il n'y a pas de charge libre à l'état naturel¹, ce qui autorise un champ électrique non nul à l'équilibre.

Même si certaines observations aujourd'hui attribuées à des diélectriques avaient été faites dans l'Antiquité, l'expérience fondatrice de l'étude des diélectriques est attribuée à **Faraday** qui a observé que l'introduction d'une plaque de paraffine entre les armatures d'un condensateur modifiait l'ouverture d'un électroscope², c'est-à-dire modifiait la charge entre ses armatures (cf Figure 5.1).

Dans un milieu à structure moléculaire, chaque molécule peut être assimilée, à grande distance, à un doublet de charges. D'un point de vue macroscopique, suivant la théorie développée initialement par **Lorentz**, on caractérisera le milieu par sa *polarisation* \vec{P} , ou *densité volumique de moments dipolaires électriques* (qui s'exprime en C/m²) :

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} \quad (5.1)$$

Les moments dipolaires qui interviennent dans la polarisation sont à la fois les moments permanents et les moments induits (§ 2.5.1).

Dans ce chapitre³, on considèrera tout d'abord des champs statiques et ensuite des champs variables dans le temps.

1. Il ne faut pas confondre avec un *isolant* qui est un diélectrique particulier qui piège les charges qu'on lui injecte. Si on injecte des charges supplémentaires à un diélectrique, alors ces charges peuvent se déplacer si le diélectrique n'est pas un isolant. C'est en particulier le cas du vide, mais ce n'est pas le cas de la plupart des matières plastiques qui sont des isolants. Dans tout ce chapitre, on parle de corps diélectriques, et pas d'isolants.

2. Un *électroscope* permet la mise en évidence de la charge électrique d'un corps. Dans ses versions évoluées, il a donné l'*électromètre*, qui permet de mesurer la charge d'un corps.

3. Ce chapitre doit beaucoup à l'excellente référence [6].

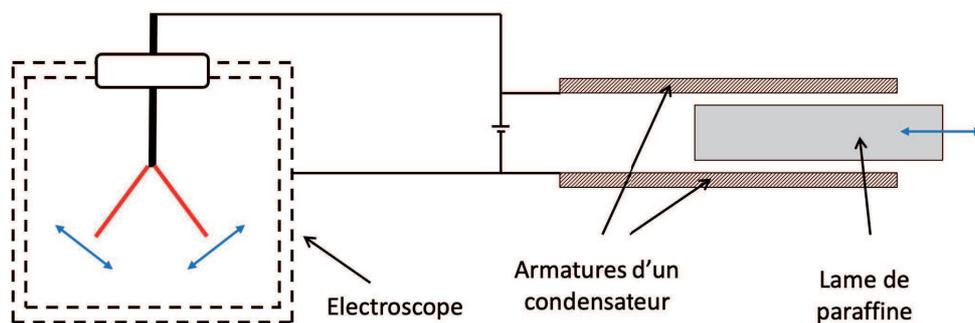


FIGURE 5.1 – La charge d’un électroscope est modifiée par l’introduction dans un condensateur chargé d’une plaque de paraffine.

5.1 Sources microscopiques de la polarisation en régime statique

D’après ce qu’on a vu au § 2.5.1, la polarisation peut être *spontanée* ou *induite*. La polarisation spontanée est très rare et sera abordée au § 5.3.3. On étudie dans ce paragraphe les mécanismes de polarisation induits par un champ électrique extérieur.

5.1.1 Moments dipolaires des atomes et des molécules

On a vu au § 2.5.1 qu’aussi bien dans le cas des molécules polaires que des molécules apolaires, l’application d’un champ électrique statique induit un moment dipolaire électrique additionnel $\delta\vec{p}$ de la forme :

$$\delta\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}_\ell \quad (5.2)$$

où \vec{E}_ℓ est le champ électrique local effectivement subit par l’atome ou la molécule et α sa *polarisabilité*. On discutera plus en détail le champ \vec{E}_ℓ au § 5.3.

Le raisonnement peut être étendu au cas dynamique en considérant qu’à chaque instant, le nuage électronique se déplace autour du noyau et qu’il existe pour chaque molécule un moment dipolaire instantané, même pour les molécules apolaires. Au sein d’un gaz, ces moments dipolaires instantanés peuvent faire apparaître un moment dipolaire sur les autres molécules, appelés *moments dipolaires induits*.

Toutes les contributions au moment dipolaire total liées à un champ électrique agissant sur une molécule sont donnés par (5.2).

5.1.2 Polarisation électronique

Polarisation électronique pour les atomes et les molécules apolaires

La *polarisation électronique* concerne tous les milieux et résulte du déplacement des nuages électroniques autour des atomes sous l’action d’un champ électrique extérieur.

Pour un atome ou une molécule apolaire, on observe expérimentalement que le moment électrique induit \vec{p} est colinéaire et de même sens que le champ électrique local agissant sur la molécule \vec{E}_ℓ . On définit la *polarisabilité électronique* α_e d’une molécule par :

$$\vec{p} = \alpha_e \epsilon_0 \vec{E}_\ell \quad (5.3)$$

où α_e est une grandeur scalaire positive (homogène à un volume) caractéristique du milieu⁴. Un milieu contenant n molécules par unité de volume de polarisabilité α_e va acquérir la polarisation \vec{P} telle que :

$$\vec{P} = n\vec{p} = n\alpha_e \epsilon_0 \vec{E}_\ell \quad (5.4)$$

4. Attention, les chimistes utilisent généralement une polarisabilité α_{chimie} exprimée dans le système CGS. On a alors $\alpha_{physique} = 4\pi\alpha_{chimie}$.

Polarisation électronique pour les autres molécules

Pour les autres molécules, la situation est plus complexe car elles se polarisent parfois dans des directions privilégiées. Par exemple, CO_2 est une molécule linéaire. Elle a une polarisabilité $\alpha_{\perp} = 4,5 \cdot 10^{-40} \text{ C}^2\text{m/N}$ pour un champ appliqué selon l'axe de la molécule, mais uniquement $\alpha_{\parallel} = 2 \cdot 10^{-40} \text{ C}^2\text{m/N}$ pour un champ orthogonal à cet axe. Pour un champ dans une direction quelconque, le moment dipolaire induit sera :

$$\vec{p} = \alpha_{\perp} \epsilon_0 \vec{E}_{\perp} + \alpha_{\parallel} \epsilon_0 \vec{E}_{\parallel}$$

Le moment \vec{p} peut alors ne pas être dans la direction du champ \vec{E} . Pour des molécules encore plus complexes, on doit introduire le *tenseur des polarisabilités* $[\alpha]$ défini par :

$$\vec{p} = [\alpha] \epsilon_0 \vec{E} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_0 E_x \\ \epsilon_0 E_y \\ \epsilon_0 E_z \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

On pourrait montrer que les valeurs des α_{ij} dépendent des axes choisis, mais qu'il est possible d'en choisir certains de façon à ce que tous les éléments hors diagonale soient nuls et qu'il ne reste que trois *polarisabilités principales* α_1, α_2 et α_3 sur la diagonale.

Dans de nombreuses situations (les fluides par exemples), toutes les orientations des molécules par rapport au champ sont possibles. Seule la moyenne de $[\alpha]$ sur toutes les directions joue un rôle macroscopique avec un moment dipolaire moyen par molécule $\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}$ où $\alpha = 1/3 \times \text{Tr}[\alpha]$.

En ordre de grandeur, pour les molécules, la polarisabilité atomique est environ 10% de la polarisabilité électronique.

Le modèle de Mossotti

Dans le *modèle de Mossotti* de la polarisation électronique, on assimile un atome à un noyau de charge Ze et à une distribution de charge électronique ρ uniforme de rayon a . L'application d'un champ \vec{E}_a déplace le nuage électronique en bloc de \vec{r} (cf Figure 5.2).

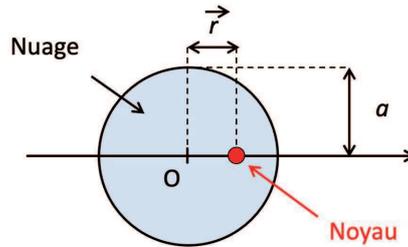


FIGURE 5.2 – Le *modèle de Mossotti* considère que le noyau s'écarte de \vec{r} du centre du nuage électronique (pris comme origine du référentiel) sous l'action d'un champ électrique (voir texte).

La neutralité électrique du noyau s'écrit $Ze + 4/3 \times \pi a^3 \rho = 0$ soit $\rho = -3Ze/(4\pi a^3)$. La somme des forces qui s'exercent sur le noyau est nulle, soit :

1. la force associée au champ \vec{E}_a : $Ze \vec{E}_a$
2. la force exercée par le nuage : $Ze \vec{E}(r)$

Le théorème de **Gauss** montre que le champ créé par la densité volumique ρ à la distance r de O vaut :

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho}{3r \epsilon_0} \vec{r} = \frac{-Ze}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{r}}{a^3}$$

L'équilibre du noyau s'écrit :

$$Ze \vec{E}_a - \frac{Ze}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{r}}{a^3} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \vec{r} = \frac{4\pi \epsilon_0 a^3}{Ze} \vec{E}_a$$

Le moment dipolaire induit sur l'atome est donc $\vec{p} = Ze\vec{r}$. Dans le cadre de ce modèle, la polarisabilité α_e s'écrit :

$$\alpha_e = 4\pi a^3 \quad (5.6)$$

Cette relation montre que la polarisabilité a les dimensions d'un volume.

5.1.3 Polarisation ionique

Un cristal ionique ne possédant pas de polarisation spontanée verra sa structure modifiée sous l'action d'un champ électrique appliqué : les ions positifs et négatifs seront déplacés dans des directions opposées, faisant apparaître une polarisation \vec{P} liée à une déformation de la maille.

Pour un cristal cubique tel que NaCl, on constate l'apparition d'une polarisation proportionnelle au champ local \vec{E}_ℓ qui est donnée par :

$$\vec{P} = n\alpha_i\epsilon_0\vec{E}_\ell \quad (5.7)$$

où n représente la densité volumique des ions et α_i une constante positive. L'analogie avec (5.4) fait que cette polarisation est appelée *polarisation ionique* et que α_i est appelée *polarisabilité ionique*.

Remarque 1 : Le champ \vec{E}_ℓ a également pour effet de déplacer les nuages électroniques des ions, ce qui fait en plus apparaître une polarisation électronique.

Remarque 2 : On regroupe parfois les polarisations électronique et ionique sous la même appellation de *polarisation par déformation*, puisqu'elles résultent d'une déformation locale du nuage électronique due au champ électrique appliqué.

5.1.4 Polarisation dipolaire

La *polarisation dipolaire* (ou *polarisation d'orientation*) résulte de la tendance qu'ont les molécules polaires à s'orienter dans le sens d'un champ électrique appliqué. En effet, en l'absence de champ appliqué, l'agitation thermique oriente les moments dans toutes les directions, ce qui conduit à une polarisation nulle. En présence d'un champ électrique, chaque molécule aura tendance globalement à s'orienter dans le sens du champ (cf Figure 5.3).



FIGURE 5.3 – La polarisation dipolaire résulte de l'orientation des molécules polaires dans un champ \vec{E} .

Modèle de Langevin

On peut faire en physique statistique un calcul de la polarisation, en remarquant que le nombre dn de dipôles orientés dans un angle solide $d\Omega$ doit être indépendant de Ω . En présence d'un champ \vec{E}_ℓ appliqué, dn est régit par la distribution de Boltzmann :

$$dn = \text{Const} \times \exp\left(-\frac{U}{k_B T}\right) d\Omega \quad (5.8)$$

où $U = -\vec{p}_0 \cdot \vec{E}_\ell$ est l'énergie d'interaction du dipôle rigide \vec{p}_0 dans le champ. En notant $x = p_0 E_\ell / (k_B T)$, on montre que la polarisation se met sous la forme :

$$P = n p_0 \mathcal{L}(x) \quad \text{où} \quad \mathcal{L}(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{\exp(x) - \exp(-x)} - \frac{1}{x} = \coth(x) - \frac{1}{x} \quad (5.9)$$

La fonction $\mathcal{L}(x)$ est la *fonction de Langevin* (cf Figure 5.4).

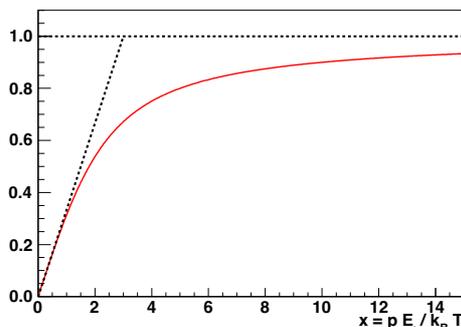


FIGURE 5.4 – La *fonction de Langevin* a pour asymptotes $y = x/3$ aux basses valeurs de x et $y = 1$ pour les valeurs élevées.

Au voisinage de la température ambiante, on aura toujours $x \ll 1$. En effet, à $T = 300$ K et pour $p = 10^{-29}$ Cm, le paramètre x n'atteint que $2.5 \cdot 10^{-2}$ pour un champ de 10^7 V/m. Un développement limité permet alors d'écrire $\mathcal{L}(x \ll 1) \approx x/3$ dont on déduit que la polarisation dipolaire est alors proportionnelle au champ appliqué. On obtient alors une polarisabilité α_{or} dite *polarisabilité d'orientation* telle que :

$$\alpha_{or} \approx \frac{p_0^2}{3 \epsilon_0 k_B T} \quad (5.10)$$

Au contraire, à très basse température et pour un champ très intense, $x \gg 1$. On a alors $\mathcal{L}(x \gg 1) \approx 1$: les dipôles sont tous alignés dans le sens du champ.

On retiendra que la polarisation dipolaire varie fortement avec la température, contrairement à la polarisation électronique qui ne dépend que de la nature des molécules et à la polarisation ionique qui ne dépend que de la structure du cristal.

5.2 Etude macroscopique de la polarisation en régime statique

Comme on l'a déjà vu (cf Figure 5.1), **Faraday** a observé que la capacité augmentait lorsqu'on introduisait un diélectrique entre les armatures d'un condensateur. Comme $Q = C \Phi$, cela signifie que le champ \vec{E} doit diminuer et donc que des charges opposées aux charges des armatures doivent apparaître en regard, dans le diélectrique.

Qualitativement, un champ \vec{E} appliqué distord la distribution de charges du milieu et modifie donc ses moments multipolaires. A cause de la dépendance du champ avec la distance qui décroît avec l'ordre multipolaire (2.75), on considèrera que le milieu est uniquement constitué de moments dipolaires. On n'abordera le cas des moments d'ordre supérieur qu'au § 5.2.9.

5.2.1 Relations constitutives

Un milieu sera *linéaire* si les composantes de sa polarisation \vec{P} sont des fonctions linéaires des composantes du champ \vec{E} , c'est-à-dire si \vec{P} se met sous la forme :

$$\vec{P} = \epsilon_0 [\chi_e] \vec{E} \quad (5.11)$$

Dans cette relation, $[\chi_e]$ est la *tenseur des susceptibilités diélectriques* dont on peut montrer qu'il existe une base sur laquelle il se met sous la forme :

$$[\chi_e] = \begin{pmatrix} \chi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_3 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

où les éléments diagonaux χ_i sont les *susceptibilités diélectriques principales*.

Un milieu sera *homogène* si $[\chi_e]$ est indépendant du point de l'espace considéré. Enfin, un milieu sera *isotrope* si aucune direction n'est privilégiée, ce qui entraîne que \vec{P} est dans la même direction que \vec{E} :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e(M, \vec{E}) \vec{E} \quad (5.13)$$

En combinant ce qui vient d'être dit, un milieu sera *linéaire, homogène et isotrope* (lhi) si les valeurs propres de $[\chi_e]$ sont égales et indépendantes de la position dans l'espace et du champ. On aura alors :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (5.14)$$

où χ_e est un nombre réel positif sans dimension, la *susceptibilité diélectrique* ou *susceptibilité*, simplement notée χ , s'il n'y a pas d'ambiguïté.

5.2.2 Densités de charges équivalentes

Approche intuitive

On considère tout d'abord une plaque diélectrique de polarisation uniforme normale à ses faces (cf Figure 5.5). On peut remplacer par la pensée la plaque par un empilement de dipôles dans tout le volume. On voit sur ce modèle simpliste que la charge volumique correspondant aux charges des dipôles sera nulle partout, sauf sur les bords où on observera une accumulation locale de charges de même polarité. On appellera *charges de polarisation* les excédents locaux de charges engendrés par la polarisation.



FIGURE 5.5 – Une polarisation uniforme engendre en surface des charges de polarisation (à gauche), tandis qu'une polarisation dépendant de la position peut également engendrer des charges en volume (à droite).

Si on considère désormais une polarisation dont la valeur augmente d'une face à l'autre, on aura par exemple $\partial P / \partial z > 0$. On imagine alors que la charge négative du "bas" du dipôle ne compensera que partiellement la charge positive du "haut", et qu'il va apparaître un excédent de charges de polarisation dans le volume du diélectrique.

Approche quantitative

On considère un diélectrique initialement neutre de volume (V) et on appelle (S) la surface de séparation entre le diélectrique et le monde extérieur (cf Figure 5.6). A grande distance, le potentiel électrostatique créé par un dipôle \vec{p} placé à l'origine s'écrit en un point M repéré par sa position \vec{r} :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

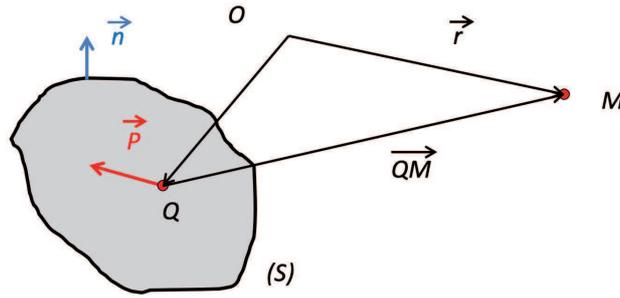


FIGURE 5.6 – Calcul du potentiel Φ créé par un diélectrique à grande distance de celui-ci.

En notant dN/dV la densité volumique de dipôles, on en déduit le potentiel $\Phi(M)$ créé en M par le diélectrique :

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{Diél} \frac{\vec{p} \cdot \overrightarrow{QM}}{QM^3} \frac{dN}{dV} dV \quad \text{soit} \quad \Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{Diél} \frac{\vec{P} \cdot \overrightarrow{QM}}{QM^3} dV \quad (5.15)$$

Comme :

$$\frac{\overrightarrow{QM}}{QM^3} = -\vec{\nabla}_M \left(\frac{1}{QM} \right) = \vec{\nabla}_Q \left(\frac{1}{QM} \right)$$

on peut écrire à l'aide de (A.8) (avec $\phi \equiv 1/r$ et $\vec{A} \equiv \vec{P}$) :

$$\frac{\vec{P} \cdot \overrightarrow{QM}}{QM^3} = \vec{P} \cdot \vec{\nabla}_Q \left(\frac{1}{QM} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{P}}{QM} \right) - \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{QM}$$

A l'aide de cette relation (5.15) devient :

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{Diél} \left[\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{P}}{QM} \right) - \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{QM} \right] dV$$

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky (A.22), on a finalement :

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{(S)} \frac{\vec{P}}{QM} \cdot d\vec{S} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{Diél} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{QM} dV$$

ou encore :

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{(S)} \frac{\vec{P} \cdot \vec{n}}{QM} dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{Diél} \frac{-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{QM} dV \quad (5.16)$$

A l'aide de (2.14) et (2.13), on montre que le potentiel créé par la distribution volumique de dipôles à l'origine de la polarisation est équivalent au potentiel qui serait créé par une densité macroscopique de charges dans le vide caractérisée par une densité surfacique σ_P et une densité volumique ρ_P et telles que :

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{n} \quad \text{et} \quad \rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (5.17)$$

D'un point de vue macroscopique, la polarisation du diélectrique est équivalente pour le potentiel électrostatique Φ (et donc pour le champ \vec{E}) à une distribution macroscopique de *charges de polarisation* ou *charges liées* (cf Figure 5.7). Physiquement, on peut interpréter σ_P et ρ_P comme des excédents locaux de charges liées, apparues sous l'action de la polarisation du milieu (initialement neutre).

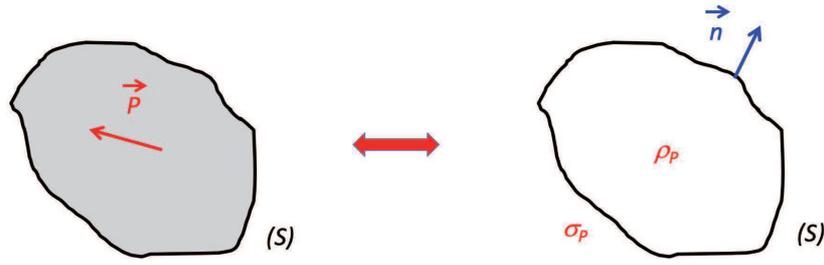


FIGURE 5.7 – Le potentiel créé par le diélectrique en un point M est équivalent au potentiel qui serait créé dans du vide par la densité volumique $\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ et par la densité surfacique $\sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{n}$ (voir texte).

Charge de polarisation totale portée par le diélectrique

La présence des charges liées ne modifie pas la charge totale. En effet, la charge de polarisation totale Q_p portée par le diélectrique initialement neutre est :

$$\begin{aligned}
 Q_p &= \iiint_{(V)} \rho_p dV + \iint_{(S)} \sigma_p dS = - \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot \vec{p} dV + \iint_{(S)} \vec{p} \cdot \vec{n} dS \\
 &= - \iint_{(S)} \vec{p} \cdot \vec{n} dS + \iint_{(S)} \vec{p} \cdot \vec{n} dS = 0
 \end{aligned}
 \tag{5.18}$$

Remarque : Interprétation des charges de polarisation

1. Le champ créé par un objet possédant une polarisation est identique à celui qui serait créé par des densités volumiques et surfaciques de charges liées, de valeur définies par la polarisation macroscopique.

Les charges liées ne sont pas des charges fictives, ce sont des charges réelles, mais qui ne peuvent se déplacer librement dans le diélectrique. L'approche intuitive développée au début de ce paragraphe le prouve.

2. La densité surfacique σ_P est due à la discontinuité de \vec{P} à la traversée de la surface (S). En supposant que la polarisation est continue mais qu'elle varie très rapidement de \vec{P} à $\vec{0}$ sur une petite épaisseur ϵ , la densité volumique ρ_p y est alors très intense.

En prenant l'axe Oz dirigé localement selon la normale sortante du milieu (cf Figure 5.8), on suppose que le milieu diélectrique est situé en $z < 0$ et qu'au delà, il n'y a que du vide. On peut supposer que seules les variations selon Oz seront rapides et que les autres seront négligeables, d'où $\rho_P \approx -\partial P_z / \partial z$. Cette densité est très intense proche de la surface et peut être remplacée par une densité surfacique donné par :

$$\sigma_P \approx \int_{-\epsilon}^0 \rho_P dz = \int_{-\epsilon}^0 \left(-\frac{\partial P_z}{\partial z} \right) dz = -|P_z|_{-\epsilon}^0 = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

Réponse de la matière à un champ appliqué

À l'échelle macroscopique, rien ne distingue un champ \vec{E} dû à des charges libres d'un champ \vec{E} dû aux charges de polarisation. On devra en tenir compte pour établir le champ total en présence de milieux diélectriques.

Comme schématisé sur la Figure 5.9, on a donc un système couplé entre la réponse de la matière (\vec{P}) et son excitation (\vec{E}_0). On verra plus tard qu'on pourra négliger ce couplage dans le cas des milieux dilués, mais qu'il faut le prendre en compte dans les milieux denses.

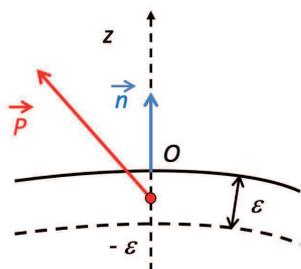


FIGURE 5.8 – Densité surfacique σ_P et discontinuité de la polarisation \vec{P} .

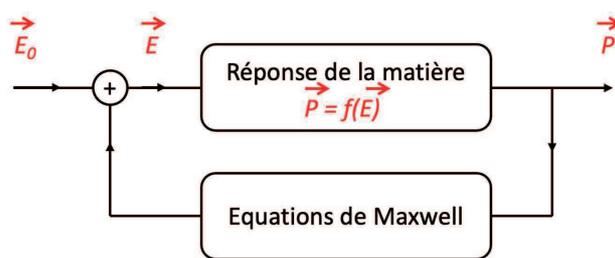


FIGURE 5.9 – Diagramme de réaction entre \vec{E} et \vec{P} pour un champ \vec{E}_0 appliqué à un milieu diélectrique.

5.2.3 Vecteur \vec{D}

Définition

Dans un corps diélectrique, (MG) s'écrit, en distinguant les charges libres des charges liées :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{libre} + \rho_{lié}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{libre} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} \quad (5.19)$$

On introduit naturellement le *vecteur \vec{D}* défini par :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (5.20)$$

Cette définition permet de réécrire (MG) en fonction des seules charges libres :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libre} \quad (5.21)$$

Sous sa forme intégrale, cette relation donne une relation « équivalente » au théorème de **Gauss** dans un milieu diélectrique :

$$\oiint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{libre} \quad (5.22)$$

où Q_{libre} représente la charge libre totale présente dans le diélectrique à l'intérieur d'une surface fermée (S).

Remarque : La relation (5.21) ressemble à la forme locale du théorème de **Gauss**, en ayant remplacé la densité de charges totales ρ_{tot} par la densité de charges libres ρ_{libre} . Attention à bien remarquer qu'on ne peut pas simplement remplacer \vec{E} par \vec{D} dans un diélectrique car il n'existe pas de *loi de Coulomb* pour \vec{D} :

$$\vec{D}(M) \neq \frac{1}{4\pi} \iiint_{Diél} \rho_{libre}(P) \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} d^3P$$

alors qu'on a toujours pour le champ \vec{E} :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{Diél} \rho_{tot}(P) \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} d^3P$$

Par commodité, on appellera souvent (5.22) la *forme locale du théorème de Gauss* pour les diélectriques en régime statique, mais c'est un abus de langage..

Cas particulier des milieux lhi

Dans le cas d'un milieu lhi, on écrira :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (5.23)$$

Gaz (20 °C, 1 atm)		Liquide (20 °C)		Solide	
Hélium	1,00006	Benzène	≈ 2,3	Paraffine	≈ 2,2
Hydrogène	1,00025	Acétone	≈ 21	Polyéthylène	2,3
Oxygène	1,00049	Ethanol	≈ 25	Verre	≈ 4 - 7
Argon	1,00052	Nitrobenzène	≈ 36	Diamant	5,5
Air	1,00059	Glycérol	≈ 43	NaCl	≈ 6
CO ₂	1,00092	Eau	≈ 80	Titanate de Baryum	≈ 1700

TABLE 5.1 – Permittivités diélectriques relatives statiques de divers matériaux.

en appelant $\epsilon_r = (1 + \chi)$ la *permittivité relative* ou *constante diélectrique* du milieu (nombre réel sans dimension) et $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ la *permittivité absolue*. La Table 5.1 donne les permittivités relatives de quelques corps.

Les relations de **Maxwell-Gauss** sous leur forme locale (5.21) et intégrale (5.22) deviennent pour un milieu lhi :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{libre}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad \text{et} \quad \oint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{libre}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (5.24)$$

Cas des milieux anisotropes

Pour un milieu diélectrique linéaire anisotrope, on peut étendre la définition (5.11) du tenseur des susceptibilité $[\chi_e]$. La relation qui lie \vec{D} à \vec{E} est alors :

$$\vec{D} = [\epsilon] \vec{E} \quad (5.25)$$

où $[\epsilon]$ est le *tenseur des permittivités*.

5.2.4 Champ et potentiel au sein d'un diélectrique lhi

Milieu lhi plongé dans un champ constant

On sait que le champ électrostatique \vec{E}_0 d'un système de conducteurs dans le vide vérifie les deux équations suivantes :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_0 = \vec{0} \quad (MF) \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \frac{\rho_{libre}}{\epsilon_0} \quad (MG) \quad (5.26)$$

où la densité ρ_{libre} est portée par les conducteurs. Par la pensée, on peut remplacer tout l'espace entre les conducteurs par un diélectrique lhi. Le champ \vec{E} vérifie alors :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad (MF) \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}) = \rho_{libre} \quad (MG)$$

que l'on peut réécrire respectivement sous la forme :

$$\vec{\nabla} \times (\epsilon_r \vec{E}) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_r \vec{E}) = \frac{\rho_{libre}}{\epsilon_0} \quad (5.27)$$

En comparant (5.26) et (5.27), on voit immédiatement que le champ \vec{E} dans le diélectrique vérifie :

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r} \quad (5.28)$$

qui montre que le champ dans le diélectrique est toujours plus faible que dans le vide (puisque $\epsilon_r > 1$).

Généralisation : champ et potentiel au sein d'un lhi

En présence d'un diélectrique lhi, le potentiel $\Phi(r)$ et le champ $\vec{E}(r)$ créés par une charge q ainsi que la force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ entre deux charges (libres) sont diminués de la quantité ϵ_r par rapport au cas du vide :

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q}{r} \quad \vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r \quad \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q_1 q_2}{r_{1 \rightarrow 2}^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2} \quad (5.29)$$

Remarque : Une conséquence de (5.29) est que la capacité d'un condensateur est modifiée de ϵ_r par la présence d'un diélectrique lhi. Par exemple, introduire un milieu lhi entre les armatures d'un condensateur plan distantes de d et de surface en regard S va modifier sa capacité de C_{vide} à $C_{diél}$:

$$C_{vide} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad C_{diél} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} = \epsilon_r C_{vide}$$

C'est pourquoi on utilise toujours des diélectriques de fort ϵ_r pour les condensateurs.

5.2.5 Exemple de domaines simples uniformément polarisés

On cherchera dans ce paragraphe à étudier le champ créé par une sphère uniformément polarisée puis le champ d'une sphère polarisée soumise à un champ électrique.

Champ créé par une sphère uniformément polarisée

On définit l'axe Oz du système de coordonnées sphériques comme étant celui qui porte la polarisation \vec{P} . La polarisation étant uniforme, la densité volumique de charge ρ_P est nulle. La densité surfacique de charges liées s'écrit :

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{n} = P \cos(\theta)$$

où θ est l'angle usuel du système de coordonnées sphériques (cf Figure 5.10). On recherche le champ créé dans tout l'espace par une densité surfacique $P \cos(\theta)$ à la surface de la sphère. Ce problème classique d'électrostatique a pour solution :

$$\Phi(r, \theta) = \begin{cases} \Phi_{int} = \frac{P}{3\epsilon_0} r \cos(\theta) & \text{pour } r < R \\ \Phi_{ext} = \frac{P}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \cos(\theta) & \text{pour } r > R \end{cases} \quad (5.30)$$

Comme $z = r \cos(\theta)$, le champ électrique à l'intérieur de la sphère est uniforme (cf Figure 5.11) :

$$\vec{E}_{int} = -\vec{\nabla}(\Phi_{int}) = -\frac{P}{3\epsilon_0} \vec{u}_z = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad \text{pour } r < R \quad (5.31)$$

A l'extérieur de la sphère, on remarque que le potentiel est identique à celui d'un dipôle placé à l'origine :

$$\Phi_{ext} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{r^2} \quad \text{pour } r > R \quad (5.32)$$

où le moment dipolaire \vec{p} est le moment dipolaire total porté par la sphère :

$$\vec{p} = \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{P}$$

On remarque les discontinuités du champ \vec{E} à la surface de la sphère. C'est là que sont situées les charges de polarisation de densité surfacique $\sigma_P = P \cos(\theta)$.

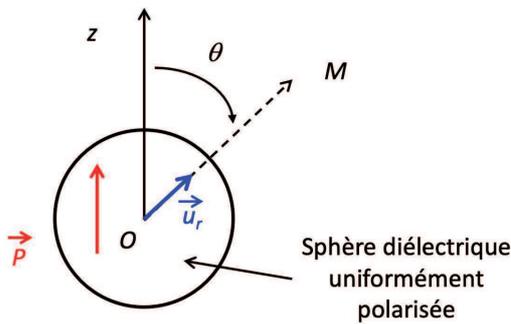


FIGURE 5.10 – Référentiel pour l'étude de la sphère uniformément polarisée.

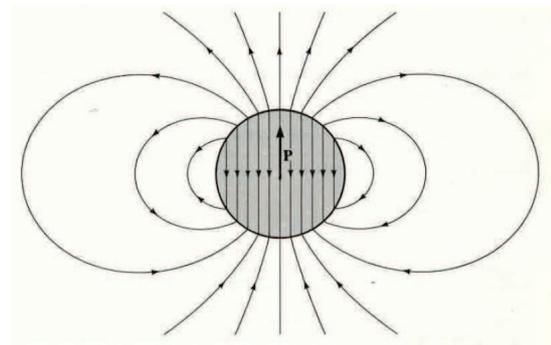


FIGURE 5.11 – Champ \vec{E} créé par une sphère uniformément polarisée.

Deuxième approche du champ créé par une sphère uniformément polarisée

On peut également considérer une sphère uniformément polarisée comme la superposition de deux sphères identiques de rayon R uniformément chargées de charges opposées $+Q$ et $-Q$, mais décalées d'une petite quantité : sans polarisation, les deux sphères se superposent complètement et on retrouve bien une polarisation totale nulle. En cas de polarisation, un faible décalage entre les deux centres crée une densité superficielle de charges en surface (cf Figure 5.12), qui correspond aux densités de charges liées évoquées précédemment.

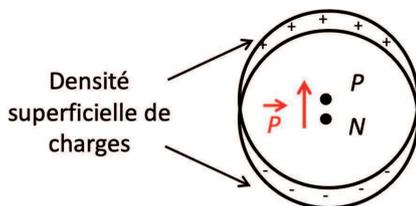


FIGURE 5.12 – Une sphère diélectrique de polarisation uniforme peut être modélisée comme deux sphères chargées de densités opposées légèrement décalées l'une par rapport à l'autre.

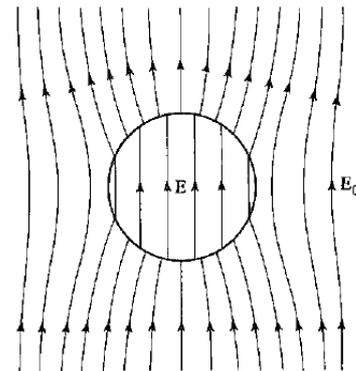


FIGURE 5.13 – Champ au voisinage d'une sphère uniformément polarisée plongée dans un champ \vec{E}_0 uniforme.

Ceci est un autre problème classique d'électrostatique. On pourrait montrer que :

1. Le champ \vec{E} dans la région de recouvrement se met sous la forme :

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} \overrightarrow{NP}$$

où \overrightarrow{NP} est le vecteur séparant les centres des sphères de charges négatives et positives. On a $\vec{p} = Q\overrightarrow{NP} = 4/3\pi R^3 \vec{P}$, ce qui permet finalement de dire que :

$$\vec{E} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \tag{5.33}$$

2. Le potentiel pour tous les points extérieurs à la sphère s'obtient comme la somme des potentiels dus aux deux sphères concentrant toute leur charge en leur centre. On a alors le potentiel d'un dipôle de

moment $\vec{p} = Q \overrightarrow{NP}$:

$$\Phi_{ext} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{r^2} \quad (5.34)$$

On retrouve bien (5.31) et (5.32).

Champ créé par une sphère uniformément polarisée plongée dans un champ

On vient de considérer une sphère uniformément polarisée sans chercher à savoir d'où venait cette polarisation. On va maintenant considérer que la polarisation est en fait généralement créée par l'interaction avec un champ électrique externe. On considère donc une sphère constituée d'un matériau lhi, uniformément polarisée, plongée dans un champ uniforme \vec{E}_0 . D'après ce qu'on vient de voir, cette polarisation $\vec{P}_0 = \epsilon_0 \chi \vec{E}_0$ crée un champ électrique uniforme \vec{E}_1 dans la sphère :

$$\vec{E}_1 = -\frac{\vec{P}_0}{3\epsilon_0} = \left(-\frac{\chi}{3}\right) \vec{E}_0$$

Ce nouveau champ \vec{E}_1 va lui-même contribuer à la polarisation de la sphère en ajoutant une nouvelle contribution \vec{P}_1 :

$$\vec{P}_1 = \epsilon_0 \chi \vec{E}_1 = \epsilon_0 \chi \left(-\frac{\chi}{3}\right) \vec{E}_0$$

Cette polarisation supplémentaire va ajouter au champ électrique une contribution \vec{E}_2 :

$$\vec{E}_2 = -\frac{\vec{P}_1}{3\epsilon_0} = \left(-\frac{\chi}{3}\right)^2 \vec{E}_0$$

En procédant par itération, on voit que la n^{ième} contribution au champ sera :

$$\vec{E}_n = \left(-\frac{\chi}{3}\right)^n \vec{E}_0$$

Finalement, le champ total sur le volume de la sphère sera :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n + \dots = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\chi}{3}\right)^n \right] \vec{E}_0 \quad (5.35)$$

soit :

$$\vec{E} = \left(\frac{1}{1 + \chi/3} \right) \vec{E}_0 = \frac{3}{2 + \epsilon_r} \vec{E}_0 \quad (5.36)$$

Le champ électrique est toujours uniforme sur le volume de la sphère. On déduit de (5.36) que la polarisation finale de la sphère vaut :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} = \frac{\epsilon_0 \chi}{1 + \chi/3} \vec{E}_0 \quad (5.37)$$

On obtient évidemment le même résultat en écrivant que $\vec{P} = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{P}_n$

Remarque 1 : On peut présenter les choses de manière réciproque : la polarisation de la sphère induit dans la sphère le champ :

$$\vec{E}_{sphère} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} = -\frac{\chi}{3 + \chi} \vec{E}_0 \quad (5.38)$$

On retrouve bien que le champ total porté par la sphère est :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{sphère} = \vec{E}_0 - \frac{\chi}{3 + \chi} \vec{E}_0 = \frac{3}{3 + \chi} \vec{E}_0$$

soit le champ donné par (5.36).

Remarque 2 : Dans le cas d'une sphère conductrice placée dans un champ \vec{E}_0 uniforme, le champ des charges induites annule complètement \vec{E}_0 dans la sphère. Dans le cas d'une sphère diélectrique, il n'y a qu'une annulation partielle due aux charges liées.

Barreau uniformément polarisé

Dans le cas d'un barreau uniformément polarisé (cf Figure 5.14), le champ \vec{E} est celui créé par deux plans uniformément chargés aux extrémités du cylindre. Noter la forme "vers l'extérieur" des lignes de \vec{E} à l'intérieur du cylindre qui vient du fait que les deux surfaces chargées ne sont pas des plans infinis. Il y a alors un "effet de bord".

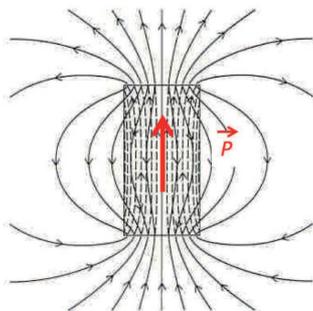


FIGURE 5.14 – Lignes du champ \vec{E} d'un barreau uniformément polarisé (traits pleins). Les lignes de \vec{D} sont en pointillés à l'intérieur du barreau, à l'extérieur elles suivent rigoureusement celles de \vec{E} (figure extraite de [1]).

5.2.6 Champ dépolarisant

On considère une plaque de diélectrique lhi plongée dans un champ électrique créé par les charges libres des armatures d'un condensateur (cf Figure 5.15). On suppose que les bords n'ont pas d'influence.

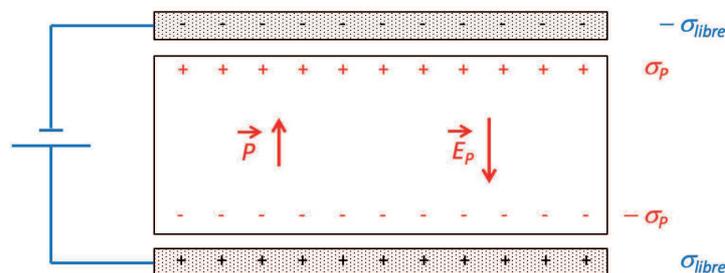


FIGURE 5.15 – Les charges liées d'un diélectrique créent un champ électrique au sein du diélectrique.

Les charges libres portées par les armatures créent un champ $\vec{E}_0 = \sigma_{libre}/\epsilon_0 \vec{u}_z$. Ce champ induit dans le diélectrique une polarisation \vec{P} de même sens que \vec{E}_0 . Il apparaît donc sur les faces du diélectrique des charges de polarisation de densité $\sigma_P = \pm P$. La présence de ces charges fait que le diélectrique est alors le siège d'un nouveau champ :

$$\vec{E}_P = -\frac{|\sigma_P|}{\epsilon_0} \vec{u}_z = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad (5.39)$$

Le champ \vec{E}_P est de sens opposé au champ \vec{E}_0 qui lui a donné naissance. Le champ électrique total dans la plaque est donc simplement :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_P = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad (5.40)$$

On peut montrer que le champ créé dans un diélectrique par la polarisation est toujours de sens opposé au champ qui a donné naissance à la polarisation. C'est pourquoi on l'appelle *champ dépolarisant*, même s'il n'est pas associé à un quelconque mécanisme de dépolérisation.

5.2.7 Equations de Maxwell

Equations de Maxwell

Dans le cas d'une polarisation statique, les équations de **Maxwell** dans un milieu diélectrique prennent la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libre} & \text{(MG)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} & \text{(MA)} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} & \text{(MF)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \text{(M}\Phi\text{)} \end{array} \right. \quad (5.41)$$

Remarque : Il ne suffit pas de connaître (MG) et (MF) pour déterminer \vec{E} et \vec{D} . Il faut également connaître la relation constitutive qui relie \vec{E} à \vec{D} .

Interface entre deux milieux lhi

Dans un modèle surfacique, on en déduit les relations de passage entre les valeurs des champs dans les régions (1) et (2) séparées par une surface (S). Par analogie avec le § 1.7.2, on obtient immédiatement :

- la continuité de la composante tangentielle de \vec{E} .
- la continuité de la composante normale de \vec{B} .
- la discontinuité de la composante normale de \vec{D} en présence d'une densité surfacique de charge libre (ou *densité superficielle*) σ_{libre} .
- la discontinuité de la composante tangentielle de \vec{B} en présence de courants superficiels \vec{K}_{libre} .

On peut résumer ceci sous la forme :

$$\vec{E}_{T_1} = \vec{E}_{T_2} \quad \vec{B}_{N_1} = \vec{B}_{N_2} \quad \vec{D}_{N_2} - \vec{D}_{N_1} = \sigma_{libre} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \vec{B}_{T_2} - \vec{B}_{T_1} = \mu_0 \vec{K}_{libre} \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (5.42)$$

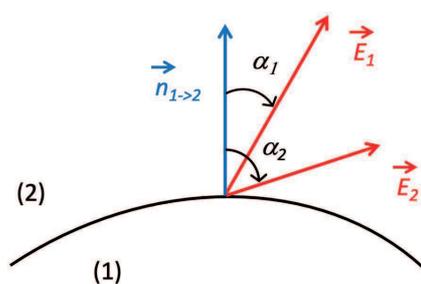


FIGURE 5.16 – Le champ électrique se réfracte à la traversée entre deux diélectriques lhi.

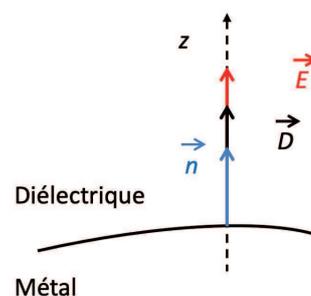


FIGURE 5.17 – Interface métal-diélectrique.

Si de plus la surface de séparation entre les deux milieux ne comporte pas de charges libres ($\sigma_{libre} = 0$), les deux conditions sur E_T et D_N peuvent s'écrire, avec les notations de la Figure 5.16 :

$$E_1 \sin(\alpha_1) = E_2 \sin(\alpha_2) \quad \text{et} \quad \epsilon_1 E_1 \cos(\alpha_1) = \epsilon_2 E_2 \cos(\alpha_2)$$

dont on déduit :

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (5.43)$$

Cette relation caractérise la *réfraction* des lignes du champ \vec{E} à la traversée de la surface (S).

Interface entre un milieu lhi et un conducteur

Dans un conducteur à l'équilibre, \vec{E} , \vec{P} et \vec{D} sont nuls. Comme on le reverra au § 6.1.3, le champ \vec{E} au voisinage de la surface du conducteur est donné par $\vec{E} = \sigma_{tot}/\epsilon_0 \vec{n}$ (cf Figure 5.17).

Si le milieu extérieur au conducteur est le vide, alors \vec{P} et donc σ_P sont nuls. Dans ce cas, $\sigma_{tot} = \sigma_{libre}$.

Si le milieu extérieur au conducteur est un milieu lhi (pour lequel $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$), alors $\vec{D} = \sigma_{libre} \vec{n}$ d'après (5.42). La comparaison des expressions donnant \vec{D} entraîne :

$$\sigma_{libre} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \sigma_{tot} \quad \text{et} \quad \sigma_P = \sigma_{tot} - \sigma_{libre} = -\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_0} \sigma_{tot}$$

On remarque que σ_P est de signe opposé à σ_{libre} et que $|\sigma_{tot}| < |\sigma_{libre}|$.

5.2.8 Force électromagnétique s'exerçant sur un milieu diélectrique

Somme des forces

Dans le cas d'un champ uniforme, la force qui va s'exercer sur la charge positive d'un dipôle rigide va exactement compenser celle qui va s'appliquer sur la charge négative (cf Figure 5.18). La force totale sera nulle.

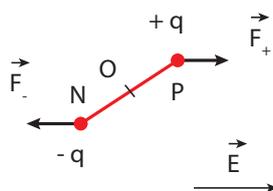


FIGURE 5.18 – Action d'un champ électrique sur un dipôle.

Dans le cas d'un champ inhomogène, la force totale ne sera pas nulle. Par remplir cette condition, la variation du champ électrique doit être très rapide, vu la petitesse de la dimension physique d'un dipôle. Dans ce cas, on peut écrire :

$$\vec{F} = q \left(\vec{E}(P) - \vec{E}(N) \right) = q d \vec{E}$$

En supposant des dimensions de dipôle très petites, on a par exemple $dE_x = (\vec{\nabla} E_x) \cdot \vec{NP}$, d'où $d\vec{E} = (\vec{NP} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$ et finalement :

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \quad (5.44)$$

Remarque : On pourrait imaginer de réécrire (5.44) sous la forme $\vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{p} \cdot \vec{E})$. Attention car cette forme suppose que \vec{p} ne dépend pas de la position, ce qui est parfois faux.

Moment des forces

Dans le cas d'un champ uniforme, un couple va s'appliquer sur un dipôle rigide :

$$\vec{\Gamma} = (\vec{r}_+ \times \vec{F}_+) + (\vec{r}_- \times \vec{F}_-) = \left[\frac{\vec{NP}}{2} \times q \vec{E} \right] + \left[-\frac{\vec{NP}}{2} \times (-q) \vec{E} \right] = q \vec{NP} \times \vec{E}$$

Finalement, le couple auquel le dipôle rigide est soumis s'écrit :

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (5.45)$$

Exemple : force s'exerçant sur un diélectrique solide plongé dans un champ

Un matériau diélectrique solide plongé dans un champ électrique (cf Figure 5.19) va subir une force qui peut le mettre en mouvement : les charges liées se concentrent en face des charges libres de signe opposé et vont être à l'origine d'une force mais cette force va s'équilibrer entre le haut et le bas du condensateur. Par contre, le champ de fuite à la transition entre le condensateur et l'extérieur va être à l'origine d'une force inhomogène longitudinale donnée par (5.44) qui va mettre en mouvement le diélectrique. On peut déterminer cette force à l'aide de considérations énergétiques. En notant W l'énergie électrostatique du système, une variation infinitésimale de position ds va modifier W d'une quantité égale au travail effectué :

$$dW = F_{app} ds \quad (5.46)$$

où F_{app} est la force appliquée sur le diélectrique. Cette force doit juste compenser la force électrique \vec{F} dans le diélectrique, c'est-à-dire $\vec{F}_{app} = -\vec{F}$ (sinon, il y aurait une accélération et on devrait prendre en compte un terme d'énergie cinétique). Finalement, la force électrique sur la tranche de matériau diélectrique de la Figure 5.19 s'écrit :

$$F = -\frac{dW}{ds} \quad (5.47)$$

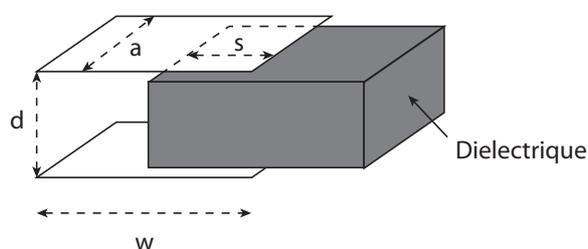


FIGURE 5.19 – Un diélectrique est attiré à l'intérieur d'un condensateur chargé (voir texte).

Comme on le reverra au chapitre 6, l'énergie stockée dans le condensateur est :

$$W = \frac{1}{2} C \Phi^2 \quad \text{avec} \quad C = \frac{\epsilon_0 a}{d} (w + \chi s) \quad (5.48)$$

La capacité C dépend de la longueur w des armatures et de la distance s qui contient le matériau diélectrique. En bougeant le diélectrique, le potentiel Φ va varier, mais la charge totale sur les armatures $Q = C \Phi$ va rester constante. C'est pourquoi on doit exprimer W en fonction de Q :

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (5.49)$$

D'après (5.47), on a :

$$F = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{dC}{ds} = \frac{1}{2} \Phi^2 \frac{dC}{ds} \quad (5.50)$$

Comme $dC/ds = \epsilon_0 \chi a/d$, on a finalement :

$$F = \frac{1}{2} \epsilon_0 \chi \frac{a}{d} \Phi^2$$

Remarque : Une erreur fréquente dans ce problème est d'utiliser (5.48) au lieu de (5.49), c'est-à-dire de travailler à potentiel constant au lieu de travailler à charge constante. On obtient alors :

$$F = -\frac{dW}{ds} = -\frac{1}{2} \Phi^2 \frac{dC}{ds}$$

c'est-à-dire le résultat correct (5.50) avec (juste) une erreur de signe ! En fait, dans ce cas, on doit également prendre en compte le travail ΦdQ du générateur, c'est-à-dire qu'on ne peut plus écrire (5.46) mais :

$$dW = F_{app} ds + \Phi dQ$$

On a alors (avec dans ce cas $dQ = \Phi dC$ puisque Φ est constant) :

$$F = -\frac{dW}{ds} + \Phi \frac{dQ}{ds} = -\frac{1}{2} \Phi^2 \frac{dC}{ds} + \Phi^2 \frac{dC}{ds} = \frac{1}{2} \Phi^2 \frac{dC}{ds}$$

En prenant en compte le travail du générateur, on retombe bien sur (5.50)!

5.2.9 Complément sur les densités de charges équivalentes

Un diélectrique peut être décomposé à l'échelle microscopique en groupes de particules dont la charge totale est nulle. On note \vec{r}_N la position du centre de masse du groupe N et \vec{r}_{Nk} les positions relatives par rapport au centre de masse des k charges q_{Nk} qui composent le groupe.

En utilisant (1.2) à la fois pour les charges libres et les charges liées, la densité volumique de charges nivelée du milieu s'écrit :

$$\rho(\vec{r}) = \sum_N \sum_k q_{Nk} f(\vec{r} - \vec{r}_N - \vec{r}_{Nk})$$

puisque la charge q_k est située en $\vec{r} + \vec{r}_{Nk}$. Comme la fonction f a par construction des variations faibles à l'échelle atomique, on peut effectuer un développement au 1^{er} ordre par rapport à \vec{r}_{Nk} :

$$f(\vec{r} - \vec{r}_N - \vec{r}_{Nk}) \approx f(\vec{r} - \vec{r}_N) - \vec{r}_{Nk} \cdot \vec{\nabla} [f(\vec{r} - \vec{r}_N)]$$

d'où :

$$\rho(\vec{r}) \approx \sum_N \left(\sum_k q_{Nk} \right) f(\vec{r} - \vec{r}_N) - \sum_N \left(\sum_k q_{Nk} \vec{r}_{Nk} \right) \cdot \vec{\nabla} [f(\vec{r} - \vec{r}_N)]$$

Le 1^{er} terme est nul puisque la charge totale de chaque groupe est nulle. Dans le 2^e, on voit apparaître le moment dipolaire électrique $\vec{p}_N = \sum_k q_{Nk} \vec{r}_{Nk}$ du groupe N . Finalement :

$$\rho(\vec{r}) \approx - \sum_N \vec{p}_N \cdot \vec{\nabla} [f(\vec{r} - \vec{r}_N)] \quad (5.51)$$

De la même manière que pour ρ , on peut utiliser la fonction de nivellement f pour écrire la polarisation nivelée \vec{P} à partir des moments \vec{p}_N (situés en \vec{r}_N) :

$$\vec{P}(\vec{r}) = \sum_N \vec{p}_N f(\vec{r} - \vec{r}_N) \quad (5.52)$$

En utilisant (A.8) et en écrivant $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \sum_N \vec{p}_N \cdot \vec{\nabla} [f(\vec{r} - \vec{r}_N)]$ puisque seule f dépend de \vec{r} et en comparant avec (5.51), on obtient finalement :

$$\rho(\vec{r}) \approx - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}) \quad (5.53)$$

L'équation (5.53) ne conserve que l'aspect dipolaire des distributions de charges! On ne parle pas ici de correction quadrupolaire, etc.. dont on suppose qu'elles sont négligeables.

Remarque 1 : La théorie de **Lorentz** développée depuis le début de ce chapitre ne prend en compte que les composantes dipolaires du champ et exclu toute correction d'ordre supérieur.

Remarque 2 : On comprend alors pourquoi la définition (5.1) de la polarisation donne des résultats qui s'écartent assez souvent des résultats expérimentaux, sauf pour les milieux faiblement polarisés. Dans les années 1990, de nouveaux modèles basés sur la mécanique quantique ont été développés, pour lever une incohérence intrinsèque au modèle de **Lorentz** : si $\rho_P \propto \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$, alors \vec{P} contient plus d'informations que ρ_P , tandis que comme $\vec{P} = d\vec{p}/dV$, \vec{P} doit contenir moins d'informations que ρ_P ...

5.3 Susceptibilité électrique

Dans le cas d'un milieu lhi (pour lequel $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$) constitué de molécules apolaires, le moment dipolaire induit sur chaque molécule est de la forme $\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}_\ell$. Comme $\vec{P} = n \vec{p} = n \epsilon_0 \alpha \vec{E}_\ell$, on a envie de dire que la relation qui lie χ et α est :

$$\chi = n \alpha \quad (5.54)$$

En fait, il faut faire attention car le champ électrique \vec{E} dans $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ est le champ macroscopique dans le milieu tandis que le champ \vec{E}_ℓ dans $\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}_\ell$ est le champ microscopique réellement subi par la molécule. On va voir qu'à part dans les milieux dilués, il n'est pas évident que ces deux champs soient égaux.

5.3.1 Champ local \vec{E}_ℓ

Champ microscopique

Par définition, le *champ microscopique* \vec{e} est le champ dans le vide entre les particules qui constituent le milieu. Il a une structure très « tourmentée » puisque dans un solide cristallin, il varie considérablement sur des distances de l'ordre de la maille (quelques 10^{-10} m). Le champ macroscopique \vec{E} est la moyenne spatiale de \vec{e} au voisinage du point M :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} \vec{e} dV$$

Par construction, \vec{E} varie plus lentement que \vec{e} (§ 1.1.2). C'est \vec{E} qui est utilisé dans les équations de **Maxwell** mais on ne peut plus raisonner ainsi avec la polarisabilité puisque seul compte alors le champ local \vec{E}_ℓ , réellement vu par la molécule.

Remarque : L'introduction des densités nivelées a permis de passer du champ microscopique \vec{e} au champ moyen \vec{E} (nécessaire pour la théorie de **Maxwell**). Dans ce paragraphe, on va recouvrer la valeur du champ au niveau de la molécule. La difficulté vient du fait que le lissage a fait disparaître les informations locales sur le milieu.

Champ local \vec{E}_ℓ

En suivant la méthode proposée par **Lorentz**, on considère une molécule du diélectrique située en A . On note \vec{E} et \vec{P} le champ électrique et la polarisation macroscopique en A .

On sépare par la pensée le milieu en deux zones : une cavité sphérique de rayon a (typiquement $a \approx 100 \cdot 10^{-10}$ m), centrée sur A , et le reste du milieu (cf Figure 5.20). On choisit a de façon à être grand devant la distance entre deux éléments polarisables, et petite devant les variations macroscopiques de \vec{E} .

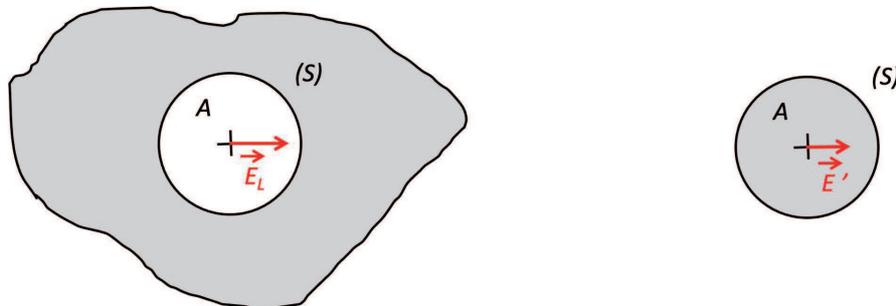


FIGURE 5.20 – Détermination du champ local par la méthode de **Lorentz**. Le champ en A est la somme des champs \vec{E}_L (créé par la matière à grande distance) et \vec{E}' (créé par l'environnement proche de A) (voir texte).

Les dipôles externes sont situés à des distances grandes devant la dimension inter-moléculaire, et on n'a pas besoin du détail de leurs positions pour calculer leur effet en A . On peut utiliser la polarisation macroscopique

\vec{P} . Le champ \vec{E}_L au centre de la cavité creuse est la somme du champ macroscopique \vec{E} et du champ créé par la distribution surfacique sphérique sur la surface (S) qui porte la densité $\sigma = \vec{P} \cdot \vec{n} = -P \cos(\theta)$. En utilisant le cas de la sphère uniformément polarisée, on trouve immédiatement que le champ est uniforme dans la sphère et vaut $\vec{P}/(3\epsilon_0)$. On a donc :

$$\vec{E}_L = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (5.55)$$

Ce champ \vec{E}_L est appelé *champ de Lorentz*.

Le calcul de la contribution \vec{E}' des dipôles situés dans la sphère de rayon a est plus délicat et repose sur le modèle utilisé. De manière générale, on aura :

$$\vec{E}_\ell = \vec{E}_L + \vec{E}' \quad (5.56)$$

Dans certains cas, cette contribution \vec{E}' est négligeable et le champ local peut se réduire au champ de **Lorentz**. On va voir un exemple d'une tel calcul au paragraphe suivant.

5.3.2 Formule de Clausius-Mossotti

Dans ce paragraphe, on va appliquer ce résultat au cas d'un fluide constitué de molécules apolaires, libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. On supposera que les distances entre molécules sont telles que le champ créé par les molécules les plus proches peut encore être assimilé à celui d'un dipôle. C'est par exemple le cas pour les gaz rares, ainsi que O_2 , N_2 et CO_2 . On note n leur densité volumique et α leur polarisabilité. Si on considère une molécule A particulière, les autres molécules se situent à des distances aléatoires. On considère une molécule en M portant le moment dipolaire \vec{p} . On pose $\vec{r} = \overrightarrow{AM}$. Le champ local créé en A par le dipôle \vec{p} situé en M est :

$$\vec{e} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} [3(\vec{r} \cdot \vec{p})\vec{r} - r^2\vec{p}] \quad (5.57)$$

car il suffit⁵ de remplacer \vec{r} par $-\vec{r}$ dans (2.60). On va maintenant moyenner sur toutes les positions possible de la molécule M , à \vec{p} fixé. La projection sur (Ox) de (5.57) s'écrit :

$$e_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3x^2 - r^2}{r^5} p_x + \frac{3xy}{r^5} p_y + \frac{3xz}{r^5} p_z \right]$$

A r fixé, sur la surface de la sphère, les valeurs moyennes de xy et xz sont nulles par symétrie. La valeur moyenne sur la sphère de $3x^2 - r^2$ est égale à celles de $3y^2 - r^2$ et de $3z^2 - r^2$. Or la somme de ces trois valeurs moyenne est nulle, donc chaque terme de la somme l'est également. On en déduit donc que la valeur moyenne de e_x est nulle. On obtient le même résultat pour les valeurs moyennes de e_y et e_z . En intégrant ensuite sur r puis sur tous les \vec{p} , on conservera ce résultat : le champ \vec{E}' créé par les autres molécules en A est nul en moyenne.

Le champ local \vec{E}_ℓ se résume donc au champ de **Lorentz** (5.55) :

$$\vec{E}_\ell = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (5.58)$$

Cette expression est connue sous le nom d'*expression de Lorentz du champ local*. La polarisation devient :

$$\vec{P} = n\alpha\epsilon_0\vec{E}_\ell = n\epsilon_0\alpha\left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}\right) \quad \text{soit} \quad \vec{P} = \frac{n\alpha}{1 - n\alpha/3}\epsilon_0\vec{E}$$

On en déduit que la susceptibilité χ s'écrit :

$$\chi = \frac{n\alpha}{1 - n\alpha/3} \quad (5.59)$$

5. Ceci se fait en supposant qu'on peut toujours utiliser (2.60), même si on n'est plus forcément dans le cadre strict d'une l'approximation dipolaire. Le problème est là...

En introduisant la masse volumique μ et la masse molaire M (reliés par $\mu = n M/\mathcal{N}_A$), on obtient finalement la *formule de Clausius-Mossotti* :

$$\frac{M}{\mu} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{\mathcal{N}_A \alpha}{3} \quad (5.60)$$

où \mathcal{N}_A représente le nombre d'Avogadro.

Remarque 1 : L'expression (5.60) est valable pour un milieu assimilable à une répartition aléatoire de dipôles (un gaz par exemple) ou pour un cristal cubique. Elle n'est généralement pas valable pour les milieux denses (liquides et solides) et est complètement fautive pour les cristaux non cubiques.

Remarque 2 : L'intérêt de la relation (5.60) est de permettre une mesure du paramètre microscopique α à l'aide de données purement macroscopiques. Néanmoins, comme elle suppose en particulier l'isotropie de la polarisabilité des molécules et de leur répartition, (5.60) ne pourra souvent donner au mieux qu'un ordre de grandeur.

Remarque 3 : Pour un milieu peu dense, $\chi \ll 1$. On peut donc remplacer (5.59) et (5.60) par :

$$\chi \approx n \alpha \quad \text{et} \quad \frac{M}{\mu} (\epsilon_r - 1) \approx \mathcal{N}_A \alpha \quad (5.61)$$

Remarque 4 : Variation de α avec la température

1. Pour les milieux apolaires, on s'attend uniquement à une polarisation par déformation qui ne dépend pas de la température : $\alpha = \alpha_{elec} + \alpha_{ion}$ ne doit pas dépendre de T .
2. Pour les milieux polaires, la polarisation dipolaire dépend de la température. Au final on a :

$$\alpha = \alpha_{elec} + \alpha_{ion} + \alpha_{dipolaire} = \alpha_0 + \frac{p_0^2}{3 \epsilon_0 k_B T} \quad (5.62)$$

où $\alpha_0 = \alpha_{elec} + \alpha_{ion}$ regroupe les termes de polarisation par déformation.

3. La Figure 5.21 représente la variation de $M/\mu \times (\epsilon_r - 1)/(\epsilon_r + 2)$ pour un gaz constitué de molécules non polaires (CH_4) et pour deux gaz constitués de molécules polaires (HCl et HI). On en déduit :

- (a) La pente des courbes fournit le moment dipolaire p_0 . L'ordonnée à l'origine fournit α_0 .
- (b) HCl a un plus grand moment dipolaire que HI .
- (c) HI a une plus grande polarisabilité électronique et ionique que HCl (HI est plus grosse).
- (d) CH_4 est apolaire (logique puisqu'elle possède un centre de symétrie).

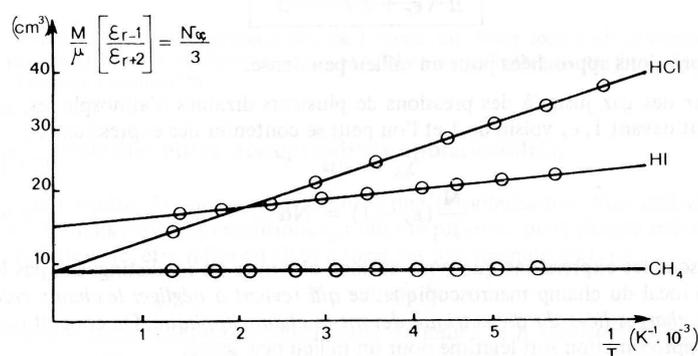


FIGURE 5.21 – Validité de la formule de **Clausius-Mossotti** pour trois gaz (Figure extraite de [7, Tome 2, page 174]).

Remarque 5 : D'après (5.59), on a $\chi_e \rightarrow \infty$ quand $n\alpha/3 \rightarrow 1$. En fait, la densité n est alors trop importante pour que l'hypothèse d'indépendance des molécules entre elles, nécessaire à l'établissement de (5.59), puisse s'appliquer.

Remarque 6 : Pour les molécules polaires, on utilise pour \vec{E}_ℓ une expression beaucoup plus complexe due à **Onsager**.

5.3.3 Quelques cas particuliers

Piézoélectricité

Dans certains cristaux dépourvus de centre de symétrie (par exemple le quartz), une contrainte mécanique peut engendrer un déplacement relatif de certains ions, et donc engendrer une modification de la polarisation. Le cristal est alors dit *piézoélectrique*. La réciproque est également vraie : un cristal piézoélectrique se déforme sous l'action d'un champ \vec{E} .

La cristallographie classe les cristaux en 32 classes, dont 11 possèdent un centre de symétrie. Sur les 21 classes restantes, 20 possèdent des propriétés piézoélectriques. Le premier cristal piézoélectrique connu est le *sel de Seignette*.

Pyroélectricité

Parmi les 20 classes de cristaux piézoélectriques, 10 peuvent posséder une polarisation spontanée, dépendant de la température. C'est la *pyroélectricité*.

Remarque : La pyroélectricité (et la ferroélectricité ci-dessous) sont les seuls cas connus de polarisation spontanée.

Ferroélectricité

Parmi les corps pyroélectriques, certains d'entre eux présentent la particularité qu'un champ \vec{E} modifie leur polarisation. C'est la *ferroélectricité*. C'est par exemple le cas du titanate de baryum BaTiO_3 (cf Figure 5.22) qui peut voir dans certaines conditions sa susceptibilité χ_e atteindre plusieurs milliers.

On peut également montrer que la susceptibilité d'un corps ferroélectrique suit, au dessus d'une température T_C dite *température de Curie*, une loi du type :

$$\chi_e = \frac{Cste}{T - T_C}$$

On peut noter que la polarisation d'un corps ferroélectrique dépend de l'histoire du cristal. En faisant varier lentement \vec{E} entre deux valeurs opposées (cf Figure 5.23), on obtient une courbe caractéristique, dite d'*hystérésis*, extrêmement non linéaire.

5.4 Polarisation en régime variable

La description d'un diélectrique en termes de charges de polarisation faite précédemment n'est pas limitée aux régimes statiques mais convient également aux régimes variables dans le temps, à condition de considérer des volumes mésoscopiques et des fréquences pas trop élevées⁶ pour définir la polarisation $\vec{P}(t)$.

6. Pour que tout ceci ait un sens (et que le modèle soit applicable), il faut que toute dépendance temporelle ait un temps caractéristique plus court que le temps de parcours d'une onde électromagnétique sur le volume. En prenant des volumes mésoscopiques de 5 nm^3 , la fréquence limite acceptable est de 10^{16} Hz , ce qui se situe dans l'ultraviolet. On pourra donc utiliser une description continue et moyennée de la matière pour des fréquences allant jusqu'à 10^{15} - 10^{16} Hz (ce qui correspond à des longueurs d'onde de 100 nm , largement supérieures aux dimensions inter-atomiques).

Par contre, pour des rayons X, la structure discontinue de la matière devient apparente. Ceci explique la diffusion des rayons X sur un réseau cristallin, mais dépasse le cadre de ce cours qui ne s'intéresse qu'aux milieux continus.

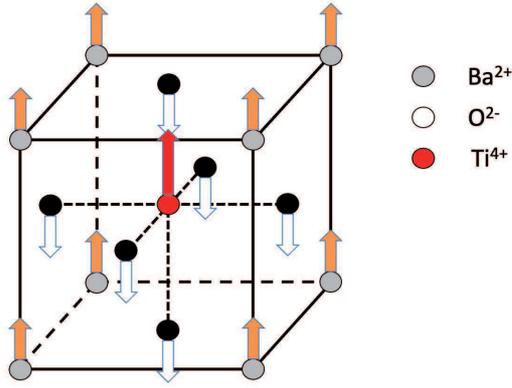


FIGURE 5.22 – Maille du titanate de baryum BaTiO₃.

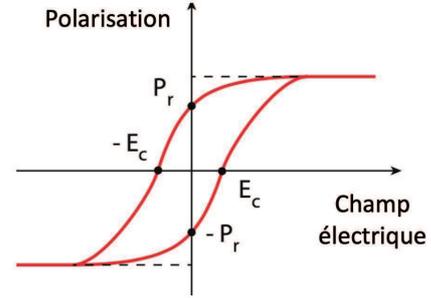


FIGURE 5.23 – Courbe d’hystérésis décrite par (\vec{E}, \vec{P}) pour un corps ferroélectrique - E_c représente le *champ coercitif* et P_r la *polarisation rémanente*.

5.4.1 Courant de polarisation - Equations de Maxwell dans un diélectrique

Lorsqu’un diélectrique est soumis à un champ \vec{E} variable, les dipôles qui le constituent peuvent se mettre à vibrer et engendrent donc un courant. Par exemple, dans le cas de l’atome d’hydrogène soumis à un champ électrique, on aura $\vec{P} = -ne\vec{r}$ (où \vec{r} est la position de l’électron). La densité de courant de déplacement associée à ce courant s’écrit :

$$\vec{J}_P = \left(\sum_i \rho_i \vec{v}_i \right) = -ne \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

On généralise ceci pour dire que dans tous les cas, la densité volumique de courant lié, associée à une polarisation \vec{P} , se met sous la forme :

$$\vec{J}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \tag{5.63}$$

La densité volumique qu’il faut prendre en compte pour les équations de **Maxwell** est alors la somme des densités associées aux courants libres et aux courants liés, soit :

$$\vec{J}_{tot} = \vec{J}_{libre} + \vec{J}_P \tag{5.64}$$

Les équations de **Maxwell** dans un milieu diélectrique s’écrivent finalement :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libre} & \text{(MG)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J}_{libre} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) & \text{(MA)} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{(MF)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \text{(M}\Phi\text{)} \end{cases} \tag{5.65}$$

Remarque : Vu la modélisation utilisée, il est logique de constater que la conservation de la charge s’applique aux charges de polarisation puisque :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_P + \frac{\partial \rho_P}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) \equiv 0 \tag{5.66}$$

5.4.2 Analyse intuitive

Cas d’une excitation sinusoïdale

On place un diélectrique lhi maintenu à température constante dans un champ \vec{E} de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$ et on s’intéresse au régime permanent. Il est intuitif que si les variations de \vec{E} sont rapides, la polarisation

induite ne suivra ces variations qu'avec un certain retard, puisque la polarisation nécessite un déplacement d'atomes à l'échelle microscopique. La polarisation $\vec{P}(t)$ aura donc un déphasage $\phi(\omega)$ avec le champ électrique $\vec{E}(t)$ qui dépend a priori de la fréquence, soit :

$$\vec{P}(t) = \epsilon_0 \chi \vec{E}_0 \cos(\omega t - \phi)$$

En développant le cosinus, on voit qu'il existe deux coefficients $\chi'(\omega) = \chi \cos(\phi)$ et $\chi''(\omega) = \chi \sin(\phi)$ permettant d'écrire :

$$\vec{P}(t) = \epsilon_0 [\chi'(\omega) \cos(\omega t) + \chi''(\omega) \sin(\omega t)] \vec{E}_0 \quad (5.67)$$

La polarisation comporte donc un terme en phase avec \vec{E} (proportionnel à $\chi'(\omega)$) et un terme en quadrature avec \vec{E} (proportionnel à $\chi''(\omega)$). De manière équivalente, il existe également des coefficients $\epsilon'(\omega)$ et $\epsilon''(\omega)$ pour décrire $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ selon :

$$\vec{D}(t) = [\epsilon'(\omega) \cos(\omega t) + \epsilon''(\omega) \sin(\omega t)] \vec{E}_0$$

avec $\epsilon'(\omega) = \epsilon_0 [1 + \chi(\omega)]$ et $\epsilon''(\omega) = \epsilon_0 \chi''(\omega)$. Le déphasage $\delta(\omega)$ entre \vec{D} et \vec{E} vérifie :

$$\tan[\delta(\omega)] = \frac{\epsilon''(\omega)}{\epsilon'(\omega)} \quad (5.68)$$

On peut donc ramener la réponse de la matière à un champ variable à l'étude des deux fonctions $\epsilon'(\omega)$ et $\epsilon''(\omega)$.

On sait que tout système linéaire excité à l'aide d'une fréquence sinusoïdale peut être représenté en notation complexe. On peut alors écrire :

$$\begin{cases} \vec{E}(t) = \text{Re}(\vec{\mathcal{E}}_\omega(t)) & \text{avec} & \vec{\mathcal{E}}_\omega(t) = \vec{\mathcal{E}}_0 \exp(-i\omega t) \\ \vec{P}(t) = \text{Re}(\vec{\mathcal{P}}_\omega(t)) & \text{avec} & \vec{\mathcal{P}}_\omega(t) = \vec{\mathcal{P}}_0 \exp(-i\omega t) \end{cases} \quad (5.69)$$

Remarque 1 : Les indices à $\vec{\mathcal{E}}_\omega(t)$ et $\vec{\mathcal{P}}_\omega(t)$ rappellent que $\chi(\omega)$ ne peut s'utiliser qu'avec une excitation sinusoïdale. Ceci n'est pas restrictif car on peut exprimer tout signal $\vec{\mathcal{E}}(t)$ sous forme d'une combinaison linéaire des $\vec{\mathcal{E}}_\omega(t)$ à l'aide d'une transformation de Fourier. Avec ces notations, on a bien une relation de la forme :

$$\vec{\mathcal{P}}_\omega(t) = \epsilon_0 \chi(\omega) \vec{\mathcal{E}}_\omega(t) \quad (5.70)$$

en posant :

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega) \quad (5.71)$$

Il suffit de prendre la partie réelle de (5.70) pour retrouver (5.67). On introduit donc naturellement la *susceptibilité diélectrique complexe* $\chi(\omega)$.

Remarque 2 : A la limite des faibles fréquences, on doit retrouver le cas statique : $\lim_{\omega \rightarrow 0} [\chi'(\omega)] = \chi_{statique}$ et $\lim_{\omega \rightarrow 0} [\chi''(\omega)] = 0$.

Remarque 3 : La description en fonction de $(\epsilon'(\omega), \epsilon''(\omega))$ est rigoureusement équivalente à la description en fonction de $(\chi'(\omega), \chi''(\omega))$.

Cas général : retard à la polarisation

On peut généraliser ce qui précède à des champs variables mais non sinusoïdaux. En supposant que le lien entre la polarisation et le champ reste linéaire, un retard de la polarisation \vec{P} par rapport au champ \vec{E} s'écrira :

$$\vec{P}(t) = \epsilon_0 \int_0^\infty F(\theta) \vec{E}(t - \theta) d\theta \quad (5.72)$$

Cete relation exprime le fait que la contribution à \vec{P} à l'instant t du champ \vec{E} à l'instant $t - \theta$ est pondérée par la *fonction de retard* $F(\theta)$. La forme de $F(\theta)$ est une fonction du milieu. Avec l'aide de (5.69) et en reportant $\vec{\mathcal{E}}_\omega(t - \theta) = \vec{\mathcal{E}}_\omega(t) \exp(i\omega\theta)$ dans (5.72), on retrouve (5.70) avec :

$$\chi(\omega) = \int_0^\infty F(\theta) \exp(i\omega\theta) d\theta \quad (5.73)$$

soit :

$$\chi'(\omega) = \int_0^\infty F(\theta) \cos(\omega\theta) d\theta \quad \text{et} \quad \chi''(\omega) = \int_0^\infty F(\theta) \sin(\omega\theta) d\theta \quad (5.74)$$

Ces deux relations nous permettent d'envisager un lien en $\chi'(\omega)$ et $\chi''(\omega)$. On pourrait penser a priori que dispersion et absorption sont deux phénomènes indépendants. Il n'en est rien.

Relations de Kramers-Kronig

Les relations de **Kramers-Kronig** sont générales dès que l'on regarde la réponse d'une grandeur à une perturbation externe appliquée. On peut les démontrer en supposant deux principes très généraux en physique (la causalité et la linéarité de la réponse). Un aperçu de la démonstration est donné en Complément E.2 à la fin de cette partie.

Appliquées à notre problème, ces relations amènent un lien très étroit entre $\chi'(\omega)$ et $\chi''(\omega)$:

$$\chi'(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi''(s)}{\omega - s} ds \right) \quad \text{et} \quad \chi''(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi'(s)}{\omega - s} ds \right) \quad (5.75)$$

où \mathcal{P} représente la partie principale⁷. Elles indiquent que la causalité (la polarisation ne peut exister avant que le champ n'ait été appliqué) impose des relations entre les parties réelles et imaginaires de l'indice. On retiendra que χ' est complètement déterminé par la connaissance jusqu'à l'infini de χ'' , et réciproquement.

5.4.3 Modèle de Drüde-Lorentz

L'interaction d'un porteur de charges de masse m avec un milieu matériel lhi est très bien décrite à l'aide du *modèle de Drüde-Lorentz* (ou modèle de l'*électron élastiquement lié*) qui introduit, en plus de la force de **Lorentz** :

1. une force d'amortissement visqueux $\vec{f}_v = -m\vec{v}/\tau$ où τ est un temps caractéristique.
2. une force de rappel $\vec{f}_r = -m\omega_0^2\vec{r}$ où ω_0 est la pulsation de l'oscillateur que forme la charge en mouvement autour de sa position d'équilibre et \vec{r} le vecteur position par rapport à la position d'équilibre.

A l'aide de cette description, on peut à la fois modéliser les charges libres ($\omega_0 = 0$) et les charges liées ($\omega_0 \neq 0$). En notant q la charge de la particule, l'équation différentielle qui régit le mouvement de l'électron est :

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q(\vec{E}_\ell + \vec{v} \times \vec{B}) - \frac{m}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt} - m\omega_0^2\vec{r}$$

où \vec{E}_ℓ représente le champ local effectivement appliqué au porteur de charge étudié. Tant qu'on n'est pas dans un corps ferromagnétique (cf chapitre 7), l'effet du champ \vec{B} de l'onde sera toujours négligeable devant l'effet du champ \vec{E} car :

$$\frac{\|\vec{F}_{\text{magnétique}}\|}{\|\vec{F}_{\text{électrique}}\|} = \frac{q\|\vec{v} \times \vec{B}\|}{q\|\vec{E}\|} < \frac{vB}{E} \approx \frac{v}{c} \ll 1$$

On a donc finalement :

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q\vec{E}_\ell - \frac{m}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt} - m\omega_0^2\vec{r} \quad (5.76)$$

⁷. La partie principale d'une fonction f est le premier terme non nul du développement limité de cette fonction, lorsqu'il existe.

En adoptant une représentation complexe en $\vec{r} = \vec{r}_0 \exp(-i\omega t)$, le régime forcé du mouvement de l'électron s'écrit :

$$-m\omega^2 \vec{r}_0 = q\vec{E}_\ell + i\frac{m}{\tau}\omega \vec{r}_0 - m\omega_0^2 \vec{r}_0 \quad (5.77)$$

soit :

$$\vec{r}_0 = \frac{q}{m} \frac{\vec{E}_\ell}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau} \quad (5.78)$$

Ce déplacement entraîne l'apparition d'un moment dipolaire électrique complexe $\vec{p}_0 = q\vec{r}_0$. En supposant que $\vec{E} \approx \vec{E}_\ell$, on en déduit l'expression d'une *susceptibilité électrique complexe* $\chi(\omega)$:

$$\chi(\omega) = \chi(0) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau} \quad \text{avec} \quad \chi(0) = \frac{nq^2}{m\epsilon_0\omega_0^2} \quad (5.79)$$

où $\chi(0)$ représente la *susceptibilité statique*.

Remarque 1 : Il est équivalent pour un milieu lhi peu dense de parler de susceptibilité complexe $\chi(\omega)$ ou de *polarisabilité complexe* $\alpha(\omega)$ puisque, comme pour (5.61) :

$$\chi(\omega) = n\alpha(\omega) \quad (5.80)$$

Remarque 2 : On pourrait montrer que dans le cas de certains milieux denses (par exemple les solides isotropes), la correction de **Lorentz** du champ local (5.58) se justifie. L'équation du mouvement d'un électron (5.77) devient alors :

$$-m\omega^2 \vec{r}_0 = q\vec{E}_\ell + \frac{nq^2}{3\epsilon_0} \vec{r}_0 - i\frac{\omega}{\tau} \vec{r}_0 - m\omega_0^2 \vec{r}_0$$

puisque dans ce cas, la polarisation s'écrit $\vec{P} = nq\vec{u}$. Il suffit alors de remplacer ω_0 par ω'_0 telle que :

$$\omega_0'^2 = \omega_0^2 - \frac{nq^2}{3m\epsilon_0} \quad (5.81)$$

L'étude de ce paragraphe est donc pertinente car générale !

Remarque 3 : La force de ce modèle extrêmement simple est de permettre de s'adapter à une très grande variété de situations :

- A basse fréquence, on distingue les charges libres pour lesquelles la force de rappel est nulle ($\omega_0 = 0$) et les charges liées pour lesquelles cette force est non nulle.
- A la limite des hautes fréquences ($\omega \gg \omega_0$), ceci n'est plus vrai et il devient impossible de distinguer entre charges libres et liées. L'ensemble des charges contribue alors à la polarisation du milieu.

Remarque 4 : Ce modèle permet de prédire des quantités thermiques, électriques et mécaniques. Comme la conduction dans les métaux est assurée par les électrons libres, il est logique de voir qu'il existe un lien entre les conductivités thermique (λ) et électrique (γ). Expérimentalement, ce lien est montré par la *loi de Wiedemann et Franz* :

$$\frac{\lambda}{\gamma} = \left(\frac{\pi k_B}{\sqrt{3}e} \right)^2 T = 2,45 \cdot 10^{-8} T$$

5.4.4 Cas d'un milieu lhi en régime sinusoïdal

A priori, la puissance totale volumique fournie par le champ électromagnétique à un diélectrique est donnée par :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dV} = \vec{J}_{tot} \cdot \vec{E} = \left(\vec{J}_{libre} + \vec{J}_P \right) \cdot \vec{E} \quad (5.82)$$

puisque à la fois les charges de polarisation et les charges libres sont concernées (un déplacement de charges, même local, nécessite de l'énergie).

On suppose désormais que le seul courant volumique à considérer est le courant de polarisation \vec{J}_P (sinon, il faut ajouter une contribution \vec{J}_{libre}). Pour un milieu linéaire, homogène et isotrope soumis à un champ $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-i\omega t)$, la polarisation s'écrit :

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E}_0 (\epsilon_r' - 1 + i\epsilon_r'') \exp(-i\omega t)$$

Donc à l'instant t :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dV} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot \vec{E} = \omega \epsilon_0 E_0^2 [\epsilon_r'' \cos^2(\omega t) - (\epsilon_r' - 1) \sin(\omega t) \cos(\omega t)]$$

La puissance volumique reçue par le diélectrique a donc pour valeur moyenne :

$$\left\langle \frac{d\mathcal{P}}{dV} \right\rangle = \epsilon_r'' \omega \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \quad (5.83)$$

où E_0 est l'amplitude du champ électrique.

L'étude des courbes $\epsilon_r''(\omega) = f(\omega)$ renseigne sur l'énergie absorbée par le milieu à la fréquence ω . En particulier, on définit les *zones de transparence* pour lesquelles $\epsilon_r''(\omega) \approx 0$ et les *zones d'absorption* pour lesquelles $\epsilon_r''(\omega) \gg 0$.

5.4.5 Susceptibilités et permittivités complexes

Déphasage

Le caractère complexe de $\chi(\omega)$ dans (5.79) traduit le déphasage entre le champ et la polarisation, c'est-à-dire entre la cause et sa conséquence. On peut distinguer trois domaines particuliers :

1. Les basses fréquences ($\omega \ll \omega_0$), pour lesquelles $\chi(\omega) \approx \chi(0)$: on retrouve le cas des régimes stationnaires pour lesquels χ est une constante réelle positive (§ 5.2.1).
2. Les fréquences intermédiaires ($\omega \approx \omega_0$), pour lesquelles $\chi(\omega) \approx \chi(0) \omega_0 \tau \exp(i\pi/2)$: \vec{P} et \vec{E} sont en quadrature.
3. Les hautes fréquences ($\omega \gg \omega_0$), pour lesquelles $\chi(\omega) \approx -\chi(0) \times \omega_0^2/\omega^2$: \vec{P} et \vec{E} sont en opposition de phase, et $\chi(\omega)$ tend vers zéro à très haute fréquence.

En séparant les parties imaginaires de $\chi(\omega)$ selon $\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)$, on obtient :

$$\chi'(\omega) = \chi(0) \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2} \quad \text{et} \quad \chi''(\omega) = \chi(0) \frac{\omega \omega_0^2/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2} \quad (5.84)$$

Etude de $\chi'(\omega)$

La partie réelle $\chi'(\omega)$ s'annule pour $\omega = \omega_0$ et sa dérivée vaut :

$$\frac{d\chi'(\omega)}{d\omega} = -2\omega \omega_0 \chi(0) \frac{-(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega_0^2/\tau^2}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2)^2} \quad (5.85)$$

Cette dérivée s'annule pour ω_1 et ω_2 telles que :

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{1}{2\tau} \quad \text{et} \quad \omega_2 \approx \omega_0 + \frac{1}{2\tau} \quad (5.86)$$

Dans le cas d'un amortissement faible ($1/\tau \ll \omega_0$), la largeur caractéristique $\Delta\omega$ de l'intervalle sur lequel $\chi'(\omega)$ change de signe est (cf Figure 5.24) :

$$\Delta\omega \approx \omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{\tau} \quad (5.87)$$

On peut également utiliser une autre approche et présenter ceci en introduisant le *facteur de qualité* Q du système⁸.

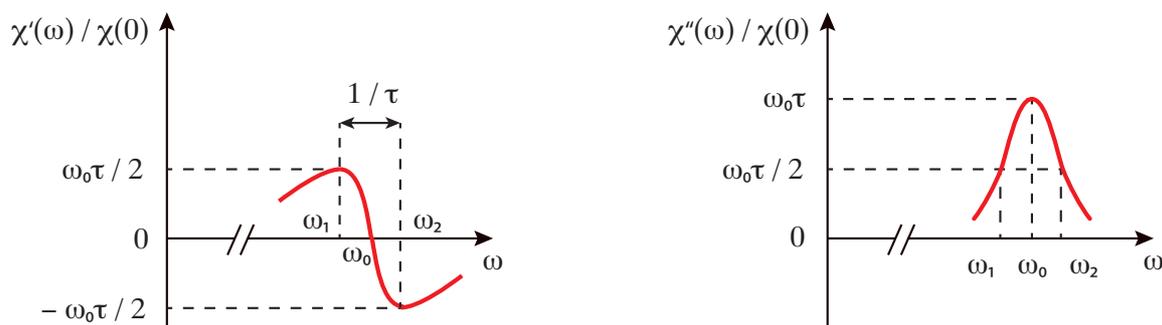


FIGURE 5.24 – Variations des parties réelles et imaginaires de la susceptibilité complexe au voisinage de ω_0 dans le cas d'un amortissement faible ($1/\tau \ll \omega_0$).

Etude de $\chi''(\omega)$

Au contraire, la partie imaginaire $\chi''(\omega)$ est maximale pour $\omega = \omega_0$ avec $\chi''(\omega_0) = \omega_0 \tau \chi(0)$ et décroît rapidement dès qu'on s'écarte de ω_0 . Au voisinage du maximum, on peut écrire :

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega) \quad (5.88)$$

ce qui permet de mettre $\chi''(\omega)$ sous la forme :

$$\chi''(\omega) \approx \chi(0) \frac{1}{1 + 4\tau^2(\omega - \omega_0)^2} \quad (5.89)$$

Cette courbe d'absorption, représentée sur la Figure 5.24, a la forme caractéristique d'une *lorentzienne*. Le maximum de la courbe d'absorption⁹ est $\omega_0 \tau$.

Jusqu'à quel point faut-il croire ce modèle ?

Sur la papier, ce modèle donne de très bons résultats. Attention toutefois à ne pas trop en surestimer les performances. A titre d'exemple, la Figure 5.25 compare les mesures et les attendus pour ϵ' et ϵ'' dans le cas du silicium.

5.4.6 Les divers types de polarisation en régime variable

Ce paragraphe aborde la description microscopique des divers types de polarisation en régime variable, déjà étudiés dans le cas statique (§ 5.1).

8. On a alors $\Delta\omega \approx \omega_0/Q$ et :

$$\begin{cases} \omega_1 \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q}\right) \\ \omega_2 \approx \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q}\right) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\chi'_{max}(\omega)}{\chi(0)} \approx \frac{\omega_0 \tau}{2} = \frac{Q}{2} \\ \frac{\chi'_{min}(\omega)}{\chi(0)} \approx -\frac{\omega_0 \tau}{2} = -\frac{Q}{2} \end{cases}$$

9. En utilisant le facteur de qualité, le maximum de $\chi''(\omega)$ vaut :

$$\frac{\chi''_{max}(\omega)}{\chi(0)} = \omega_0 \tau = Q$$

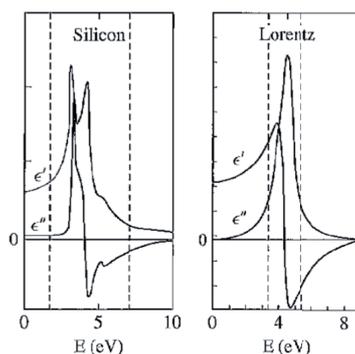


FIGURE 5.25 – Comparaison entre les mesures (à gauche) et la théorie (à droite) pour les parties réelles et imaginaires de ϵ dans du silicium (Figure extraite de [13]).

Qu'est-ce qu'une résonance optique ?

On peut montrer qu'un faisceau de lumière interagit avec une vapeur de sodium (cf Figure 5.26) de la manière suivante : la puissance est intégralement transmise, sauf autour d'une fréquence particulière ω_0 pour laquelle le rayonnement est réémis dans toutes les directions avec les caractéristiques du rayonnement émis par un dipôle oscillant¹⁰.

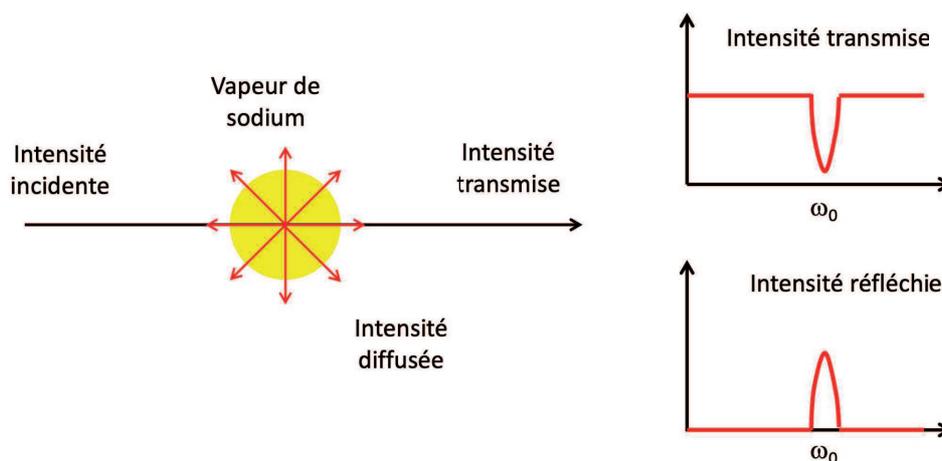


FIGURE 5.26 – Dans une *résonance optique*, les dipôles atomiques se mettent à vibrer pour $\omega \approx \omega_0$.

On interprète ceci en disant que le dipôle atomique se met à vibrer intensément pour $\omega \approx \omega_0$ et qu'il y a *résonance optique*. Ces résonances correspondent à de l'absorption, telle qu'elle vient d'être décrite au § 5.4.5.

Il est important de souligner que le spectre de rayonnement est très vaste (cf Figure 5.27) et qu'il recouvre des domaines de fréquence très différents. On va voir qu'il existe des résonances sur toute la largeur de ce spectre (donc des valeurs de ω_0 très différentes).

Polarisation électronique

Les électrons ayant une très faible masse, tout effet d'inertie les concernant ne se manifestera qu'à haute fréquence ($\omega_{0,e} \approx 10^{16}$ rad/s). La condition $\omega_{0,e} \tau \gg 1$ sera toujours vérifiée. En appliquant les résultats du § 5.4.5, on voit qu'il existe deux zones intéressantes :

¹⁰. La théorie du dipôle oscillant sera vue au Chapitre 9.

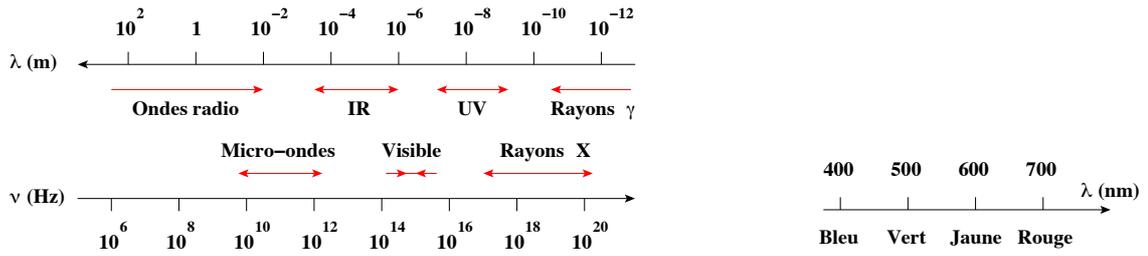


FIGURE 5.27 – Spectre du rayonnement (à gauche) et sa partie visible (à droite).

1. Dans le visible ($\omega \ll \omega_{0,e}$), la susceptibilité est réelle et positive :

$$\chi_e(\omega) \approx \chi_e(0) \frac{\omega_{0,e}^2}{\omega_{0,e}^2 - \omega^2} \quad (5.90)$$

2. Dans le cas où au contraire $\omega \gg \omega_{0,e}$, la susceptibilité est également réelle mais négative :

$$\chi_e(\omega) \approx -\chi_e(0) \frac{\omega_{0,e}^2}{\omega^2} \quad (5.91)$$

La réponse d'un milieu présentant une ou deux fréquences de résonance électronique est représentée sur les Figures 5.28 et 5.29.

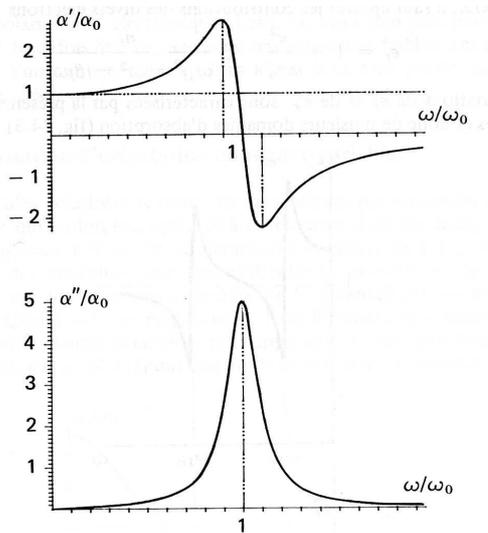


FIGURE 5.28 – Variation de ϵ'_r et ϵ''_r en fonction de la pulsation (pour $m\omega_0/\tau = 0,2$).

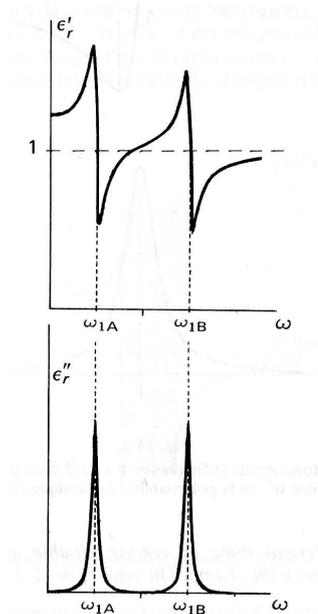


FIGURE 5.29 – Variation de ϵ'_r et ϵ''_r pour un diélectrique présentant deux bandes d'absorption à ω_{1A} et ω_{1B} .

Polarisation ionique

On a cette fois $\omega_{0,i} \approx 10^{12}$ rad/s, c'est-à-dire que les pulsations propres se situent dans l'infrarouge lointain, tout en conservant la condition $\omega_{0,i} \tau \gg 1$. Tout comme précédemment, il existe deux zones notables :

1. Dans le domaine des micro-ondes et en deçà ($\omega \ll \omega_{0,i}$), la susceptibilité est réelle et vaut :

$$\chi_i(\omega) \approx \chi_i(0) \frac{\omega_{0,i}^2}{\omega_{0,i}^2 - \omega^2} \quad (5.92)$$

2. Au contraire, pour $\omega_{0,i} \ll \omega$ (domaine visible et au delà), la susceptibilité reste réelle mais très faible :

$$\chi_i(\omega) \approx -\chi_i(0) \frac{\omega_{0,i}^2}{\omega^2} \approx 0 \quad (5.93)$$

Schématiquement, la réponse d'un milieu est la même que pour la polarisation électronique.

Polarisation dipolaire

La situation est différente pour la polarisation dipolaire puisqu'elle ne peut pas être instantanée car elle implique une rotation des molécules qui est de fait perturbée par les chocs intermoléculaires. Debye a montré que la plupart du temps, il convient de prendre un retard exponentiel :

$$F(\theta) = \frac{\chi_{or}(0)}{\tau} \exp\left(-\frac{\theta}{\tau}\right) \quad (5.94)$$

où τ est un temps caractéristique du milieu et $\chi_{or}(0)$ la susceptibilité statique. De manière équivalente, la polarisation suit l'équation de **Debye** :

$$\tau \frac{d\vec{P}(t)}{dt} + \vec{P}(t) = \epsilon_0 \chi_{or}(0) \vec{E}(t) \quad (5.95)$$

En utilisant (5.73) ou la méthode traditionnelle consistant à écrire le lien entre le champ et la polarisation, on obtient :

$$\chi_{or}(\omega) = \chi_{or}(0) \frac{1}{1 - i\omega\tau_D} \quad \text{avec} \quad \tau_D = \frac{1}{\omega_0^2 \tau} \quad (5.96)$$

Les parties réelles et imaginaires de $\chi_{or}(\omega)$ forment les *équations de Debye* :

$$\chi'_{or}(\omega) = \chi_{or}(0) \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_D^2} \quad \text{et} \quad \chi''_{or}(\omega) = \chi_{or}(0) \frac{\omega \tau_D}{1 + \omega^2 \tau_D^2} \quad (5.97)$$

Ici aussi, on peut distinguer deux domaines (cf Figure 5.30) :

1. Si $\omega \tau_D \ll 1$, on obtient $\chi'_{or}(\omega) \approx \chi_{or}(0)$ et $\chi''_{or}(\omega) \approx 0$.
2. Si $\omega \tau_D \gg 1$, on obtient $\chi'_{or}(\omega) \approx \chi''_{or}(\omega) \approx 0$.

Par exemple, l'eau¹¹ suit le modèle ci-dessus (cf Figure 5.31) avec $1/\tau_D = 10^{11}$ rad/s.

Polarisation totale

On vient de voir que divers mécanismes peuvent se rencontrer pour expliquer la polarisation dépendant du temps :

1. La *polarisation électronique* qui concerne tous les milieux.
2. La *polarisation ionique* qui concerne les milieux présentant des liaisons ioniques.
3. La *polarisation d'orientation* qui concerne les milieux possédant un moment dipolaire permanent.

La *polarisation totale* représente la somme de toutes ces contributions.

On peut résumer les résultats précédents sur la Figure 5.32 qui représente l'allure de ϵ' et ϵ'' pour un système dilué de molécules polaires n'ayant qu'une seule fréquence propre de vibration et une seule fréquence propre électronique.

11. D'après J. Barthel et al., *A Computer-controlled System of Transmission Lines for the Determination of the Complex Permittivity of Lossy Liquids between 8.5 and 90 GHz*, Ber. Bunsenges. Phys. Chem., 1991. 95(8), 853 - 859.

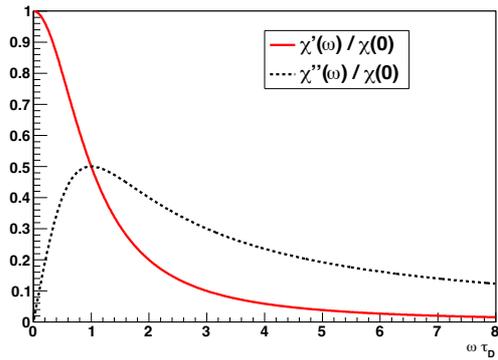


FIGURE 5.30 – Variations des parties réelles et imaginaires de la susceptibilité d'orientation dans le modèle de Debye.

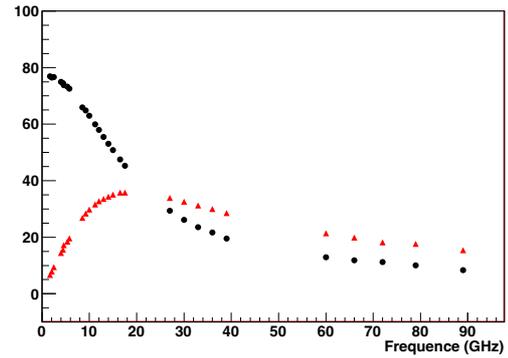


FIGURE 5.31 – Variation de la partie réelle (cercles) et de la partie imaginaire (triangles) de la permittivité diélectrique de l'eau à 25 °C en fonction de la pulsation.

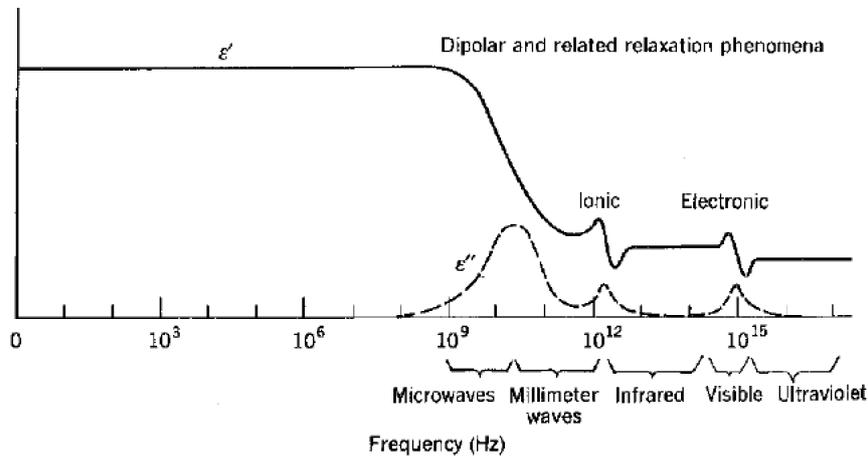


FIGURE 5.32 – Les variations de ϵ' et ϵ'' en fonction de la fréquence permettent de distinguer les divers types de polarisation.

Dans l'infra-rouge lointain et dans le domaine hertzien, pour un milieu constitué de molécules polaires (comme l'eau par exemple), toute la molécule peut osciller dans le champ électrique de l'onde incidente. L'eau possède ainsi en particulier :

1. Une zone de transparence dans le domaine visible.
2. Des zones d'absorption dans l'ultraviolet (transitions entre niveaux électroniques) et dans l'infra-rouge (modes de vibration de la molécule).
3. Une absorption dans le domaine des ondes centimétriques. Ce phénomène est le principe de base des fours à micro-ondes qui chauffent les aliments par l'intermédiaire de l'eau qu'ils contiennent.

Une dernière limite au modèle

Il faut faire attention à ne pas chercher trop de précision dans d'éventuelles estimations sur les milieux diélectriques avec des champs variables. Par exemple, les susceptibilités sont susceptibles de varier avec la fréquence, ce qui ne simplifie pas la modélisation (cf Table 5.2).

	100 Hz	1 MHz	10 GHz
Polyéthylène	2,26	2,26	2,26
Verre	5,0	4,84	4,82
Titanate de Baryum	1250	1140	100
Benzène	2,28	2,28	2,28
Eau	81	78,2	34

TABLE 5.2 – Variations de certaines permittivités de liquides et de solides avec la fréquence, pour des températures proches de 25°C [1].

5.5 Aspects énergétiques des milieux diélectriques : le travail de polarisation

Les considérations énergétiques associées aux milieux diélectriques peuvent être assez complexes. Pour créer une distribution de charges, il faut fournir l'énergie de constitution de la distribution, qui est différente s'il existe ou non un milieu diélectrique dans le système. Le cas général est donné en Complément E.3. On ne donne ici sans démonstration que le cas simple de systèmes pour lesquels on peut négliger le couplage entre la polarisation et les charges libres du milieu (et donc négliger toute correction au champ appliqué par le champ créé par la polarisation).

Tout matériau diélectrique peut recevoir de l'énergie sous forme de chaleur, de travail dû aux forces de pression, de déplacement, et de *travail électrique*. Dans le cas général, la polarisation \vec{P} dépend du champ \vec{E} , qui lui-même dépend de \vec{P} . Si la polarisation est faible, alors le couplage entre le diélectrique et le champ \vec{E} sera négligeable. On peut alors supposer que la présence du diélectrique ne modifie pas la répartition des charges libres.

On montre que le travail δW_e reçu se met sous la forme :

$$\delta W_e = \iiint_{Espace} \left(\epsilon_0 \vec{E} \cdot \delta \vec{E} + \vec{E} \cdot \delta \vec{P} \right) dV \quad (5.98)$$

Dans le cas des faibles couplages, on pourra séparer les deux contributions à δW_e : le premier terme de (5.98) sera le travail fourni au champ macroscopique \vec{E} tandis que le deuxième terme sera associé au travail fourni au diélectrique. Dans ce cas, le *travail électrique* peut se mettre sous trois formes différentes :

1. L'énergie électrostatique du vide (externe au milieu diélectrique) s'écrit :

$$W_1 = \iiint_{Espace} \left(\int_E \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{E} \right) dV \quad (5.99)$$

2. L'énergie fournie au milieu diélectrique introduit dans le champ (énergie interne au milieu diélectrique) s'écrit :

$$W_2 = \iiint_{Espace} \left(\int_P \vec{E} \cdot d\vec{P} \right) dV \quad (5.100)$$

3. Enfin, l'énergie fournie par le générateur en introduisant le milieu diélectrique dans le champ s'écrit :

$$W_m = \iiint_{Espace} \int_D \left(\vec{E} \cdot d\vec{D} \right) dV \quad (5.101)$$

Cette dernière relation ne fait que traduire la conservation de l'énergie puisque $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, ce qui est équivalent à dire que $W_m = W_1 + W_2$.

On notera bien que la séparation entre W_1 et W_2 ne peut se faire que dans le cas où on peut négliger le couplage entre le diélectrique et le champ \vec{E} .

Conclusion

La polarisation s'étudie principalement en se limitant au 1^{er} ordre du développement limité des termes du potentiel. On comprend donc que de nombreuses limites apparaissent pour les milieux les plus denses, tandis que les milieux dilués seront mieux modélisés. Dans tous les cas, une description plus complète de la matière devra inclure la mécanique quantique, mais ce sera vu l'an prochain.

Chapitre 6

Milieux conducteurs

Sommaire

6.1	Conducteurs en équilibre électrostatique	185
6.2	Propriétés de l'espace entre conducteurs à l'équilibre électrostatique	189
6.3	Capacités et aspects énergétiques	193
6.4	Quelques éléments d'électrocinétique	195

Introduction

Un *conducteur* est un corps dans lequel les charges libres peuvent se déplacer. On traitera principalement du cas des métaux, mais on pourrait également considérer des gaz ou des liquides.

On considèrera toujours dans ce chapitre que le milieu dans lequel baignent les conducteurs est le vide. Si c'est un milieu diélectrique linéaire, il faut remplacer ϵ_0 par $\epsilon_0 \epsilon_r$.

Ce chapitre est principalement constitué de rappels de notions vues lors des années antérieures. C'est pourquoi certaines notions sont abordées très rapidement.

6.1 Conducteurs en équilibre électrostatique

6.1.1 Equilibre électrostatique

Un conducteur est en *équilibre* lorsque ses porteurs de charges ne subissent pas de mouvement d'ensemble¹. Cet équilibre doit être évalué sur un volume « significatif ». Les grandeurs physiques seront des grandeurs moyennées sur un domaine mésoscopique (de 100 à 1000 Å de côté).

Un conducteur est en *équilibre électrostatique* lorsque ses porteurs de charges ne subissent pas de mouvement d'ensemble et que la seule cause possible d'un mouvement d'ensemble est un champ électrostatique.

6.1.2 Champ et potentiel dans un conducteur à l'équilibre électrostatique

Au sein d'un conducteur, l'équation du mouvement d'une macroparticule de masse m et de charge q est :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) - \lambda \vec{v}$$

où, en plus de la force de **Lorentz**, on a considéré une force de frottement visqueux de constante λ . Pour une particule au repos, l'équilibre électrostatique ($\vec{v} = \vec{0}$ pour la macroparticule) entraîne que le champ

1. Les causes de ces mouvements d'ensemble peuvent être des effets variés : un gradient de température (*effet Seebeck* ou *effet Nernst*), un gradient de concentration, etc..

électrique moyen y est nul de même que la force moyenne sur les porteurs de charge. Le potentiel Φ y est constant en tout point, ce qui montre qu'un conducteur à l'équilibre électrostatique est équipotentiel. Pour un conducteur ohmique, on a donc $\vec{J} \equiv \vec{0}$ en tout point du conducteur.

La forme locale du théorème de **Gauss** entraîne que $\rho_{int} = 0$, où ρ_{int} est la densité totale. Pour un conducteur métallique, il faut prendre en compte la densité électronique et la densité due aux charges fixes du réseau.

Remarque 1 : D'après sa définition ($\vec{E} = -\vec{\nabla}(\Phi)$), Φ est dérivable et continu. La valeur de Φ sur la surface est donc la limite de Φ lorsque le point considéré tend vers la surface. La limite d'une fonction constante étant une constante, on en déduit que le potentiel sur la surface du conducteur est égal à la valeur du potentiel en tout point du conducteur.

Remarque 2 : Attention à bien noter qu'habituellement, un ensemble équipotentiel d'équation $\Phi(x, y, z) = Cste$ est une surface. Dans le cas d'un conducteur, c'est un volume.

6.1.3 Champ au voisinage d'un conducteur à l'équilibre électrostatique

Théorème de Coulomb

On déduit de la relation de passage du champ électrique entre deux milieux dans un modèle surfacique (1.77) que le champ \vec{E} proche de la surface d'un conducteur à l'équilibre se met sous la forme :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \quad (6.1)$$

où σ est la densité superficielle de charge à la surface du conducteur et \vec{n} une normale sortante du conducteur (cette relation est connue sous le nom de *théorème de Coulomb*).

Remarque 1 : On note que le champ \vec{E} ne dépend que de la répartition locale des charges sur le conducteur, et ne dépend pas de la position d'éventuelles autres charges.

Remarque 2 : La relation (6.1) peut sembler incompatible avec l'expression du champ \vec{E} d'un plan infini ($\vec{E} = \sigma/(2\epsilon_0) \vec{n}$). En fait, il n'en est rien (cf Figure 6.1). On considère un élément de surface dS et un point M proche de la surface. Si M est suffisamment proche de la surface, on verra dS depuis M sous l'angle solide 2π , c'est-à-dire comme un plan infini. Le champ créé en M par ce plan infini est $\vec{E}_1 = \sigma/(2\epsilon_0) \vec{n}$. Le champ \vec{E}_2 créé en M par toutes les charges autres que celles portées par dS (c'est-à-dire portées par le reste du plan par exemple) vaut $\vec{E}_2 = \vec{E} - \vec{E}_1 = \sigma/(2\epsilon_0)$. Ceci est valable quelque soit la répartition des charges qui sont la source de ce champ.

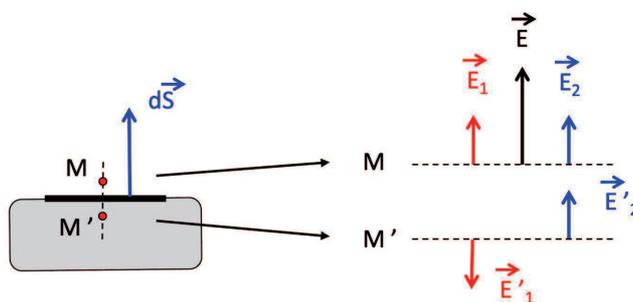


FIGURE 6.1 – Champ au voisinage de la surface d'un conducteur portant une densité superficielle σ (voir texte). Pour l'exemple de la figure, on a pris $\sigma > 0$.

On note M' le symétrique de M par rapport au plan. Le champ créé par la densité surfacique σ y est $\vec{E}'_1 = -\sigma/(2\epsilon_0) \vec{n}$ puisque M' se situe de l'autre côté du plan. Du point de vue des autres charges, M et M' sont infiniment voisins par construction. On en déduit que le champ que créent ces charges est $\vec{E}'_2 = \vec{E}_2$. Le champ total en M' est donc bien $\vec{E}' = \vec{E}'_1 + \vec{E}'_2 = \vec{0}$.

Pression électrostatique

L'élément dS de la surface du conducteur porte la charge $dq = \sigma dS$. Les forces extérieures qui agissent sur cette surface sont celles dues au champ \vec{E}_2 (cf Figure 6.1). La résultante de ces forces est $d\vec{F} = \vec{E}_2 dq$, soit :

$$d\vec{F} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} d\vec{S} \quad (6.2)$$

puisque $d\vec{S} = dS \vec{n}$. La quantité $p = \sigma^2/(2\epsilon_0)$ est homogène à une pression et est appelée *pression électrostatique*.

Remarque 1 : La pression électrostatique est de signe constant et tend toujours à "décoller" les éléments de surface du conducteur sur lesquels elle s'exerce.

Remarque 2 : Le théorème de **Coulomb** permet d'écrire que la pression électrostatique s'écrit également :

$$p = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \quad (6.3)$$

C'est la densité volumique d'énergie électrostatique au voisinage du conducteur.

Remarque 3 : Comme le champ disruptif dans l'air est de l'ordre de $3 \cdot 10^6$ V/m, cela correspond à une pression électrostatique maximale $p_{max} \approx 40$ Pa, ce qui est très faible. La pression électrostatique ne peut s'observer que pour des valeurs de champs élevées. Elle peut dans certains cas déformer ou déplacer le conducteur, les charges communiquant au solide la force électrostatique qu'elles subissent

Lignes de champ au voisinage d'un conducteur

Un conséquence immédiate du théorème de **Coulomb** est que les lignes du champs \vec{E} partent des zones chargées positivement et aboutissent aux zones chargées négativement (cf Figure 6.2). En particulier, aucune ligne de champ ne peut « revenir » vers le conducteur. En effet, la circulation du champ le long d'une ligne impose :

$$\Phi(A) - \Phi(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

ce qui est impossible si A et B sont tous les deux sur le conducteur qui est équipotentiel.

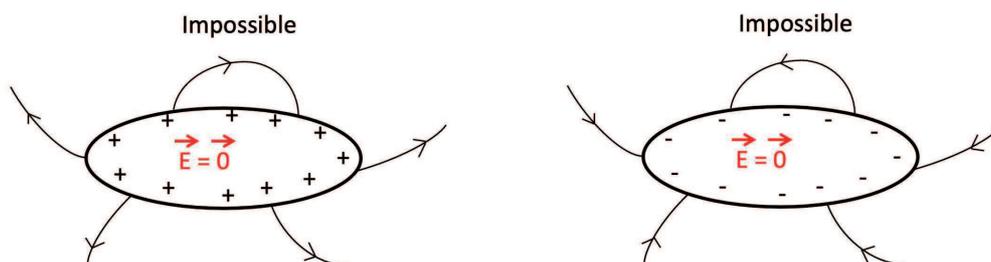


FIGURE 6.2 – Aucune ligne de champ ne peut revenir vers le conducteur dont elle est issue (voir texte).

Pouvoir des pointes

Expérimentalement, on constate qu'à proximité d'une pointe conductrice, le champ électrostatique est toujours très intense. D'après le théorème de **Coulomb**, cela signifie que la densité surfacique de charges est très élevée.

Pour expliquer ceci, on modélise deux sphères chargées de rayons R_i différents, reliées par un fil conducteur et placées loin l'une de l'autre (cf Figure 6.3). On peut donc considérer que chaque sphère est isolée mais

qu'elles sont au même potentiel Φ . Chaque sphère porte la densité superficielle σ_i . Cette égalité des potentiels entraîne que :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{(S_1)} \frac{\sigma_1}{R_1} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{(S_2)} \frac{\sigma_2}{R_2} dS$$

Ceci est valable pour toutes surfaces (S_1) et (S_2) , donc on en déduit que :

$$\frac{\sigma_1}{R_1} = \frac{\sigma_2}{R_2} \quad \text{soit} \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Plus le rayon de la sphère est petit, plus elle porte une densité de charges élevée. Tout se passe comme si les charges « préféraient » les zones à forte courbure, ce qui semble a priori en contradiction avec l'idée naïve que les charges ont tendance à se repousser mutuellement.

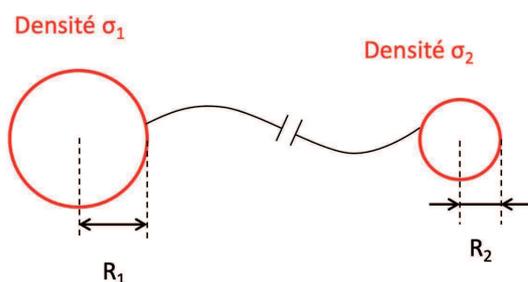


FIGURE 6.3 – Deux sphères chargées, reliées entre elles, permettent d'expliquer le *pouvoir des pointes* (voir texte).

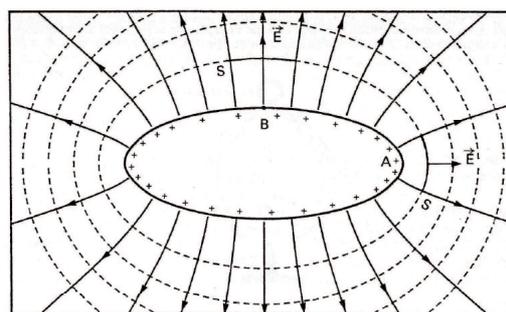


FIGURE 6.4 – Lignes de champ d'un ellipsoïde (figure extraite de [7, Tome I, page 57]).

Qualitativement, on explique ceci de la manière suivante à l'aide de la Figure 6.4 : dans une section à forte courbure telle que proche du point A, la section d'un tube de champ va croître rapidement à partir de la surface du conducteur, ce qui entraîne que le champ va décroître rapidement. Ceci ne sera pas le cas pour une région à faible courbure, telle que celle proche du point B. Or à grande distance, le champ est toujours le même. En imaginant qu'on "remonte" le long de tubes de champ, à partir de points éloignés, on comprend ainsi pourquoi le champ doit être plus intense en A qu'en B².

6.1.4 Effet d'une charge au voisinage d'un conducteur à l'équilibre

On considère une sphère métallique pleine électriquement isolée, face à laquelle on place une charge positive en un point A (cf Figure 6.5). Après un régime transitoire, le champ créé par la charge positive a déplacé les charges libres de la sphère. On dit que le conducteur *se polarise* puisqu'il y a séparation entre les charges positives et les charges négatives. La distribution des charges le long de l'axe Oz est donné par la Figure 6.5 : la densité volumique est nulle à l'intérieur de la sphère et non nulle uniquement sur une petite épaisseur, proche de la surface.

La Figure 6.6 représente les lignes de champ associées à la sphère. La ligne neutre séparant les zones de charges positives et négatives sur la sphère est donnée par la ligne pointillée.

Remarque 1 : \vec{E} et ρ concernent des quantités moyennées et l'épaisseur de la couche superficielle chargée est inférieure au nanomètre.

Remarque 2 : Si le conducteur est chargé, le champ électrostatique total est (d'après le principe de superposition) la somme du champ extérieur et du champ créé par la distribution de charges contenues dans le conducteur. Cela signifie que les charges s'arrangent (ie se déplacent) de telle sorte que le champ qu'elles créent compense exactement, en tout point du conducteur, le champ extérieur.

2. Dans le cas particulier de l'ellipsoïde de révolution d'axes $2a$ et $2b$ de la Figure 6.4, on pourrait montrer que le rapport des champs $E(A)/E(B)$ vaut a/b .

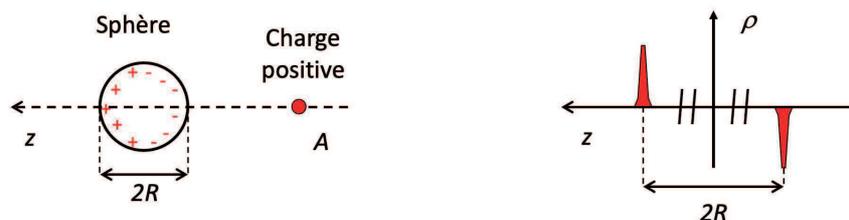


FIGURE 6.5 – Une sphère métallique pleine voit la répartition de ses charges libres modifiées par la présence du champ électrique créé par une charge positive dans son voisinage (à gauche), tandis que la densité volumique de charges sur l'axe Oz varie rapidement au bord de la sphère et s'annule à l'intérieur (à droite).

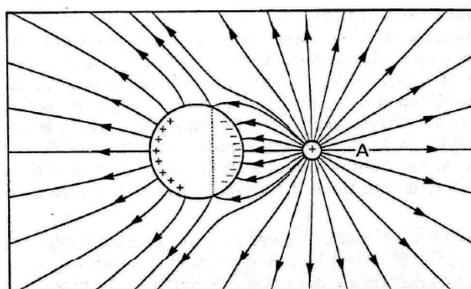


FIGURE 6.6 – Sphère neutre isolée influencée par une charge positive. En pointillés, la ligne neutre séparant les zones de charges positives et négative sur la sphère (Figure extraite de [7, Tome I, page 53]).

6.2 Propriétés de l'espace entre conducteurs à l'équilibre électrostatique

On suppose qu'on est en présence de plusieurs conducteurs dans le vide, tous à l'équilibre électrostatique.

6.2.1 Potentiel et lignes de champ entre les conducteurs

Absence d'extremum de potentiel entre les conducteurs

On suppose que le potentiel passe par un maximum en un point A situé entre des conducteurs à l'équilibre électrostatique. On admettra qu'il existe une sphère centrée sur A qui est totalement en dehors du volume des conducteurs et au sein de laquelle le potentiel décroît du centre vers les bords de la sphère. Les lignes de \vec{E} sont y donc orientées du centre de la sphère vers ses bords, donc le flux de \vec{E} à travers la surface de la sphère est positif. D'après le théorème de **Gauss**, il existe donc une charge positive au sein de cette sphère, ce qui est contraire à l'hypothèse initiale.

On peut effectuer le même raisonnement si A est un minimum de potentiel. On en déduit que le potentiel ne peut être un extremum dans l'espace entre des conducteurs à l'équilibre électrostatique (c'est le théorème d'Earnshaw, § 2.1.4).

Remarque : Entre les conducteurs, le champ ne peut pas être nul partout car sinon le gradient du potentiel le serait également, donc ses dérivées par rapport à x , y ou z le seraient également, et donc le potentiel serait un extremum..

Conséquences pour les lignes de champ

On peut en déduire quelques propriétés sur le comportement des lignes de champ qui arrivent ou qui partent des conducteurs :

- Une ligne de champ ne peut commencer ou s'arrêter qu'en un point où le potentiel est nul.

- En excluant les charges, une ligne de champ ne peut partir que d'un conducteur ou de l'infini, et s'arrêter sur un conducteur ou à l'infini.
- En prenant la convention $\Phi(\infty) = 0$, si une ligne de champ part d'un conducteur au potentiel Φ et va vers l'infini, alors $\Phi > 0$. Si une ligne de champ part de l'infini et s'arrête sur un conducteur au potentiel Φ , alors $\Phi < 0$.
- Le théorème de **Coulomb** permet de dire que la densité surfacique de charges sur un conducteur près du point de départ d'une ligne de champ est positive et qu'elle est négative près de l'arrivée d'une ligne de champ.

Toutes ces propriétés permettent d'expliquer le comportement qualitatif global des lignes de champs de la Figure 6.2.1, où on a par hypothèse $\Phi_1 > \Phi_2 > 0$.

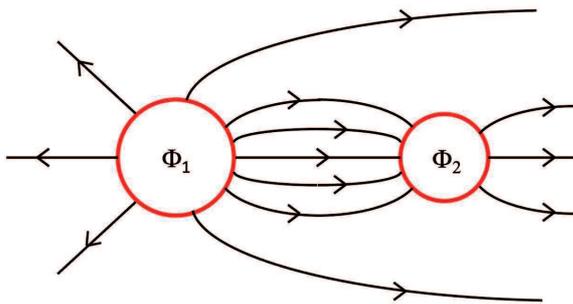


FIGURE 6.7 – Lignes de champ au voisinage de deux conducteurs portés à des potentiels $\Phi_1 > \Phi_2 > 0$.

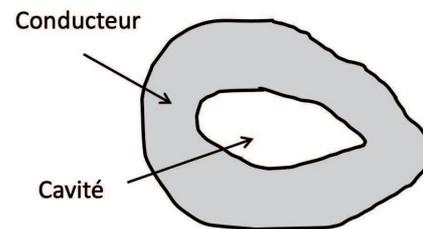


FIGURE 6.8 – Cavité dans un conducteur à l'équilibre.

Propriétés d'une cavité vide de charge dans un conducteur

On considère une cavité dans un conducteur, à l'intérieur de laquelle il n'existe aucune charge (cf Figure 6.2.1). Le potentiel Φ est constant sur la paroi de la cavité (et égal à celui du conducteur). On ne déduit que :

- Φ ne peut pas présenter d'extremum dans cette cavité puisqu'elle ne contient pas de charge : Φ est donc constant dans la cavité.
- Φ étant constant, le champ \vec{E} est partout nul dans la cavité.
- A l'aide du théorème de **Gauss**, on en déduit que la densité surfacique est nulle en tout point de la surface de la cavité.

6.2.2 Equilibre d'un système de conducteurs

Influence électrostatique

On appelle *influence électrostatique* le fait que la répartition des charges au sein d'un conducteur à l'équilibre électrostatique est influencée par les charges portées par les autres conducteurs et par leurs positions. C'est ce qui explique la répartition des charges sur la sphère de la Figure 6.6. Il est important de noter que ceci s'effectue dans les deux sens : si sur la Figure 6.6, A est un conducteur, il subira l'influence de la sphère tout comme elle subit son influence.

Remarque 1 : Le phénomène est réversible. Si on retourne (A) à l'infini, la sphère recouvrera sa configuration initiale.

Remarque 2 : Notez également qu'on peut *charger* un conducteur par influence électrostatique. Sur la Figure 6.6, si on relie (S) à la Terre par un fil conducteur, des électrons rejoindront la sphère et on atteint la configuration de la Figure 6.9. Si on retire ensuite le fil puis qu'on éloigne (A), la sphère se retrouve chargée négativement, par influence.

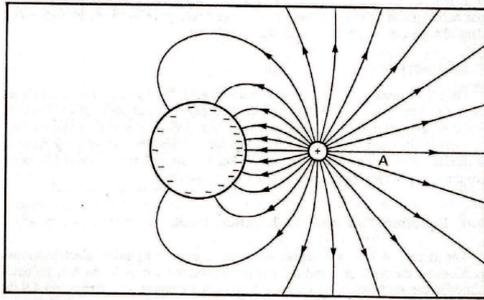


FIGURE 6.9 – Sphère chargée par influence (Figure extraite de [7, Tome I, page 59]).

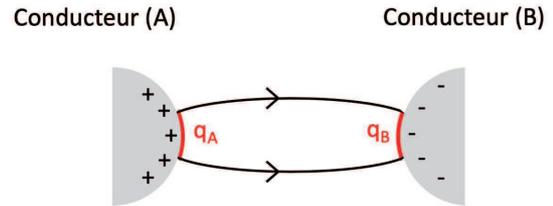


FIGURE 6.10 – Éléments correspondants sur deux conducteurs à l'équilibre électrostatique.

Remarque 3 : On dit de deux conducteurs qu'ils sont en *influence totale* si les lignes de champ de l'un aboutissent toutes sur l'autre. Ceci est en particulier réalisé lorsqu'un conducteur se trouve au sein d'une cavité dans un conducteur. Dans le cas contraire, on parle d'*influence partielle*.

Théorème des éléments correspondants

On considère un tube de champ issu d'un conducteur (A) qui aboutit sur un conducteur (B) (cf Figure 6.10). Les surfaces interceptées par le tube sur les deux conducteurs sont appelés *éléments correspondants*. La surface engendrée par ce tube et les deux surfaces sur les conducteurs forme une surface fermée. Le champ est nul sur les surfaces (Σ_A) et (Σ_B). Le flux à travers le tube est nul. On déduit de l'application du théorème de **Gauss** que $q_A + q_B = 0$: les charges portées par deux éléments correspondants sur deux conducteurs sont opposées.

Remarque : On observe sur les Figures 6.6 et 6.9 que des lignes de champs partent de (A) sans arriver sur la sphère. On en déduit que la valeur absolue de la charge développée par (A) sur la sphère est inférieure à la charge portée par (A).

Théorème de Faraday

En se plaçant dans les conditions d'influence totale de la Figure 6.11 où le conducteur (S_1) est à l'intérieur d'une cavité du conducteur (S_2), on voit apparaître la charge $Q_2^{int} = -Q_1$ sur la face interne du conducteur 2. La charge totale sur le conducteur (S_2) est :

$$Q_2 = Q_2^{int} + Q_2^{ext} = -Q_1 + Q_2^{ext} \quad (6.4)$$

Cette relation est connue sous le nom de *théorème de Faraday*.

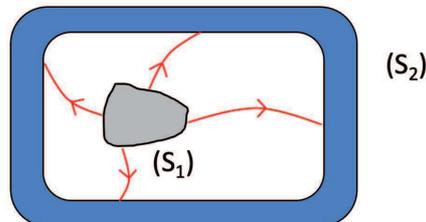


FIGURE 6.11 – Dans le cas d'une influence totale, le *théorème de Faraday* donne la charge totale portée par le conducteur (S_2) en fonction de la charge portée par le conducteur (S_1) et de la densité surfacique de charge à l'extérieur du conducteur (S_2) (voir texte).

Blindage électrostatique : cage de Faraday

Une cavité au sein d'un conducteur à l'équilibre électrostatique est isolée du monde extérieur. On appelle *écran électrostatique parfait* tout conducteur creux maintenu à un potentiel constant. Schématiquement, on peut comprendre le fonctionnement d'un tel dispositif à l'aide de la Figure 6.12 :

- On considère la partie gauche de la Figure 6.12. Lorsqu'on relie le conducteur (S_2) au sol, on impose $Q_2^{ext} = 0$ puisque les charges s'écoulent vers la Terre ou en proviennent. Dans ce cas, le champ électrostatique mesuré à l'extérieur de (S_2) est nul, malgré la présence du conducteur (S_1) chargé à l'intérieur de (S_2) qui impose $Q_2^{int} \neq 0$: on observe un champ électrostatique non nul mesuré à l'extérieur de (S_2), dépendant de la distribution surfacique interne de (S_2). Néanmoins, l'espace extérieur au conducteur (S_2) est protégé de toute influence du conducteur (S_1).

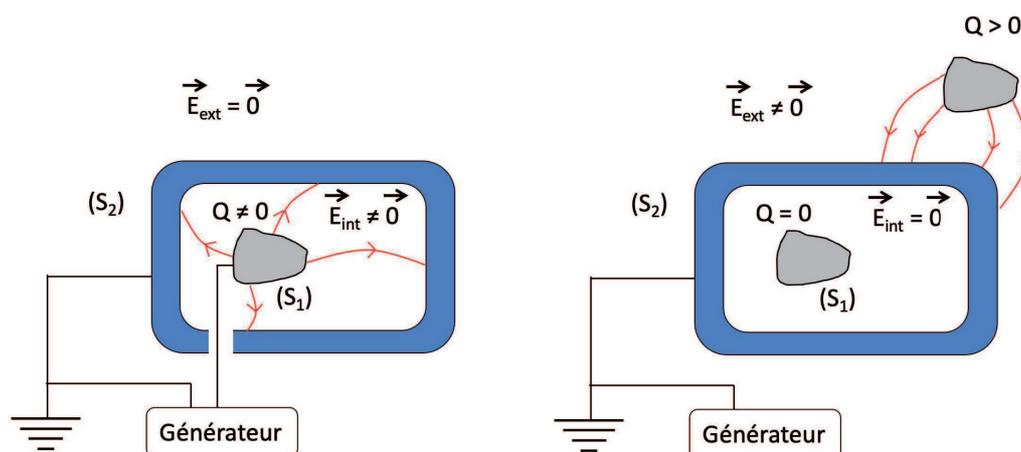


FIGURE 6.12 – Le principe de la *cage de Faraday* repose sur l'analyse des deux situations de cette figure (voir texte).

- On considère maintenant la partie droite de la Figure 6.12 où le conducteur (S_1) porte une charge nulle et où (S_2) est placé à proximité d'autres conducteurs (S) chargés. A l'équilibre électrostatique, on aura $Q_2^{int} = 0$ mais un champ électrostatique non nul mesuré à l'extérieur de (S_2), dépendant de la distribution surfacique externe de (S_2). Le champ électrostatique régnant à l'intérieur du conducteur (S_2) est indépendant du champ à l'extérieur.

Par la pensée, on peut voir que toute situation réelle est une "combinaison linéaire" de ces deux situations. On en déduit que tout conducteur creux maintenu à potentiel constant constitue un écran électrostatique dans les deux sens. Un tel dispositif est appelé *cage de Faraday*.

Principe de superposition

On observe sur les Figures 6.6 et 6.9 deux états d'équilibre électrostatique différents du système constitué de (A) et la sphère :

- Sur 6.6, les deux conducteurs sont isolés donc leurs charges sont fixées.
- Sur 6.9, la charge de (A) est fixée, mais le potentiel de la sphère est fixé à la valeur nulle prise comme référence pour la Terre.

On peut généraliser ceci en disant qu'un état d'équilibre sera atteint si certains conducteurs voient leur charge fixée, tandis que d'autres voient leur potentiel fixé. Le théorème d'unicité permet alors d'assurer l'unicité de la solution de l'équation de **Laplace**.

Remarque : Enfin, noter que la superposition de deux états d'équilibre est un état d'équilibre (aussi appelé *principe de superposition*).

6.3 Capacités et aspects énergétiques

6.3.1 Capacité propre d'un conducteur isolé

On considère un conducteur à l'équilibre électrostatique isolé dans l'espace, chargé avec une distribution surfacique σ et porté au potentiel Φ . En tout point M , on a :

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{Surface} \frac{\sigma(P)}{PM} dS$$

où P représente le point courant sur la surface. Par ailleurs, la charge électrique totale portée par le conducteur est :

$$Q = \iint_{Surface} \sigma dS$$

En multipliant la densité surface par un coefficient λ , la charge totale et le potentiel sont de même multipliés par λ . On obtient donc un nouvel état d'équilibre électrostatique. La linéarité de Q et Φ en fonction de σ entraîne que tout état d'équilibre d'un conducteur isolé est tel que le rapport Q/Φ reste constant.

Par définition, la *capacité électrostatique d'un conducteur à l'équilibre* ou *capacité propre* est définie par :

$$C = \frac{Q}{\Phi} \quad (6.5)$$

où la capacité se mesure en *farads* (F).

Remarque 1 : La capacité d'un condensateur est toujours positive. Elle ne dépend que des caractéristiques géométriques et du matériau dont est fait le conducteur.

Remarque 2 : La détermination analytique de la capacité propre est en général aussi complexe que la résolution de l'équation de **Laplace**. On ne connaît d'expression littérale que dans quelques cas bien particuliers.

Remarque 3 : Pour une sphère, le calcul est immédiat, en écrivant que le potentiel Φ au centre d'une sphère de rayon R portant la charge totale Q répartie à sa surface est simplement $\Phi = Q/(4\pi\epsilon_0 R)$. On en déduit la capacité :

$$C = 4\pi\epsilon_0 R \quad (6.6)$$

Remarque 4 : L'équation (6.6) justifie l'unité de ϵ_0 (F/m).

6.3.2 Condensateurs

Condensateurs dans le vide ou l'air

On appelle *condensateur* un système de conducteurs en influence totale, où les faces en regard de ces conducteurs sont les *armatures*. D'après le théorème des états correspondants (§ 6.2.2), les charges des armatures sont égales et opposées.

Par définition, la *charge du condensateur* est la charge Q de son armature (S_1), et la *tension aux bornes du condensateur* est définie par $U = \Phi_1 - \Phi_2$ (cf Figure 6.13).

Avec des notations évidentes, on a pour la tension U et pour la charge Q :

$$U = \Phi_1 - \Phi_2 = \int_{(S_1)}^{(S_2)} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{et} \quad Q = \iint_{(S_1)} \sigma dS = \epsilon_0 \iint_{(S_1)} \sigma dS$$

où la 2^e égalité vient du théorème de **Coulomb**. En remplaçant Φ par $\lambda\Phi$, \vec{E} , U et Q deviennent respectivement $\lambda\vec{E}$, λU et λQ . Ceci montre que la charge Q est proportionnelle à la tension U .

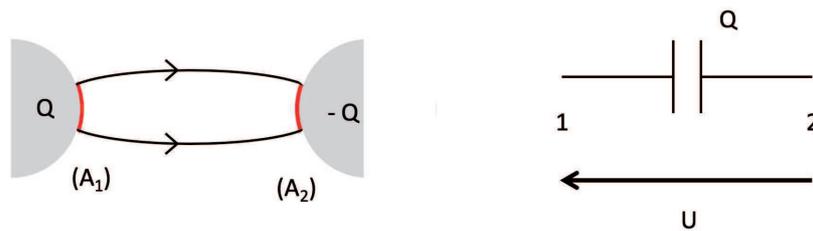


FIGURE 6.13 – Schéma physique (à gauche) et électrique (à droite) d'un condensateur.

Par définition, on pose que la *capacité du condensateur* est :

$$C = \frac{Q}{U} \quad (6.7)$$

Remarque 1 : La capacité C est une caractéristique de la forme et des dimensions du condensateur. Elle est toujours positive.

Remarque 2 : Ayant la même dimension que la capacité propre d'un conducteur (6.5), la capacité d'un condensateur s'exprime en *farads* (F).

Condensateurs diélectriques

Pour améliorer les performances des condensateurs, on remplace souvent l'air par un corps ayant une constante diélectrique ϵ_r élevée. Cela revient à multiplier sa capacité par ϵ_r . Un autre avantage important est que les diélectriques ont généralement des champs disruptifs bien plus élevés que l'air, ce qui permet des tensions d'utilisation plus élevées.

6.3.3 Energie électrostatique d'un condensateur

Définition de l'énergie électrostatique

On considère un condensateur dont les armatures rigides, portées aux potentiels Φ_1 et Φ_2 , portent les charges Q_1 et $Q_2 = -Q_1$. La capacité C du condensateur vérifie $Q_1 = C(\Phi_1 - \Phi_2)$. On ne peut pas appliquer brutalement (2.49) pour obtenir l'énergie potentielle de ces charges, car cette relation a été obtenue pour des charges dans le vide alors que dans un condensateur, les charges se situent dans les armatures, c'est-à-dire "dans de la matière".

On procède donc différemment. En apportant³ depuis l'infini deux petites charges dQ_1 et $dQ_2 = -dQ_1$, le travail de l'opérateur extérieur sera :

$$dW = \Phi_1 dQ_1 + \Phi_2 dQ_2 = \frac{Q_1}{C} dQ_1 = d\left(\frac{Q_1^2}{2C}\right)$$

Le travail dW de l'opérateur extérieur est donc la différentielle d'une fonction qui ne dépend que du condensateur. Par définition, on posera que cette fonction est l'*énergie électrostatique* U_e du condensateur :

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C V_0^2 \quad (6.8)$$

où Q est la charge du condensateur et $V_0 = \Delta\Phi$ la différence de potentiel entre ses deux armatures.

Remarque 1 : On peut remarquer que cette expression a été obtenue sans aucune hypothèse sur la géométrie du condensateur.

3. Il est équivalent de faire ceci avec des générateurs ou avec un transport physique des charges.

Remarque 2 : On a calculé l'énergie électrostatique du condensateur en calculant le travail qu'un opérateur doit fournir au cours d'une transformation réversible. Il est important de souligner que le travail extérieur n'est égal à la variation de l'énergie électrostatique que parce que la transformation est supposée réversible, au sens de la thermodynamique (succession d'états d'équilibre infiniment proches). Si la transformation n'est pas réversible, l'énergie emmagasinée sera inférieure au travail fourni par l'opérateur. On considère par exemple un condensateur relié à un générateur de force électromotrice e constante. L'énergie du condensateur est $Ce^2/2$ à l'équilibre. Le générateur ayant fourni la charge $Q = Ce$, l'énergie électrocinétique qu'il a délivré est Ce^2 . La différence ($Ce^2/2$) a été dissipée par effet **Joule** dans le circuit.

Cas d'un condensateur déformable

On considère désormais un condensateur dont une seule armature reste fixe. La distance x entre les deux armatures n'est donc pas constante. Néanmoins, à x donné, l'énergie électrostatique du condensateur relié à une source de tension constante est :

$$U_e = \frac{1}{2} C(x) V_0^2$$

Si la capacité varie de dC suite à une variation dx de x , l'énergie électrostatique varie de :

$$dU_e = \frac{1}{2} V_0^2 dC \quad (6.9)$$

Il faut noter que cette énergie électrostatique est différente du travail fourni par l'opérateur. En effet, le déplacement de l'armature implique un travail mécanique. Le bilan énergétique s'écrit alors :

$$dU_e = dW_{Elec} + dW_{Meca} \quad (6.10)$$

On suppose une transformation suffisamment lente pour que le condensateur passe par une succession d'états d'équilibre infiniment proches, c'est-à-dire que la transformation est réversible au sens de la thermodynamique. Dans ce cas, la tension V_0 du condensateur reste constante. Sa charge Q varie de :

$$dQ = V_0 dC$$

Le travail fourni par la source de tension est donc :

$$dW_{Elec} = V_0 dQ = V_0^2 dC \quad (6.11)$$

La différence entre (6.9) et (6.11) correspond au travail mécanique que l'opérateur doit fournir pour déplacer l'armature de dx .

6.4 Quelques éléments d'électrocinétique

Un *générateur* permet de maintenir une différence de potentiel constante entre deux points d'un même circuit. Le conducteur n'est plus alors en équilibre électrostatique (il est *hors d'équilibre*) puisque les charges libres subissent un mouvement d'ensemble. En régime permanent, on a alors $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ avec cette fois $\vec{J} \neq \vec{0}$. C'est ce qui différencie l'électrocinétique de l'électrostatique.

6.4.1 Conducteur hors d'équilibre

Loi d'Ohm microscopique

Les matériaux ohmiques, et en particulier les métaux, vérifient la *loi d'Ohm microscopique* $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ (où γ est la *conductivité*) lorsqu'ils sont soumis à un champ électrique le long du conducteur qui est alors hors équilibre. Dans le cas d'une substance homogène pour laquelle $\gamma = Cste$, on a :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\gamma} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad \text{soit} \quad \rho \equiv 0$$

Ceci a deux conséquences :

1. L'intérieur d'un conducteur qui vérifie la loi d'**Ohm** reste neutre en électrocinétique (courant continu) comme en électrostatique.
2. Si un conducteur parcouru par un courant continu n'est pas globalement neutre, sa charge totale ne peut être que superficielle.

Modélisation microscopique de la loi d'Ohm

On modélise de manière très simplifiée un conducteur ohmique par un cylindre dont les deux bases sont à des potentiels différents (cf Figure 6.14). La densité de courant \vec{J} à le même sens que \vec{E} , mais la vitesse des électrons est de sens opposé.

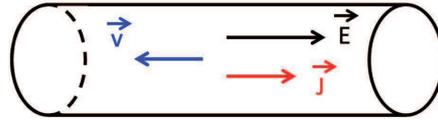


FIGURE 6.14 – Champs s'exerçant sur les macroparticules utilisées pour la description de la loi d'**Ohm** microscopique.

On suppose qu'une des charges q du conducteur (une macroparticule) est soumise de la part des autres charges (fixes ou mobiles) à des interactions globalement modélisables par une force \vec{F} proportionnelle à sa vitesse \vec{v} (dite de *frottement visqueux*) :

$$\vec{F} = -\alpha \vec{v} = -\frac{m}{\tau} \vec{v} \quad (6.12)$$

où m est la masse de l'électron et τ un temps caractéristique. En régime permanent, on a :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} = q \vec{E} - \alpha \vec{v} \quad \text{soit} \quad \vec{v} = \frac{q}{\alpha} \vec{E}$$

D'où :

$$\vec{J} = n q \vec{v} = \gamma \vec{E} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{n q^2}{\alpha} \quad (6.13)$$

Si le champ a été établi brusquement à $t = 0$ alors que les charges étaient immobiles, on obtient :

$$\vec{v} = \frac{q}{\alpha} \vec{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m}{\alpha} \quad (6.14)$$

La constante de temps τ caractérise l'établissement du régime permanent. Les valeurs expérimentales de la conductivité permettant de mesurer α puis τ . On obtient par exemple $\tau \approx 10^{-14}$ s pour du cuivre à 0°C . Pourvoir remonter à des quantités microscopiques à partir de mesures macroscopiques est la grande force de ce modèle.

Temps de relaxation d'un conducteur ohmique

Pour un conducteur ohmique, homogène de conductivité γ , on a :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot (\gamma \vec{E}) = \gamma \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\gamma \rho}{\epsilon_0}$$

On en déduit que l'équation vérifiée par la densité ρ devient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma \rho}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{soit} \quad \rho(t) = \rho_0 \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right) \quad (6.15)$$

où $\theta = \epsilon_0/\gamma$ est le *temps de relaxation* du système. L'interprétation de ceci est qu'en un temps typique de quelques θ , tout excédent local de charges disparaît. Pour les métaux ($\gamma \approx 10^7$ S/m), on trouve $\theta \approx 10^{-19}$ s : s'il existe à un instant donné des accumulations de charges positives et négatives, leur force de rappel va

faire disparaître le déséquilibre dès que le milieu est conducteur⁴. La conclusion est la même si on considère les métaux les plus médiocres ($\gamma \approx 1$ S/m). A l'intérieur d'un conducteur métallique homogène, la densité volumique de charges totales est nulle dans tout le domaine des fréquences hertziennes.

ARQS et conducteurs

Dans un conducteur, le champ magnétique d'une charge en mouvement est environ v/c fois moins intense que le champ électrique. Comme la densité volumique de charge totale ρ est nulle dans les conducteurs, le champ électrique y est nul également. Les effets magnétiques sont donc prépondérants si on les traite dans l'ARQS.

L'ARQS correspond à la situation où $E \ll cB$ (sauf dans des régions finies de l'espace correspondant par exemple à l'intérieur des condensateurs). C'est le domaine typique de l'électrocinétique et de l'électrotechnique.

6.4.2 Polarisation d'un milieu conducteur

Par analogie avec ce qui a été dit au chapitre 5, on peut parler de polarisation pour les milieux conducteurs. En régime harmonique, (5.63) permet d'écrire $\vec{J}_P = -i\omega\vec{P}$. Par analogie avec la forme locale de la loi d'Ohm, on définit une *conductivité complexe* $\gamma(\omega)$ par :

$$\vec{J}_P = \gamma(\omega)\vec{E} \quad \text{avec} \quad \gamma(\omega) = -i\epsilon_0\omega\chi(\omega) \quad (6.16)$$

En posant $\gamma(\omega) = \gamma'(\omega) + i\gamma''(\omega)$ et $\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)$, on en déduit les expressions des parties réelles et imaginaires de la conductivité complexe :

$$\gamma'(\omega) = \epsilon_0\omega\chi''(\omega) \quad \text{et} \quad \gamma''(\omega) = -\epsilon_0\omega\chi'(\omega) \quad (6.17)$$

Il est donc équivalent de décrire les propriétés électriques du milieu par sa susceptibilité $\chi(\omega)$ ou par sa conductivité $\gamma(\omega)$. Par ailleurs, (MA) s'écrit :

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J}_{tot} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6.18)$$

En supposant un milieu sans charge libre, on aura donc \vec{J}_{tot} sous la forme $\vec{J}_{tot} = \gamma(\omega)\vec{E}$ et (6.18) devient :

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \gamma'(\omega)\vec{E} + i\gamma''(\omega)\vec{E} - i\omega\epsilon_0\vec{E} = \gamma'(\omega)\vec{E} - i\omega\epsilon'(\omega)\vec{E}$$

après quelques calculs. Comme de plus $\vec{\nabla} \times \vec{B}/\mu_0 = \vec{J}_c + \vec{J}_D$, on obtient finalement :

$$\vec{J}_c = \gamma'(\omega)\vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{J}_D = -i\omega\epsilon'(\omega)\vec{E}$$

où \vec{J}_c est le courant volumique de conduction et \vec{J}_D le courant volumique de déplacement. Le rapport J_c/J_D permet, à ω donné, de qualifier un milieu d'*isolant* ou de *conducteur*. Il vaut :

$$\frac{\|J_c\|}{\|J_D\|} = \frac{\gamma'(\omega)}{\omega\epsilon'(\omega)}$$

Si $\|J_c\| \gg \|J_D\|$, on aura $\vec{\nabla} \times \vec{B} \approx \mu_0\gamma'(\omega)\vec{E}$. Le milieu se comporte alors comme un conducteur caractérisé par sa conductivité $\gamma'(\omega)$. Si au contraire $\|J_c\| \ll \|J_D\|$, on aura $\vec{\nabla} \times \vec{B} \approx \mu_0\epsilon'(\omega)\partial\vec{E}/\partial t$. Le milieu se comporte alors comme un isolant caractérisé par sa constante diélectrique $\epsilon'(\omega)$.

4. On atteint ici une limite de ce modèle car pour des temps $< 10^{-18}$ s, ie des longueurs d'onde ≈ 1 Å, on devrait utiliser la mécanique quantique.

Chapitre 7

Milieux magnétiques

Sommaire

7.1	Sources microscopiques de l'aimantation en régime statique	200
7.2	Etude macroscopique de l'aimantation en régime statique	202
7.3	Les divers types de milieux magnétiques	210
7.4	Aimantation en régime variable	222
7.5	Aspects énergétiques des milieux magnétiques : le travail d'aimantation . . .	223

Introduction

Par définition, l'aimantation \vec{M} d'un corps sera sa *densité volumique de moments dipolaires magnétiques* (qui s'exprime en A/m) :

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV} \tag{7.1}$$

A partir de l'observation du champ macroscopique créé à l'extérieur d'un solénoïde et d'un barreau aimanté (cf Figure 7.1), l'*hypothèse d'Ampère* relie la magnétostatique à l'aimantation macroscopique \vec{M} liée à la structure interne des matériaux magnétiques. Cette hypothèse consiste à admettre que tout élément de volume dV d'un matériau aimanté se comporte comme une boucle de courant de moment \vec{m} tel que :

$$\vec{m} = \int \vec{M} dV \tag{7.2}$$

aussi bien du point de vue des champs créés que les actions mécaniques qu'il subit (cf Figure 7.2).



FIGURE 7.1 – L'*hypothèse d'Ampère* permet de relier le comportement d'un solénoïde (à gauche) et d'un barreau aimanté cylindrique (à droite).

La relation $\vec{M} = f(\vec{B})$ dépend de chaque matériau et représente la réponse de la matière au champ \vec{B} appliqué. Ces *relations constitutives* sont difficilement calculables, surtout en L3, et seront la plupart du temps basées sur des résultats expérimentaux.

On ne considère dans ce chapitre¹ que des milieux magnétiques non diélectriques, c'est-à-dire des milieux pour lesquels $\epsilon_r = 1$.

1. Tout comme le chapitre sur les milieux diélectriques, ce chapitre doit beaucoup à l'excellente référence [6].

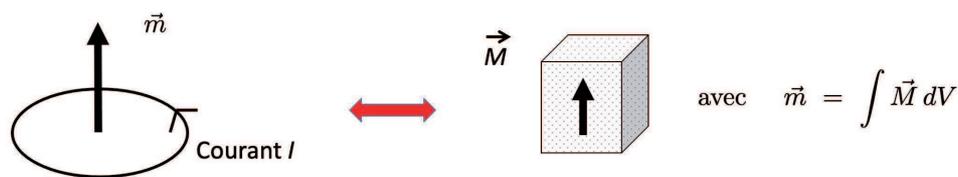


FIGURE 7.2 – On peut modéliser les effets d’une aimantation macroscopique \vec{M} par ceux créés par une boucle de courant portant un dipôle magnétique $\vec{m} = \int \vec{M} dV$ en son centre. C’est l’hypothèse d’**Ampère** (voir texte).

7.1 Sources microscopiques de l’aimantation en régime statique

Ce paragraphe résume les propriétés des divers dipôles magnétiques qui peuvent apparaître au niveau atomique et qui sont à l’origine du magnétisme de la matière.

7.1.1 Moment magnétique orbital

Moment magnétique orbital

On considère une particule de charge q et de vitesse \vec{v} qui décrit une trajectoire fermée de surface S en créant en tout point de l’espace un champ \vec{B} . Physiquement, la situation est analogue à une boucle de courant (C) parcourue par une intensité moyenne I et possédant un moment magnétique $\vec{m} = I \vec{S} = q/T \times \vec{S}$ où T est la période dans le cas d’un courant périodique et \vec{S} le vecteur surface.

Comme d’après (3.41), le vecteur surface peut s’écrire $\vec{S} = 1/2 \times \oint_{(C)} \vec{r} \times d\vec{r}$, le moment magnétique se met sous la forme :

$$\vec{m} = \frac{q}{2T} \oint_{(C)} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \frac{1}{2T} \oint_{(C)} (\vec{r} \times q\vec{v}) dt \quad (7.3)$$

On généralise cette forme à tout mouvement, tant que la particule reste confinée dans une région finie de l’espace. On écrira finalement que le moment magnétique orbital associé à toute particule chargée en mouvement se met sous la forme :

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \langle \vec{r} \times q\vec{v} \rangle \quad (7.4)$$

où le symbole $\langle \dots \rangle$ représente la moyenne temporelle.

Moment cinétique orbital atomique

Pour un mouvement à force centrale, le moment cinétique $\vec{\sigma}$ et le moment magnétique \vec{m} associés au mouvement d’une particule chargée sont des constantes du mouvement :

$$\vec{\sigma} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = \overrightarrow{Cste} \quad \text{et} \quad \vec{m} = \frac{1}{2} \vec{r} \times (q\vec{v}) = \frac{q}{2m} \vec{\sigma} \quad (7.5)$$

où q est la charge de la particule, m sa masse et \vec{v} sa vitesse. On constate une proportionnalité entre le moment magnétique \vec{m} et le moment cinétique $\vec{\sigma}$, le coefficient de proportionnalité étant caractéristique de la particule.

Dans le cas d’un atome, la situation est plus complexe² mais on admettra la généralisation du cas d’un mouvement à force centrale. Cette propriété tout à fait générale associée à tout moment cinétique $\vec{\sigma}$ (qu’il soit d’origine moléculaire, atomique, nucléaire ou particulaire) un moment magnétique \vec{m} et se met sous la forme :

$$\vec{m} = \gamma \vec{\sigma} \quad (7.6)$$

où γ est appelé le *rapport gyromagnétique* de la particule.

2. La difficulté vient du fait que si on peut considérer que l’atome exerce sur les électrons un mouvement à forces centrales, ce n’est plus le cas pour les forces entre les électrons eux-mêmes.

Remarque : L'expérience *Einstein-de Haas* confirme cet effet surprenant : le moment cinétique d'un barreau est modifié lorsqu'on modifie son aimantation. La réciproque est également vérifiée : un barreau d'un matériau magnétique s'aimante lorsqu'il est mis en rotation (*Effet Barnett*).

Modèle de Bohr

Dans le *modèle de Bohr* de l'atome d'hydrogène, les électrons de charge $-e$ et de masse m_e décrivent une orbite circulaire périodique (de période $T = 2\pi/\omega$) de rayon r autour du noyau atomique (cf Figure 7.3).

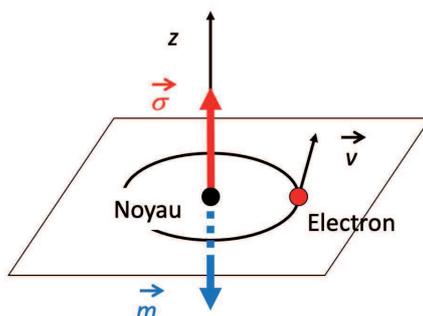


FIGURE 7.3 – Dans le *modèle de Bohr*, les électrons décrivent des trajectoires circulaires planes autour des noyaux atomiques (voir texte).

On assimile chaque orbite à une spire parcourue par l'intensité $i = -e/T = -e\omega/(2\pi)$. Le moment magnétique associé est donc :

$$\vec{m} = i\pi r^2 \vec{u}_z = -\frac{e\omega r^2}{2} \vec{u}_z$$

La trajectoire circulaire des électrons induit un moment cinétique orbital donné par :

$$\vec{\sigma} = \vec{r} \times m_e \vec{v} = m_e r^2 \omega \vec{u}_z$$

Dans le cadre du modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, on a bien $\vec{m} = \gamma_e \vec{\sigma}$. Le rapport gyromagnétique pour des électrons vaut $\gamma_e = -e/(2m_e)$.

Remarque : Qualitativement, l'expérience permet d'obtenir des résultats compatibles avec (7.6). Quantitativement, on remarque des différences. Typiquement, on obtient pour des électrons :

$$\gamma_e = g \times \frac{-e}{2m_e} \quad (7.7)$$

où $g \approx 2$ est appelé *facteur de Landé* et s'explique par la mécanique quantique.

Précession d'un moment magnétique dans un champ \vec{B} uniforme

On considère un atome portant un moment magnétique \vec{M} . Un champ \vec{B}_0 uniforme exercera sur cet atome un couple de moment $\vec{M} \times \vec{B}$. En appliquant le théorème du moment cinétique et en l'absence d'autres moments, on aura $d\vec{\sigma}/dt = \vec{M} \times \vec{B}_0$ soit :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \vec{M} \times \vec{B}_0$$

où $\vec{\sigma}$ est le moment cinétique orbital atomique. En projetant cette équation, on obtient :

- $\vec{M} \cdot d\vec{M} = 0$: $\|\vec{M}\|$ reste constant.
- $\vec{B}_0 \cdot d\vec{M} = 0$: la projection de \vec{M} sur \vec{B}_0 est une constante du mouvement.

Le moment magnétique \vec{M} décrit un mouvement de précession autour de \vec{B}_0 dont la vitesse angulaire $\vec{\omega}_0$ est donnée par $d\vec{\sigma}/dt = (-\gamma \vec{B}_0) \times \vec{M}$ soit :

$$\vec{\omega}_0 = -\gamma \vec{B}_0 \quad (7.8)$$

On vient de montrer que de manière a priori surprenante, l'effet d'un champ magnétique sur un moment magnétique isolé n'est pas d'orienter ce moment dans la direction du champ mais de le faire précesser autour de sa direction. Ceci vient directement du lien entre les moments cinétiques et magnétiques.

Dans le cas du moment magnétique orbital associé à un électron, on parle de *fréquence de Larmor* ω_L :

$$\omega_L = \frac{e B_0}{2 m_e} \quad \text{soit} \quad \omega_L = 14 \cdot 10^{19} \text{ Hz/T} \quad (7.9)$$

7.1.2 Spin

Pour expliquer des résultats d'études expérimentales, **Uhlenbeck** et **Goudsmit** ont postulé l'existence d'un moment cinétique intrinsèque pour les électrons, le *spin*, et donc d'un moment magnétique. Cette description fait intervenir la mécanique quantique.

Néanmoins, à l'échelle macroscopique, on peut décrire la matière aimantée à l'aide du même formalisme que pour le magnétisme orbital : à tout dipôle magnétique particulier, on lui associe une petite boucle de courant équivalente. C'est le *modèle ampérien* du magnétisme. Le magnétisme a donc deux origines : le mouvement orbital des électrons (*magnétisme orbital*) et la présence de spins dans la matière (*magnétisme de spin*).

Remarque : Les protons et les neutrons possèdent également un spin et un moment magnétique, mais ces derniers sont environ 1000 fois plus faibles que les moments électroniques. Le magnétisme correspondant, dit *magnétisme nucléaire*, est faible et on ne l'abordera pas ici.

7.2 Etude macroscopique de l'aimantation en régime statique

Les sources du champ magnétique macroscopiques peuvent en première approximation être considérées comme des dipôles magnétiques.

7.2.1 Relations constitutives

Corps diamagnétiques et paramagnétiques

On considère un milieu non aimanté qui acquiert une (faible) aimantation \vec{M} sous l'action d'un champ \vec{B} . Pour un corps *anisotrope*, on aura :

$$\vec{M} = \frac{1}{\mu_0} [\chi_m] \vec{B} \quad (7.10)$$

Dans cette relation, $[\chi_m]$ est le *tenseur des susceptibilités magnétiques* dont on peut montrer qu'il existe une base sur laquelle il se met sous la forme :

$$[\chi_m] = \begin{pmatrix} \chi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_3 \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

où les éléments diagonaux χ_i sont les *susceptibilités magnétiques principales*.

Pour un corps *homogène et isotrope*, on aura plutôt :

$$\vec{M} = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (7.12)$$

où χ_m est un nombre sans dimension représentant la *susceptibilité magnétique* du milieu. Ce sera le seul cas étudié dans ce cours.

Dans la très grande majorité des cas, χ_m est très faible ($\approx 10^{-5}$ pour les liquides et les solides et $\approx 10^{-9}$ pour les gaz) et négatif : c'est la signature du *diamagnétisme*. Pour certains corps, χ_m est un peu plus élevé (jusqu'à $\approx 3 \times 10^{-3}$ pour les cristaux de FeCl_3) mais positif : c'est la signature du *paramagnétisme*. Dans les deux cas, on a :

$$M \ll \frac{B}{\mu_0} \quad \text{et} \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - M \approx \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (7.13)$$

On peut donc alors écrire (7.12) sous la forme :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (7.14)$$

Remarque 1 : Pour des raisons historiques, c'est cette dernière relation qui est la définition officielle de χ_m , mais attention, elle n'est plus valable dans le cas des ferromagnétiques.

Remarque 2 : Le fait que $|\chi_m| \ll 1$ a une conséquence importante : le champ \vec{B} créé par une substance dia ou paramagnétique pourra toujours être négligé devant le champ extérieur appliqué. Pour les milieux dia et paramagnétiques, on ne fera pas la distinction entre champ appliqué, champ macroscopique et champ local (comme on l'a fait pour les diélectriques avec la correction de **Lorentz**).

Corps ferromagnétiques

Les propriétés magnétiques les plus intenses sont celles de quelques corps solides de la famille du fer (fer, nickel, gadolinium, etc.). C'est dans cette famille qu'on trouve les matériaux à la base des aimants permanents. Pour ces corps, le rapport entre B et H peut atteindre plusieurs milliers. C'est la signature du *ferromagnétisme* pour lequel \vec{B} et \vec{H} sont de même sens (ie $\chi_m > 0$).

L'aimantation d'un corps ferromagnétique dépend de manière complexe de la manière dont le champ \vec{B} est appliqué, mais également de l'histoire du matériau. Il n'existe pas de relation analytique simple reliant dans tous les cas B à H pour un corps ferromagnétique.

Milieux linéaires, homogènes et isotropes

Par analogie avec le cas des milieux diélectriques, on définit un *milieu lhi* par l'existence d'une quantité μ appelée *perméabilité magnétique* (ou de manière équivalente une *perméabilité relative* μ_r) telle que :

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \quad \text{en posant} \quad \mu_r = 1 + \chi_m \quad (7.15)$$

Ces milieux lhi sont soit des corps diamagnétiques, soit des corps paramagnétiques. La perméabilité relative est très légèrement inférieure à 1 pour un milieu diamagnétique et très légèrement supérieure à 1 pour un milieu paramagnétique. Pour un milieu ferromagnétique, lorsque μ_r est défini, il est très largement supérieur à 1 (voir § 7.3.3).

7.2.2 Densités de courant équivalentes

Approche intuitive

On considère tout d'abord un milieu uniformément aimanté (cf Figure 7.4). On peut facilement se convaincre que la présence de moments magnétiques identiques dans la matière va être équivalente, sur le plan des effets produits, à un courant surfacique qui circulerait à la surface de séparation entre le milieu magnétique et le milieu extérieur.

Dans le cas d'une aimantation non uniforme (cf Figure 7.5), on retrouvera l'effet précédent auquel il faudra superposer l'effet de courants volumiques dans la matière.

Il est donc assez intuitif d'imaginer que les excédents locaux de courants liés dus à l'aimantation sont équivalents à des courants d'aimantation.

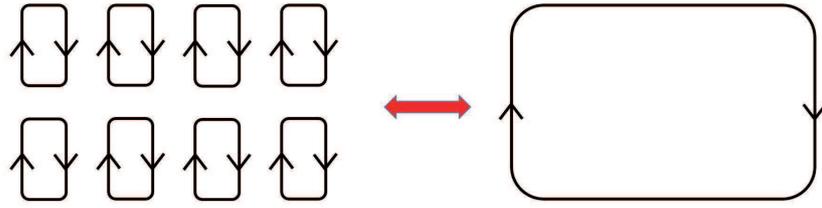


FIGURE 7.4 – Une aimantation uniforme, schématisée (à gauche) par un ensemble homogène de spires élémentaires identiques, est équivalente, dans ses effets, à des courants d’aimantation surfaciques (à droite).

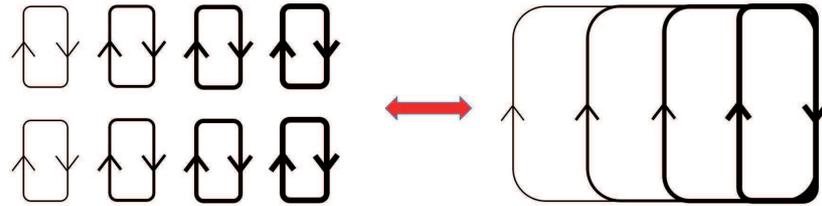


FIGURE 7.5 – Une aimantation non uniforme, schématisée (à gauche) par un ensemble homogène de spires élémentaires portant des courants différents, est équivalente, dans ses effets, à des courants d’aimantation surfaciques et volumiques (à droite).

Approche quantitative

De manière quantitative, le potentiel-vecteur \vec{A} créé au point Q à grande distance de la matière aimantée par une densité volumique de moments magnétiques s’écrit (cf Figure 7.6) :

$$\vec{A}(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{Milieu} \frac{\vec{M}(P) \times \vec{r}}{r^3} d^3P \quad \text{avec} \quad \vec{r} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P = \vec{PQ} \quad (7.16)$$

Il n’y a pas de problème de convergence puisque Q est toujours en dehors du matériau aimanté.

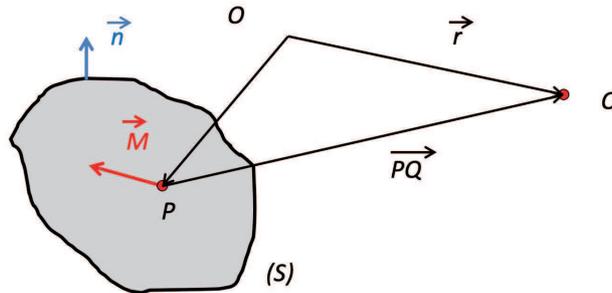


FIGURE 7.6 – Calcul du potentiel-vecteur \vec{A} créé par un milieu magnétique à grande distance de celui-ci.

En fait, il suffit que Q soit à l’extérieur de la matière aimantée pour qu’on puisse utiliser (7.16) puisque tout point, même proche de la surface, sera forcément loin des dipôles de la matière aimantée. En utilisant (A.10) et $\vec{r}/r^3 = \vec{\nabla}_P(1/r)$, on peut réécrire (7.16) sous la forme :

$$\vec{A}(Q) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{Milieu} \vec{\nabla}_P \times \left(\frac{\vec{M}}{r} \right) d^3P + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{Milieu} \frac{\vec{\nabla}_P \times \vec{M}}{r} d^3P \quad (7.17)$$

En utilisant la *formule du rotationnel* (A.24), on obtient :

$$\vec{A}(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{Milieu} \frac{\vec{M} \times \vec{n}}{r} dS + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{Milieu} \frac{\vec{\nabla}_P \times \vec{M}}{r} d^3P \quad (7.18)$$

où \vec{n} est une normale sortante du milieu magnétique. En utilisant (3.29), on en déduit que le potentiel-vecteur \vec{A} (donc également le champ \vec{B} qui en découle) est identique à celui qui serait produit par une distribution macroscopique de courants dans le vide caractérisée par une densité volumique \vec{J}_M et une densité surfacique \vec{J}_M^s valant respectivement (cf Figure 7.7) :

$$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad \text{et} \quad \vec{J}_M^s = \vec{M} \times \vec{n} \quad (7.19)$$

Les courants \vec{J}_M et \vec{J}_M^s sont appelés *courants d'aimantation volumiques* et *surfiques*.

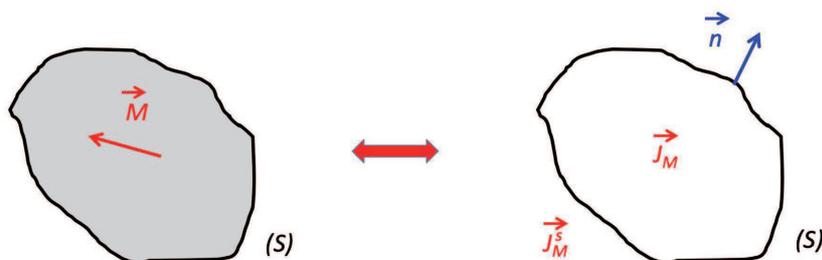


FIGURE 7.7 – Le potentiel-vecteur créé par le milieu magnétique en un point Q est équivalent au potentiel-vecteur qui serait créé dans du vide par la densité volumique $\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$ et par la densité surfacique $\vec{J}_M^s = \vec{M} \times \vec{n}$ (voir texte).

Remarque 1 : Il est important de noter que dans le cas d'une aimantation \vec{M} uniforme, $\vec{J}_M \equiv \vec{0}$.

Remarque 2 : Les courants liés ne sont qu'une construction de l'esprit pour modéliser l'effet d'une aimantation. Ils ne correspondent pas à un déplacement de charges. On s'attend donc à ce qu'ils ne dissipent aucune puissance dans le matériau.

Remarque 3 : L'expression de \vec{A} est formellement valable pour les régimes stationnaires. On l'appliquera également dans l'ARQS, tant qu'on peut négliger les phénomènes de propagation.

Complément sur les courants équivalents

Les courants équivalents ne correspondent pas à un déplacement macroscopique de porteurs de charges libres dans la matière :

- Dans le cas du magnétisme orbital, ce sont des charges liées, les électrons atomiques, qui forment les courants associés aux moment magnétiques. On a schématisé ceci par les densités de courant équivalentes des Figures 7.4 et 7.5.
- Dans le cas du magnétisme de spin, on ne peut plus associer au magnétisme le moindre déplacement de charges, qu'elles soient libres ou liées. Le lien entre le moment cinétique de la particule et son moment magnétique nous incite à le faire néanmoins. A l'échelle macroscopique, tout ce passe comme si le magnétisme de spin était dû à ces *courants fictifs*.

A tout dipôle magnétique, on associe donc une petite boucle de courant, sans préciser si ce courant est constitué de charges liées ou s'il est fictif. C'est le *modèle ampérien* du magnétisme.

Champ magnétique dans la matière aimantée

Les sources microscopiques de l'aimantation produisent, en tout point et en particulier à l'intérieur de la matière aimantée, un champ $\vec{b}(\vec{r}, t)$ appelé *champ magnétique microscopique*. Ce champ est rapidement variable. Par la même procédure de nivellement que celle du § 1.1.2, on en déduit le champ macroscopique \vec{B} donné par $\vec{B} = \langle \vec{b} \rangle$.

En tout point à l'intérieur du matériau, \vec{b} vérifie $\vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0$ (cette propriété vient du modèle ampérien du magnétisme). Le champ macroscopique possède donc la même propriété $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (par commutation de la moyenne et de la dérivation par rapport à la position).

Le lien de \vec{b} avec ses sources est plus délicat. Il y a plusieurs cas à considérer :

1. Dans le cas du magnétisme orbital, on a :

$$\vec{\nabla} \times \vec{b} = \mu_0 \vec{j}_{micro} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \quad \text{soit} \quad \vec{\nabla} \times \langle \vec{b} \rangle = \mu_0 \langle \vec{j}_{micro} \rangle + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \langle \vec{e} \rangle}{\partial t}$$

où \vec{j}_{micro} est la densité de courant des particules en mouvement localement et \vec{e} la *champ électrique microscopique*. Comme le champ \vec{E} est nul en magnétostatique, le 2^e terme de cette équation est nul. On a alors $\langle \vec{j}_{micro} \rangle = \vec{\nabla} \times \vec{M}$ soit $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M}$.

2. En prenant en compte à la fois le magnétisme orbital et le magnétisme de spin, comme on a admis que tout spin était équivalent à une petite spire de courant, il est cohérent de conclure que le lien entre $\vec{B} = \langle \vec{b} \rangle$ et l'aimantation \vec{M} sera toujours $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M}$.
3. Enfin, dans la situation plus générale où en plus du magnétisme (orbital et de spin), on a des courants libres, la linéarité des équations fait que \vec{B} vérifie finalement :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J}_{libre} + \vec{\nabla} \times \vec{M} \right) \quad (7.20)$$

Cas du barreau uniformément aimanté

Ce formalisme peut être par exemple appliqué au cas d'un barreau uniformément aimanté (cf Figure 7.8) pour lequel on a :

$$\vec{J}_M = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{J}_M^s = M \vec{u}_\theta \quad (7.21)$$

Le champ \vec{B} créé par le barreau aimanté est identique à celui créé par une densité superficielle de courants qui circulerait sur la surface extérieure du barreau. A l'extérieur, le barreau agit comme un solénoïde de n spires par unité de longueur parcouru par le courant I tels que $nI = M$.

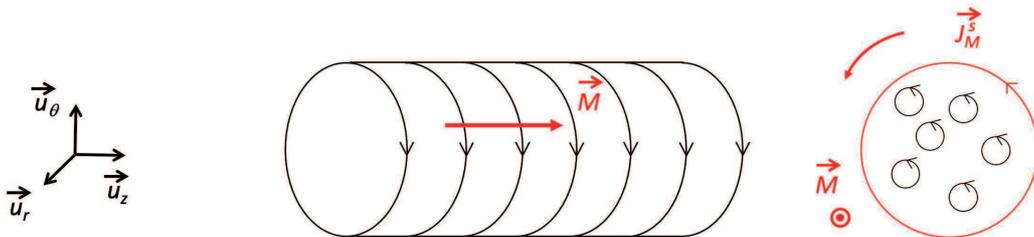


FIGURE 7.8 – Sur le plan du champ créé, le comportement d'un barreau uniformément aimanté est assimilable à une densité superficielle de courant sur la surface extérieure du barreau.

Réponse de la matière à un champ appliqué

A l'échelle macroscopique, rien ne distingue un champ \vec{B} dû à des courants libres d'un champ \vec{B} dû aux courants d'aimantation. On devra en tenir compte pour établir le champ total en présence de milieux magnétiques. Comme schématisé sur la Figure 7.9, on a donc un système couplé entre la réponse de la matière (\vec{M}) et son excitation (\vec{B}_0). On verra que dans le cas du dia et du paramagnétisme, ce couplage peut être négligé. Ce ne sera plus le cas avec le ferromagnétisme.

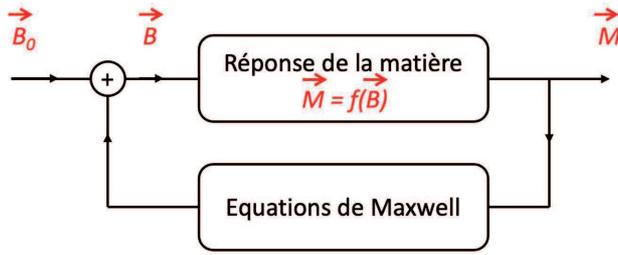


FIGURE 7.9 – Diagramme de réaction entre \vec{B} et \vec{M} pour un champ \vec{B}_0 appliqué à un milieu magnétique.

7.2.3 Vecteur \vec{H}

Le champ \vec{B} engendré par une distribution qui comporterait à la fois des courants libres (de densité \vec{J}_{libre}) et des courants d'aimantation (de densité \vec{J}_M) est de la forme :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J}_{libre} + \vec{J}_M \right) \quad \text{soit encore} \quad \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}_{libre} \quad (7.22)$$

Il est donc naturel d'introduire le *vecteur* \vec{H} défini par :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (7.23)$$

Remarque 1 : \vec{H} s'exprime en A/m.

Remarque 2 : L'importance pratique de \vec{H} vient de son lien avec les courants libres, qui sont directement mesurables par un ampèremètre. Dans le cas des diélectriques, \vec{D} a une moindre importance expérimentale car les voltmètres ne mesurent pas la charge libre mais la charge totale. On mesurera donc plus facilement \vec{E} que \vec{D} .

Remarque 3 : On utilisera plutôt \vec{H} quand ne on connaît que les courants libres. Si on peut connaître les courants liés (donc l'aimantation \vec{M}), on pourra utiliser \vec{B} .

7.2.4 Exemple de domaines simples uniformément aimantés

Cas général d'une aimantation uniforme

On suppose une aimantation \vec{M} uniforme. D'après (7.16), le potentiel-vecteur \vec{A} dû à la sphère s'écrit :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{Milieu} \frac{\vec{M}(P) \times \vec{r}}{r^3} d^3P = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M} \times \iiint_{Milieu} \frac{\vec{r}}{r^3} d^3P \quad (7.24)$$

On peut procéder par *analogie électrostatique* pour résoudre cette équation, comme on va le voir maintenant.

Exemple de la sphère uniformément aimantée

En reprenant ce qui vient d'être dit, on sait que le champ \vec{E} créé par une sphère de rayon a et de densité de charges ρ uniforme s'écrit :

$$\vec{E} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{Sphère} \frac{\vec{r}}{r^3} d^3P \quad (7.25)$$

et qu'avec le théorème de **Gauss**, on obtient les champs à l'intérieur (\vec{E}_i) et à l'extérieur (\vec{E}_e) de la sphère :

$$\vec{E}_i = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{E}_e = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r^2} \vec{u}_r \quad (7.26)$$

On en déduit les expressions du potentiel-vecteur à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère uniformément aimantée :

$$\vec{A}_i = \frac{\mu_0}{3} \vec{M} \times \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{A}_e = \frac{\mu_0}{3} \vec{M} \times \frac{a^3}{r^2} \vec{u}_r \quad (7.27)$$

Sachant que le potentiel-vecteur d'un champ \vec{B} uniforme est $\vec{A} = \vec{B} \times r\vec{2}$, on en déduit qu'à l'intérieur de la sphère magnétique, \vec{B}_i (et donc également \vec{H}_i) sont uniformes et valent :

$$\vec{B}_i = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M} \quad \text{et} \quad \vec{H}_i = \frac{\vec{B}_i}{\mu_0} - \vec{M} = -\frac{\vec{M}}{3} \quad (7.28)$$

A l'extérieur de la sphère, (7.27) indique que le champ est identique à celui d'un dipôle magnétique de moment $\vec{m} = 4/3 \pi a^3 \times \vec{M}$ placé en O . On obtient donc :

$$\vec{B}_e = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{m}}{r^3} \right) \quad \text{et} \quad \vec{H}_e = \frac{\vec{B}_e}{\mu_0} \quad (7.29)$$

La Figure 7.10 représente le champ \vec{B} créé par une sphère magnétique d'aimantation \vec{M} uniforme.

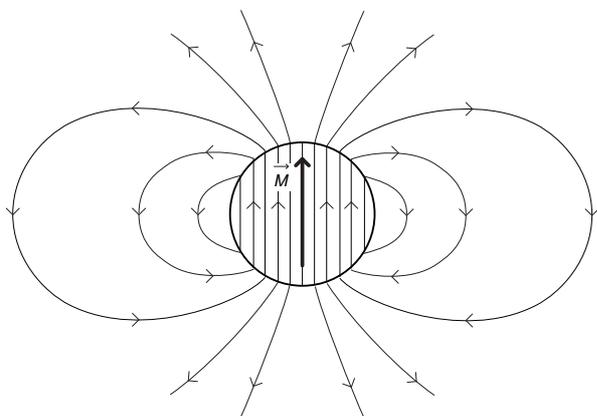


FIGURE 7.10 – Lignes du champ \vec{B} créé par une sphère d'aimantation \vec{M} uniforme (Figure extraite de [8]).

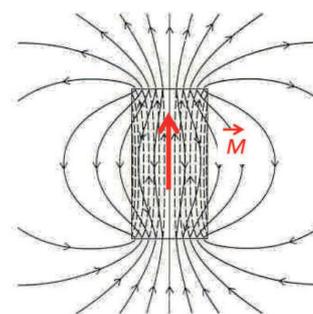


FIGURE 7.11 – Lignes du champ \vec{H} d'un barreau uniformément aimanté (traits pleins). Les lignes de \vec{B} sont en pointillés à l'intérieur du barreau, à l'extérieur elles suivent rigoureusement celles de \vec{H} (figure extraite de [1]).

Exemple du barreau uniformément aimantée

Dans le cas d'un barreau uniformément aimanté (cf Figure 7.11), le champ \vec{H} est celui créé par deux plans portant des densités superficielles de courant uniformes aux extrémités du cylindre. Noter la forme "vers l'extérieur" des lignes de \vec{H} à l'intérieur du cylindre qui vient du fait que les deux surfaces portant les densités superficielles ne sont pas des plans infinis. Il y a alors un "effet de bord". Noter que la Figure 7.11 est identique à la Figure 5.14.

7.2.5 Champ démagnétisant

On peut généraliser le champ trouvé à l'intérieur de la sphère et montrer que le champ \vec{H} créé par une aimantation \vec{M} est toujours de sens opposé à \vec{M} . On l'appelle parfois *champ démagnétisant*.

Remarque : Attention, cette appellation est historique et n'est reliée à aucun processus physique de suppression de l'aimantation, puisque ce n'est pas \vec{H} qui agit sur les dipôles.

7.2.6 Equations de Maxwell dans les milieux magnétiques

Equations de Maxwell

A la suite de ce qu'on vient de voir, dans le cas d'une aimantation statique, les équations de **Maxwell** à considérer dans le cas d'un milieu magnétique (non diélectrique) prennent la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{libre}}{\epsilon_0} \quad (\text{MG}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{libre} \quad (\text{MA}) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad (\text{MF}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{M}\Phi) \end{array} \right. \quad (7.30)$$

Remarque 1 : Il ne suffit pas de connaître (MA) et (M Φ) pour déterminer \vec{B} et \vec{H} . Il faut également connaître la relation constitutive qui relie \vec{B} à \vec{H} .

Remarque 2 : Attention à une confusion fréquente : \vec{H} n'est pas forcément nul en l'absence de « ses » sources, les courants libres ! Par exemple, pour une sphère uniformément aimantée sans courant libre, on a $\vec{J}_{libre} = \vec{0}$ mais $\vec{H}_i = -\vec{M}/3 \dots$

Remarque 3 : On peut décomposer les champs \vec{B} et \vec{H} en deux termes produits par les courants (\vec{B}_I et \vec{H}_I) et par l'aimantation (\vec{B}_M et \vec{H}_M) :

$$\vec{B} = \vec{B}_I + \vec{B}_M \quad \text{et} \quad \vec{H} = \vec{H}_I + \vec{H}_M \quad (7.31)$$

où \vec{H}_I et \vec{H}_M vérifient :

$$\vec{H}_I = \frac{\vec{B}_I}{\mu_0} \quad \text{et} \quad \vec{H}_M = \frac{\vec{B}_M}{\mu_0} - \vec{M} \quad (7.32)$$

- \vec{H}_I est le champ créé dans le vide par les courants de conduction. D'après (7.32), il vérifie donc :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_I = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H}_I = \vec{J}_{libre}$$

\vec{H}_I est donc un *champ transverse* (ou *solénoïdal*).

- \vec{H}_M est créé par l'aimantation. D'après (7.32) et (7.31), il vérifie donc :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_M = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H}_M = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{B}_M}{\mu_0} - \vec{\nabla} \times \vec{M} = \frac{\mu_0 \vec{J}_{lié}}{\mu_0} - \vec{J}_{lié} = \vec{0}$$

\vec{H}_M est donc un *champ longitudinal* (ou *irrotationnel*).

Séparation de deux milieux lhi

Dans un modèle surfacique, on en déduit les relations de passage entre les valeurs des champs dans les régions (1) et (2) séparées par une surface (Σ). Par analogie avec le § 1.7.2, on obtient immédiatement :

- la continuité de la composante tangentielle de \vec{E} .
- la continuité de la composante normale de \vec{B} .
- la discontinuité de la composante normale de \vec{E} en présence d'une densité superficielle de charges libres σ_{libre} .
- la discontinuité de la composante tangentielle de \vec{H} en présence d'une densité superficielle de courants libres \vec{K}_{libre} .

On peut résumer ceci sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_{T_2} = \vec{E}_{T_1} \\ \vec{B}_{N_2} = \vec{B}_{N_1} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_{N_2} - \vec{E}_{N_1} = \frac{\sigma_{libre}}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{H}_{T_2} - \vec{H}_{T_1} = \vec{K}_{libre} \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \end{array} \right. \quad (7.33)$$

Dans le cas d'une surface ne portant ni des charges, ni des courants libres, il y a, comme dans le cas du vide, à la fois conservation des composantes normales et transverses de \vec{E} . Sur le plan du magnétisme, il y a conservation de la composante normale de \vec{B} et de la composante transverse de \vec{H} .

On peut parfois utiliser la continuité du potentiel-vecteur $\vec{A}_2 = \vec{A}_1$. Cette relation peut remplacer la relation $\vec{B}_{N_2} = \vec{B}_{N_1}$, mais n'est pas toujours pratique à utiliser.

7.2.7 Complément sur les densités volumiques de courant équivalentes

On a vu au § 7.1 que le magnétisme a deux origines : le mouvement orbital des électrons et la présence de spins dans la matière. Dans tous les cas, la matière est constituée de moments magnétiques individuels \vec{M}_k . Pour un volume mésoscopique ΔV , on effectue un nivellement spatial en introduisant la quantité \vec{M} :

$$\vec{M}(\vec{r}) = \sum_k \vec{M}_k f(\vec{r} - \vec{r}_k)$$

où la fonction f est une fonction telle que celles utilisées au § 1.1.2.

Décrire la matière magnétique uniquement en terme de moments dipolaires magnétiques est une modélisation du champ à l'échelle microscopique qui se limite au 1^{er} ordre. On suppose que cette approximation (dite *dipolaire*) est suffisante. C'est généralement suffisant pour le dia et le paramagnétisme, c'est beaucoup plus discutable pour le ferromagnétisme..

7.3 Les divers types de milieux magnétiques

A l'aide du théorème de superposition, on peut traiter séparément le cas des atomes ne possédant pas un moment magnétique permanent de celui des atomes qui en possèdent un. On classe les milieux magnétiques en trois catégories :

1. Les milieux dont les atomes ne portent pas de moments magnétiques permanents sont associés au *diamagnétisme*.
2. Les milieux dont les atomes portent des moments magnétiques qui n'interagissent quasiment pas entre eux sont associés au *paramagnétisme*.
3. Les milieux dont les atomes portent des moments magnétiques qui interagissent fortement entre eux sont associés au *ferromagnétisme*.

Dans les deux premiers cas, on parle d'*aimantation induite* car l'effet magnétique disparaît dès que le champ \vec{B} qui est à son origine disparaît également. On parle également d'*aimantation spontanée* pour les ferromagnétiques.

7.3.1 Milieux diamagnétiques

Le *diamagnétisme*, associé au mouvement orbital des électrons, concerne tous les types de matériaux. On supposera que l'atome étudié ne porte pas de moment magnétique permanent. S'il en possède un, il suffira d'additionner les effets, mais on verra aux paragraphes suivants que dans ce cas, l'effet du diamagnétisme sera la plupart du temps négligeable.

Il faut noter que la plupart des corps diamagnétiques sont des isolants électriques.

Une théorie du diamagnétisme

On considère les atomes comme des objets classiques. En leur appliquant un champ \vec{B} , il apparaît d'après la loi de **Lenz**, un moment magnétique \vec{m} de sens opposé à \vec{B} (cf Figure 7.12), d'où, en notant n la densité volumique d'atomes, une aimantation \vec{M} :

$$\vec{M} = n\vec{m} = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu_0} \tag{7.34}$$

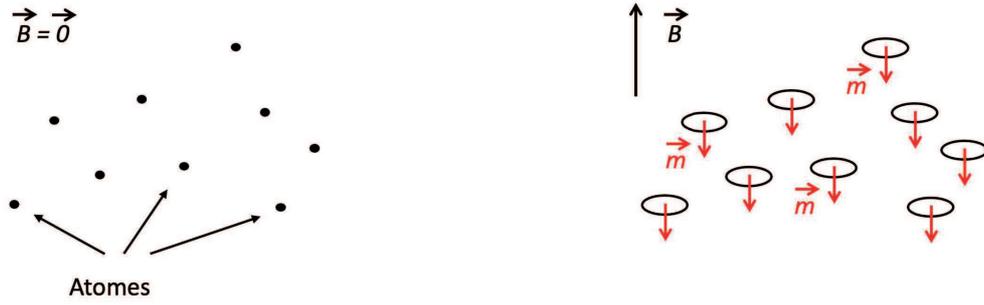


FIGURE 7.12 – Sans champ magnétique, les atomes ne portent pas de moment magnétique (à gauche). En présence d'un champ magnétique, des moments magnétiques individuels \vec{m} portés par chaque atome vont apparaître, dans la direction opposée à celle de \vec{B} (à droite).

On suppose que la distribution électronique est à symétrie sphérique. En appliquant $\vec{B}(t)$ selon Oz , il apparaît un champ $\vec{E}(t)$ orthoradial $\vec{E}(t) = E(\rho, t) \vec{u}_\phi$ (cf Figure 7.13). Ce champ vérifie (MF), donc en particulier :

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{\partial}{\partial t} \left[\iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right]$$

En supposant, ce qui est légitime, que $B(t)$ ne varie pas sur le volume de l'atome, on obtient :

$$\vec{E}(\rho, t) = - \frac{1}{2} \rho \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \vec{u}_\phi$$

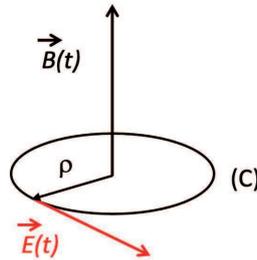


FIGURE 7.13 – Un champ $\vec{B}(t)$ entraîne à la distance ρ de l'axe l'apparition d'un champ $\vec{E}(t)$ orthoradial.

Le nombre d'électrons du nuage situés à la distance ρ de l'axe Oz est $n(\rho) d\rho$. La force à laquelle ils sont soumis est $d\vec{F}(\rho) = n(\rho) d\rho \times (-e) \times \vec{E}(\rho)$. Cette force selon \vec{u}_ϕ entraîne l'apparition d'un couple $d\vec{\Gamma}$ selon Oz :

$$d\vec{\Gamma} = \rho \vec{u}_\rho \times d\vec{F}(\rho) \quad \text{soit} \quad \vec{\Gamma} = \frac{e}{2} \frac{d\vec{B}}{dt} \times \int n(\rho) \rho^2 d\rho$$

Pour un atome à symétrie sphérique (à Z électrons), on a :

$$\langle \rho^2 \rangle = \frac{1}{Z} \int n(\rho) \rho^2 d\rho$$

par définition de la quantité $\langle \rho^2 \rangle$. Le théorème d'équipartition de l'énergie³ indique que $\langle \rho^2 \rangle = 2/3 \times \langle r^2 \rangle$, où $\langle r^2 \rangle$ représente le rayon quadratique moyen des électrons. Il reste finalement :

$$\vec{\Gamma} = \frac{Z e \langle r^2 \rangle}{3} \frac{d\vec{B}}{dt}$$

3. Le théorème d'équipartition de l'énergie vient de la physique statistique. Il stipule que pour tout système en contact avec un thermostat à la température T , la valeur moyenne de toute contribution quadratique d'un paramètre dans l'expression de l'énergie vaut $1/2 \times k_B T$, où $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann.

Ceci permet d'en déduire le moment cinétique \vec{L} à l'aide du théorème du moment cinétique ($\vec{\Gamma} = d\vec{L}/dt$). Finalement :

$$\vec{L} = \frac{Ze \langle r^2 \rangle}{3} \vec{B} \quad \text{et} \quad \vec{\mu}_L = -\frac{e}{2m_e} \vec{L} = -\frac{Ze^2 \langle r^2 \rangle}{6m_e} \vec{B}$$

où μ_L est le moment cinétique orbital de **Langevin**. Comme $\vec{M} = n \vec{\mu}_L$, on déduit de (7.34) la susceptibilité diamagnétique χ_m :

$$\chi_m = -\frac{\mu_0 n Z e^2}{6 m_e} \langle r^2 \rangle \quad (7.35)$$

De manière générale, on notera (voir Table 7.1) que le diamagnétisme est très faible (de $\chi_m \approx 10^{-9}$ pour les gaz à $\chi_m \approx 10^{-6}$ pour les solides).

Remarque 1 : Le comportement des lignes de champ au voisinage d'un matériau diamagnétique est résumé sur la Figure 7.30.

Remarque 2 : On modélise parfois les supraconducteurs comme des corps diamagnétiques parfaits ($\chi_m = -1$). Attention, ceci n'est qu'une modélisation.

Matériaux diamagnétiques	μ_r	Matériaux paragnétiques	μ_r
Zn	$1 - 1,9 \cdot 10^{-8}$	Air (1 atm)	$1 + 4,0 \cdot 10^{-7}$
Ag	$1 - 2,4 \cdot 10^{-8}$	Aluminium	$1 + 6,5 \cdot 10^{-7}$
Al ₂ O ₃	$1 - 6,5 \cdot 10^{-8}$	Ebonite	$1 + 1,1 \cdot 10^{-6}$
Argent	$1 - 1,9 \cdot 10^{-7}$	Ta	$1 + 1,1 \cdot 10^{-6}$
Parafine	$1 - 5,8 \cdot 10^{-7}$	Na	$1 + 8,6 \cdot 10^{-6}$
Eau	$1 - 9,0 \cdot 10^{-6}$	Mn	$1 + 1,2 \cdot 10^{-4}$
Cuivre	$1 - 1,0 \cdot 10^{-5}$	CoO	$1 + 7,5 \cdot 10^{-4}$

TABLE 7.1 – Perméabilités magnétiques relatives μ_r (à 20°C) de divers matériaux dia et paramagnétiques.

Remarque 3 : On vient de voir dans ce paragraphe le diamagnétisme associé aux atomes. Il existe également un diamagnétisme moléculaire, mais plus délicat à interpréter de manière classique. On peut simplement dire qu'il est parfois très anisotrope⁴.

Résultats expérimentaux

La susceptibilité χ_m est faible devant le champ appliqué \vec{B}_0 . Cela implique que les interactions entre les moments sont faibles et que χ_m est proportionnel au nombre total de moments magnétiques volumiques. On définit donc la *susceptibilité molaire* χ_A (qui s'exprime en m³/mole) par⁵ :

$$\chi_A = \frac{M_A}{\rho} \chi_m \quad (7.36)$$

où M_A est la masse molaire du corps et ρ sa masse volumique.

Les susceptibilités magnétiques χ_m sont plus faibles pour les gaz que pour les phases condensées, mais les susceptibilités molaires χ_A sont voisines.

4. Par exemple, pour le benzène C₆H₆, $\chi_e = 111 \cdot 10^{-11}$ m³/mole pour un champ orthogonal au plan de la molécule et $\chi_e = 47 \cdot 10^{-11}$ m³/mole dans le plan de la molécule.

5. Certaines tables donnent les susceptibilités molaires en cm⁻³/mole dans le système CGS. Il faut donc les multiplier par $4\pi \cdot 10^{-6}$ pour les obtenir dans le système MKSA.

7.3.2 Milieux paramagnétiques

Dans la plupart des matériaux, les moments magnétiques atomiques s'annulent. Lorsque cette annulation n'est pas totale, il peut rester un moment magnétique. On est alors dans le cas du *paramagnétisme* qui concerne les milieux qui portent des moments magnétiques permanents qui n'interagissent que faiblement entre eux. Les valeurs typiques de susceptibilités sont données par la Table 7.1.

Il faut noter que la plupart des corps paramagnétiques sont des isolants électriques.

Théorie classique

La théorie classique dit que l'énergie d'interaction du moment magnétique \vec{m} de l'atome dans un champ $\vec{B} = B \vec{u}_z$ est donnée par :

$$W = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -m B \cos(\theta) \quad (7.37)$$

et que la probabilité d'avoir un état d'énergie W (donc la probabilité d'avoir un angle θ) est proportionnelle à $\exp(-W/k_B T)$. Tous les angles sont donc accessibles.

La comparaison avec l'expression de l'énergie d'un dipôle dans un champ \vec{E} montre que le calcul classique du paramagnétisme est formellement identique à celui de la polarisation d'orientation (§ 5.1.4). D'après (5.9), l'aimantation \vec{M} d'un volume contenant n dipôles magnétiques par unité de volume est de la forme :

$$\vec{M} = n m \mathcal{L}(x) \vec{u}_z \quad \text{où} \quad \mathcal{L}(x) = \coth(x) - \frac{1}{x} \quad \text{avec} \quad x = \frac{m B}{k_B T} \quad (7.38)$$

où la fonction $\mathcal{L}(x)$ est la *fonction de Langevin* (cf Figure 5.4). Au voisinage de la température ordinaire, on a $x \ll 1$. On en déduit que la susceptibilité χ_m se met sous la forme :

$$\chi_m = \frac{C}{T} \quad \text{où} \quad C = \frac{n \mu_0 m^2}{3 k_B} \quad (7.39)$$

C est la *constante de Curie*. On remarque que $\chi_m > 0$. L'accord avec l'expérience est bon à température ambiante mais mauvais à basse température.

Théorie quantique

En réalité, la mécanique quantique nous indique que l'énergie ne peut prendre que des valeurs discrètes puisque la projection μ_z du moment magnétique ne peut prendre que des valeurs discrètes exprimées en fonction du *magnéton de Bohr* μ_B :

$$\mu_z = -m_J g \mu_B \quad \text{où} \quad \mu_B = |\gamma_e| \hbar = \frac{\hbar e}{2 m_e} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J/T} \quad (7.40)$$

où g est le facteur de Landé et où m_J peut prendre toutes les $2J + 1$ valeurs entières entre $-J$ et J . On a alors : $\vec{M} = n \langle \mu_z \rangle \vec{u}_z$ où :

$$\langle \mu_z \rangle = g \mu_B \frac{\sum_{-m_J}^{m_J} -m_J A_J}{\sum_{-m_J}^{m_J} A_J} \quad \text{avec} \quad A_J = \exp\left(-\frac{m_J g \mu_B B}{k_B T}\right) \quad (7.41)$$

Des calculs de Physique Statistique montrent que :

$$M(x) = n g \mu_B J B_J(x) \quad \text{où} \quad x = \frac{J g \mu_B B}{k_B T} \quad (7.42)$$

où $B_J(x)$ est la *fonction de Brillouin* (cf Figure 7.14) définie par :

$$B_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \coth\left(\frac{2J+1}{2J} x\right) - \frac{1}{2J} \coth\left(\frac{x}{2J}\right) \quad (7.43)$$

Dans le cas d'un système à deux niveaux ($J = 1/2$), on a immédiatement $B_{1/2}(x) = \text{th}(x)$.

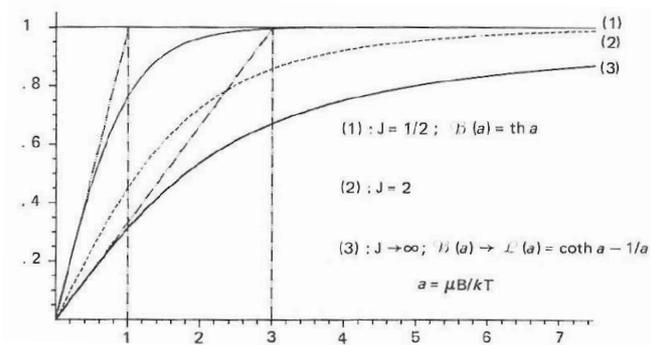


FIGURE 7.14 – Fonction de Brillouin $B_J(x)$ pour quelques valeurs de J .

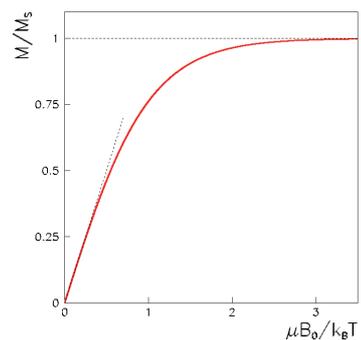


FIGURE 7.15 – Variation de M/M_s en fonction de $\mu_0 B/(k_B T)$, avec $M_s = n g J \mu_B$.

Loi de Curie

Le 1^{er} cas limite de (7.42) correspond au cas usuel pour lequel $\mu_B B \ll k_B T$. On a alors $B_J(x) \approx (J + 1)/J \times x/3$ (cf Figure 7.15). On en déduit la *loi de Curie* :

$$\chi_m = \frac{\mu_0 n \mu_{eff}^2}{3 k_B T} \quad \text{avec} \quad \mu_{eff} = g \mu_B \sqrt{J(J+1)} \quad (7.44)$$

De manière générale, on notera que le paramagnétisme correspond à une susceptibilité positive qui varie en $1/T$, et qu'en ordre de grandeur, on a $\chi_m \approx 10^{-4}$.

Aimantation à saturation

Le 2^e cas limite de (7.42) correspond à $\mu_B B \gg k_B T$, ce qui entraîne $B_J(x) \approx 1$ (cf Figure 7.15). On en déduit alors que l'aimantation tend vers une valeur constante M_s qui vérifie :

$$M \approx M_s \quad \text{avec} \quad M_s = n g J \mu_B \quad (7.45)$$

Force subie par les matériaux dia ou paramagnétiques en champ \vec{B}

Un volume dV d'un matériau magnétique se comporte comme un dipôle de moment élémentaire $dm = M dV$. Il subit dans un champ \vec{B} inhomogène une force de densité :

$$\frac{d\vec{F}}{dV} = \left(\vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \right) \vec{u}_x + \left(\vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \right) \vec{u}_y + \left(\vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \right) \vec{u}_z \quad (7.46)$$

Si le matériau est dia ou paramagnétique, on a d'après (7.12) :

$$\frac{dF_x}{dV} = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \frac{d\vec{B}}{dx} = \frac{\chi_m}{2\mu_0} \frac{dB^2}{dx} \quad (7.47)$$

Des relations identiques pour dF_y/dV et dF_z/dV entraînent finalement que :

$$\frac{d\vec{F}}{dV} = \frac{\chi_m}{2\mu_0} \vec{\nabla} B^2 \quad (7.48)$$

On en déduit que les corps paramagnétiques sont attirés vers les régions de champ intense, alors que les corps diamagnétiques sont repoussés vers les zones de champ faible (cf Figure 7.16).

Remarque : Le comportement des lignes de champ au voisinage d'un matériau paramagnétique est résumé sur la Figure 7.30.

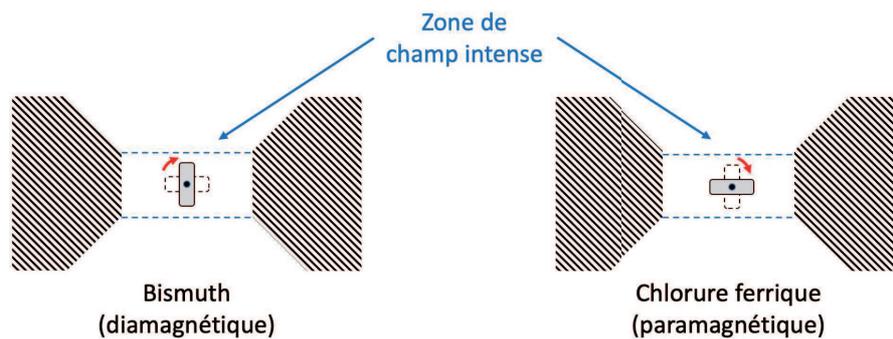


FIGURE 7.16 – Influence d'un champ B inhomogène sur un corps diamagnétique tel que le bismuth (à gauche) et sur un corps paramagnétique comme le chlorure ferrique (à droite).

7.3.3 Milieux ferromagnétiques

Le *ferromagnétisme* est la propriété de certains corps de s'aimanter très fortement sous l'action d'un champ \vec{B} , et de pouvoir conserver ensuite cette aimantation. Le ferromagnétisme concerne les milieux qui portent des moments magnétiques permanents qui interagissent fortement entre eux.

Interaction dipôle-dipôle

Intuitivement, on sent que le ferromagnétisme doit provenir d'une interaction entre dipôles de la matière, puisqu'il n'existe que dans les milieux denses. Or l'énergie classique d'interaction E_{int} entre deux dipôles μ_i et μ_j s'écrit :

$$E_{int} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mu}_i \cdot \vec{\mu}_j - 3(\vec{\mu}_i \cdot \vec{u})(\vec{\mu}_j \cdot \vec{u})}{r_{ij}^3}$$

Pour évaluer l'ordre de grandeur de E_{int} , on considère l'action de huit dipôles magnétiques voisins au sommet d'un cube d'arête $d = 0.2$ nm avec à chaque fois $\mu_i = \mu_j = \mu_B$. On a :

$$E_{int} \approx 8 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu_b^2}{d^3} \approx 54 \times 10^{-6} \text{ eV} \ll k_B T \approx 25 \text{ meV}$$

où $k_B T$ correspond à l'agitation thermique à 300 K. On en déduit que, comme le ferromagnétisme existe à température ambiante, il ne provient pas de l'interaction classique entre moments magnétiques. En fait, seules les théories quantiques peuvent donner une interprétation au magnétisme des milieux, en rejetant la variation continue des orbites et des moments. C'est le théorème de Hendrika **van Leeuwen** (1919) : *un système de particules en équilibre thermique obéissant aux lois de la mécanique classique est dépourvu d'aimantation macroscopique*. On peut donc interpréter le ferromagnétisme comme la manifestation macroscopique de phénomènes quantiques (à l'échelle atomique).

Etude expérimentale

L'étude expérimentale de l'aimantation d'un corps ferromagnétique peut s'effectuer à l'aide d'un *anneau de Rowland* (cf Figure 7.17) qui utilise une bobine torique (N spires parcourues par un courant I) de faible section S et de longueur moyenne ℓ . Cette géométrie simple fait que B , M et H sont orthoradials, et que les valeurs de ces champs sont identiques en tout point de l'axe magnétique. On mesure ces trois champs de manière simple :

1. Le théorème d'Ampère s'écrit $\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{libre}$ soit $H\ell = NI$ ou encore $H = NI/\ell$. La lecture de l'ampèremètre donne la mesure de H .
2. Un voltmètre mesure la tension induite quand on modifie le courant I puisque $V_1 - V_2 = NS dB/dt$.
3. On en déduit l'aimantation M à partir de $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$.

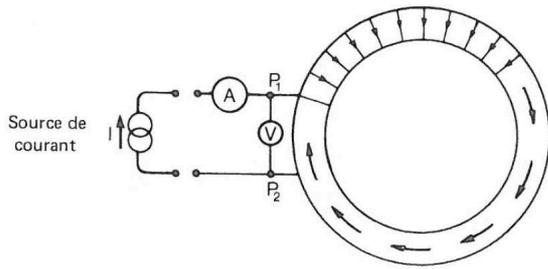


FIGURE 7.17 – La configuration dite de l'*anneau de Rowland* permet d'étudier la perméabilité des milieux magnétiques.

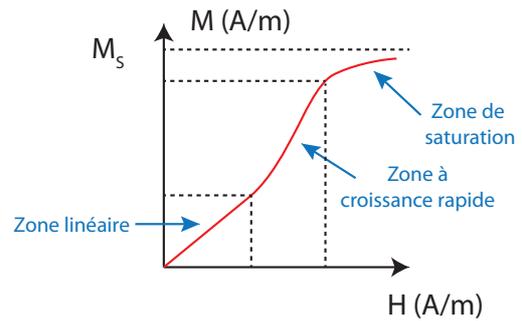


FIGURE 7.18 – Courbe schématique de première aimantation pour un matériau ferromagnétique, comprenant une zone linéaire, une zone à croissance rapide et une zone de saturation.

Courbe de première aimantation

On considère tout d'abord un échantillon qui n'a jamais été aimanté. La *courbe de première aimantation* (cf Figure 7.18) présente trois zones caractéristiques : une zone linéaire, une zone à croissance plus rapide et une zone de saturation. Pour la plupart des matériaux, la saturation intervient vers 2 T.

Cette description est assez formelle et ne recouvre que partiellement la réalité. Pour donner un ordre d'idée, la Figure 7.19 représente la courbe de 1^{re} aimantation pour divers matériaux ferromagnétiques.

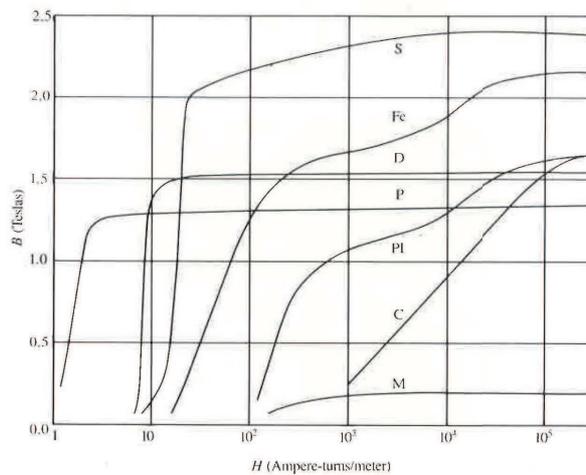


FIGURE 7.19 – Courbe de 1^{re} aimantation pour divers matériaux : Supermendur (S), Fer (Fe), Deltamax (D), Permalloy (P) Fer en poudre (PI), Fer moulé (C), Monel (M) (Figure extraite de [1, page 369]).

Au delà d'une température critique, la *température de Curie* T_f , un corps ferromagnétique devient paramagnétique. La transition de phase est représentée sur la Figure 7.20. Il suit alors la *loi de Curie-Weiss* :

$$\chi_m = \frac{C}{T - \Theta} \quad (7.49)$$

où θ est la *température de Curie paramagnétique*.

Perméabilité magnétique

En définissant la *perméabilité magnétique* μ_r par :

$$\mu_r = \frac{B(H)}{\mu_0 H} \quad (7.50)$$

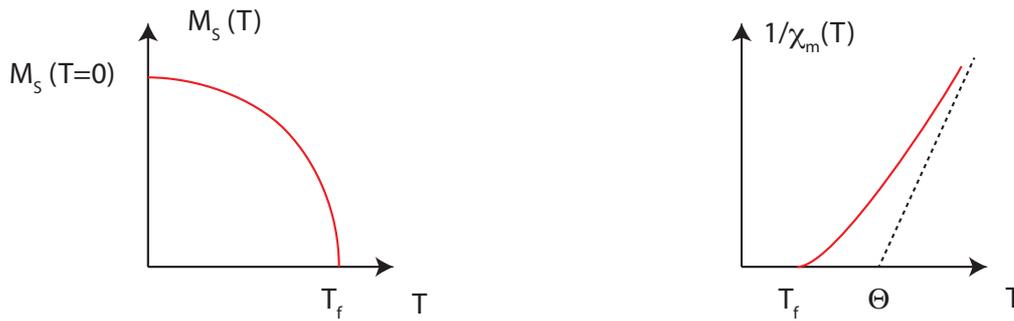


FIGURE 7.20 – Variations de l’aimantation à saturation M_S (à droite) et de la susceptibilité magnétique χ_m (à gauche) en fonction de la température pour un corps ferromagnétique.

on peut obtenir une caractéristique du milieu. Attention, l’expression (7.50) n’est pas linéaire (voir Figure 7.21 pour l’exemple du *mumétal*).

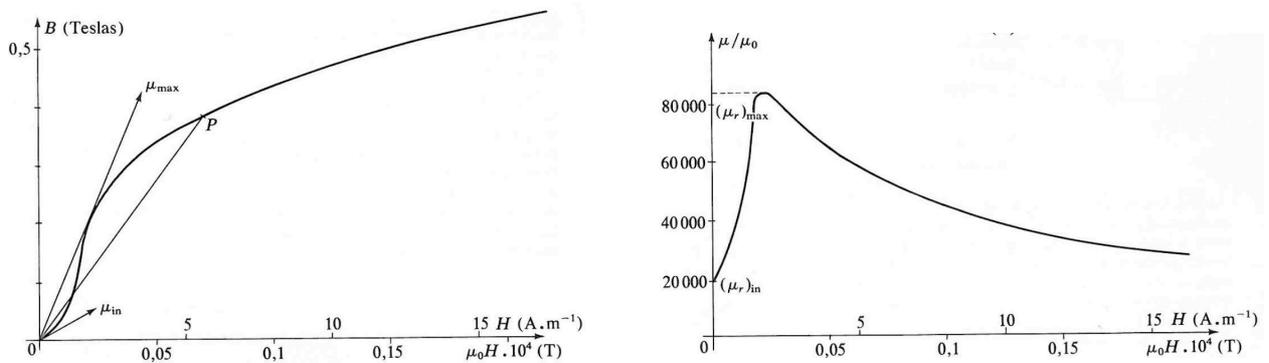


FIGURE 7.21 – Variation de B en fonction de H (à gauche) et perméabilité magnétique (à droite) du mumétal.

Quelques valeurs de $\mu_{r,max}$ sont données Table 7.2. Ces valeurs ne sont qu’indicatives car les compositions exactes sont souvent inconnues.

Réfraction des lignes de champ

Si de plus la surface de séparation entre les deux milieux (supposés lhi à partir de maintenant) ne comporte pas de charges libres ($\sigma_{libre} = 0$ et $\vec{K}_{libre} = \vec{0}$), les deux conditions sur E_T et H_T peuvent s’écrire, avec les notations de la Figure 7.22 :

$$B_1 \cos(\alpha_1) = B_2 \cos(\alpha_2) \quad \text{et} \quad \frac{B_1}{\mu_1} \sin(\alpha_1) = \frac{B_2}{\mu_2} \sin(\alpha_2)$$

dont on déduit :

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\mu_1} = \frac{\tan(\alpha_2)}{\mu_2} \tag{7.51}$$

Cette relation caractérise la *réfraction* des lignes du champ \vec{B} à la traversée de la surface de séparation de deux milieux magnétiques lhi.

On en déduit une règle très générale : les milieux ferromagnétiques dont la susceptibilité est très élevée guident les lignes de champ. A titre d’exemple, la Figure 7.23 indique ce qui se passe pour un noyau de fer doux inséré dans une bobine.

Dans le cas d’un aimant permanent, toutes les lignes de champ traversent l’aimant, et elles forment toutes des boucles fermées, même si cela ne semble pas évident sur la Figure 7.24 qui représente les lignes de champ pour trois types communs d’aimant permanent. On appelle *pôle Sud* l’extrémité d’un aimant par laquelle les lignes de champ y pénètrent et *pôle Nord* l’extrémité par laquelle les lignes de champ quittent l’aimant.

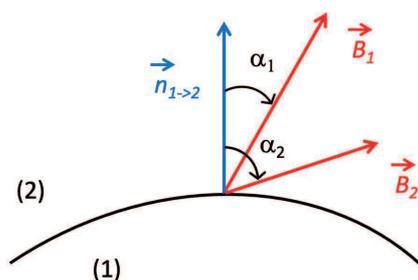


FIGURE 7.22 – Le champ magnétique se réfracte à la traversée entre deux milieux magnétiques lhi.

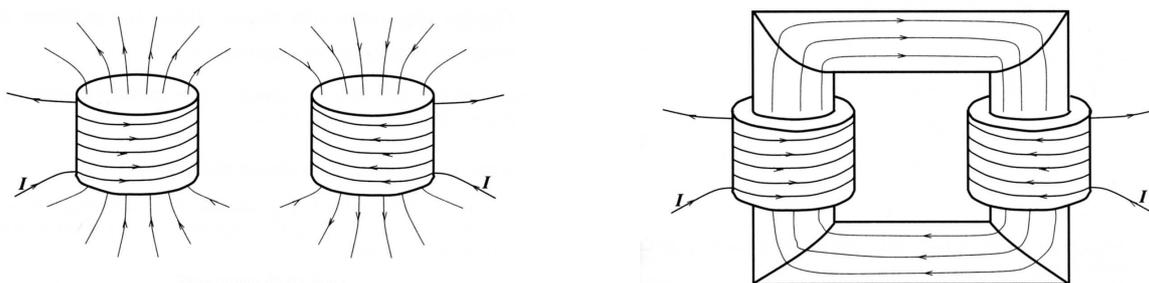


FIGURE 7.23 – Les lignes du champ \vec{B} créé par deux bobines se répartissent dans (presque) tout l'espace (à gauche), tandis qu'avec un noyau de fer doux (à droite), les lignes de champ sont canalisées.

Cycles d'hystérésis - Matériaux « durs » et « mous »

Si on considère un matériau initialement non aimanté, on peut lui faire décrire la courbe de première aimantation en augmentant H . Par contre, en diminuant H , on ne parcourt pas la courbe de première aimantation mais la courbe caractéristique d'un *cycle d'hystérésis* (cf Figure 7.25).

On distingue des ferromagnétiques *doux* des ferromagnétiques *durs* (cf Figure 7.26). Les premiers ont un cycle d'hystérésis dont la surface est faible, ce qui entraîne une faible dissipation de puissance au cours d'un cycle. Les seconds ont une excitation coercitive élevée qui permet d'éviter une désaimantation accidentelle. Cela entraîne généralement une dissipation de puissance relativement élevée au cours d'un cycle, comme on le verra au § 7.4.

La Table 7.2 donne quelques exemples de corps ferromagnétiques. Certains, tels que l'acier, sont des ferromagnétiques durs. D'autres, tels que le fer pur, sont des ferromagnétiques doux.

Matériaux	Composition	μ_r max	B_S (T)	H_c (A/m)
Acier	Fe, de 0,02 à 2% de C	≈ 2000	2,1	144
Fer	99,9% Fe	≈ 5000	2,15	80
Fer pur	99,95% Fe	≈ 180000	2,15	4
Fer au silicium	96% Fe, 4% Si	≈ 7000	1,97	40
Mumétal	18% Fe, 75% Ni, 2% Cr, 5% Cu	≈ 100000	0,65	4
Permalloy	21,2% Fe, 78,5% Ni, 0,3% Mn	≈ 100000	1,07	4
Supermalloy	15,7% Fe, 79% Ni, 5% Mo, 0,3% Mn	≈ 800000	0,8	0,16

TABLE 7.2 – Caractéristiques magnétiques typiques de certains corps ferromagnétiques. Les compositions exactes sont des secrets technologiques et sont donc approximatives.

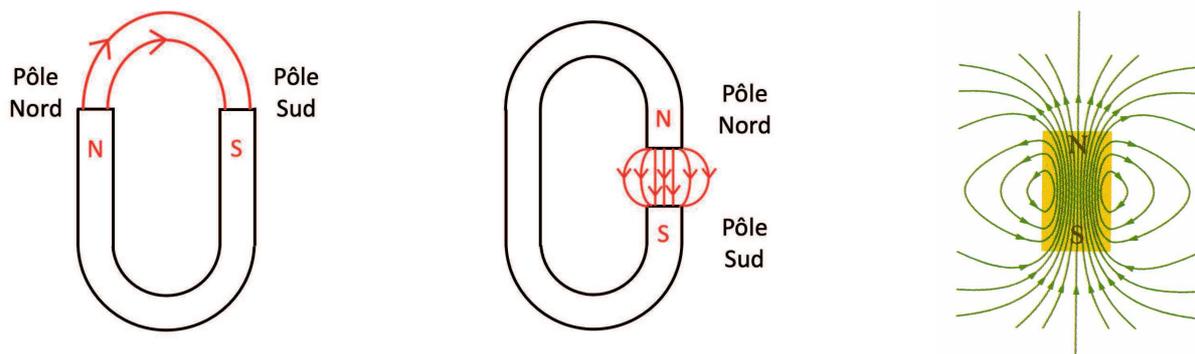


FIGURE 7.24 – Lignes de champ d'un *aimant en U* (à gauche), d'un *aimant en C* (au milieu) et d'un *barreau aimanté* (à droite).

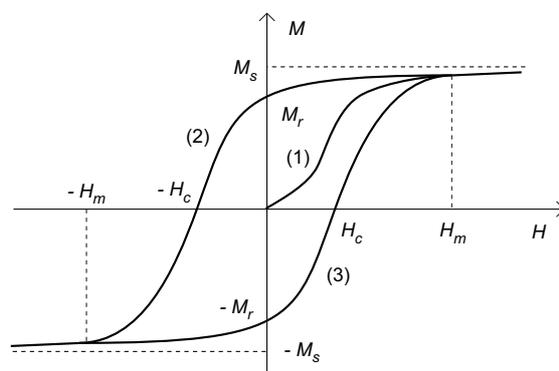


FIGURE 7.25 – Cycle d'hystérésis décrit par un matériau ferromagnétique.

Domaines et parois

L'interprétation classique du ferromagnétisme est basée sur plusieurs hypothèses :

1. Un matériau ferromagnétique (même monocristallin) est divisé en diverses régions appelées *domaines de Weiss* au sein desquels tous les moments magnétiques sont alignés entre eux et induisent une aimantation spontanée \vec{M}_{sp} dans une direction donnée.
2. Les domaines sont séparés par des parois.

L'aimantation globale de l'échantillon est la moyenne des aimantations \vec{M}_{sp} de tous les domaines et varie d'une aimantation nulle lorsque les domaines n'ont pas de direction privilégiée à l'aimantation à saturation M_S lorsque tous les domaines ont une aimantation orientée dans la même direction.

Les parois entre les domaines sont des zones où l'aimantation change de direction. Selon les milieux, on trouve le plus fréquemment des retournements de 180° (*paroi de Bloch*) mais on trouve également des rotations plus surprenantes (par exemple de 90° dans du fer ou de $70,5^\circ$ dans du nickel). L'existence des parois vient du fait que l'énergie de constitution d'une paroi est plus faible que si le changement était brusque.

La dimension moyenne des domaines (et donc l'aimantation du matériau) est la compétition entre deux phénomènes :

1. La décomposition du matériau en domaines de **Weiss** diminue l'aimantation, donc le champ \vec{B} créé par l'aimantation. L'énergie magnétique $B^2/(2\mu_0)$ associée à ce champ diminue donc en même temps que la taille des domaines.
2. La création d'une paroi nécessite de l'énergie, proportionnelle à la surface, qui augmente lorsque la taille des domaines diminue.

Un équilibre entre ses deux effets, dépendant de \vec{B} , fixe la dimension moyenne des domaines.

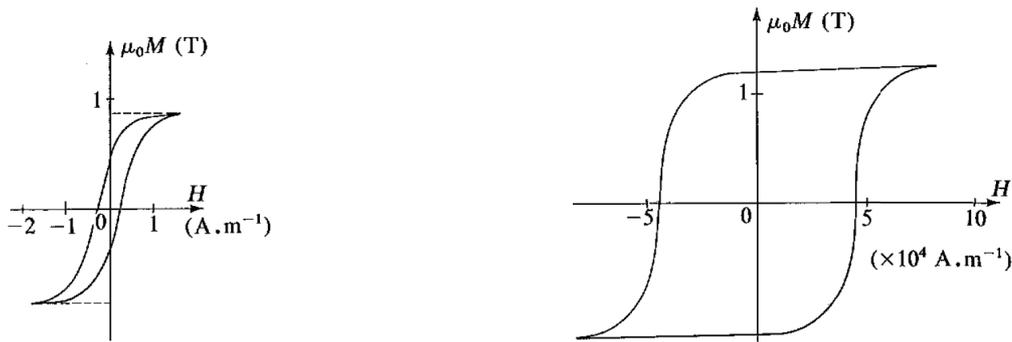


FIGURE 7.26 – Variation de M en fonction de H pour un ferromagnétique doux (le mumétal, à gauche) et un ferromagnétique dur (l’Alnico, à droite). Notez la différence d’un facteur 10^4 entre les deux échelles horizontales (Figure extraite de [6]).

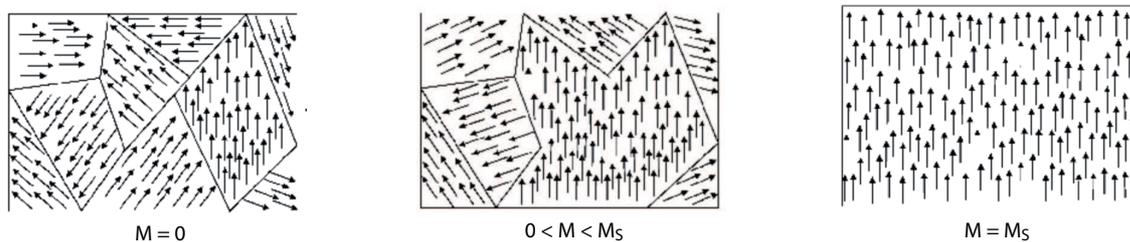


FIGURE 7.27 – Un milieu magnétique est constitué d’un grand nombre de domaines au sein desquels les moments sont tous parallèles. L’aimantation M de l’échantillon est la moyenne sur tous les domaines, dont la taille moyenne est liée au champ magnétique (voir texte).

Explication semi-quantique : intégrales d’échanges

A l’échelle atomique, on a vu au § 7.1 que le magnétisme a deux origines :

1. La magnétisme orbital dû au mouvement des électrons. Il est décrit par leurs fonctions d’onde.
2. Le magnétisme de spin, intrinsèque aux électrons qui se comportent comme des dipôles magnétiques ponctuels.

Dans un cristal, les liaisons chimiques localisent les fonctions d’onde des électrons, ce qui empêche toute contribution orbitale au magnétisme. En fait, le ferromagnétisme est essentiellement lié aux spins non appariés.

Pour expliquer comment ces spins se couplent entre eux, **Heisenberg** a proposé en 1928 une *interaction d’échange*, basée sur l’existence d’un couplage par l’intermédiaire des fonctions d’onde : l’orientation des spins influe sur la répartition spatiale des fonctions d’onde, donc sur l’énergie. On introduit pour cela une *énergie d’échange* W_{ij} donnée par :

$$W_{ij} = -2 J_e \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \quad (7.52)$$

correspondant au couplage entre les spins \vec{S}_i et \vec{S}_j . Le terme J_e correspond au recouvrement des fonctions d’onde et s’appelle l’*intégrale d’échange*. Des calculs de mécanique quantique montrent que typiquement, $W_{ij} \approx 0,1$ eV/paire.

L’intégrale d’échange J_e dépend du recouvrement des fonctions d’onde et est très sensible à la distance entre les atomes. Des calculs de mécanique quantique montrent que $J_e > 0$ (spins parallèles) sera favorisé si la distance inter-atomique est grande (Fe, Co, Ni), tandis que sinon, les spins antiparallèles seront favorisés (cf Figure 7.28).

Ceci est un exemple où une interaction à très courte portée se traduit de proche en proche par un ordre à grande distance.

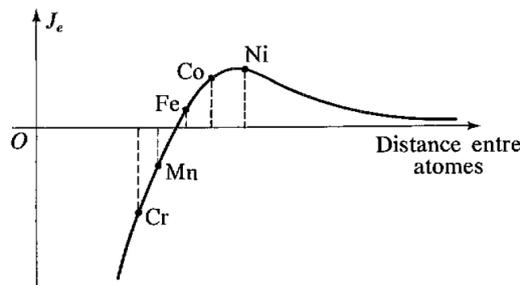


FIGURE 7.28 – L’intégrale d’échange J_e dépend de la distance entre les atomes. Elle est positive pour les corps ferromagnétiques (Figure extraite de [9]).

Conclusion sur les matériaux ferromagnétiques

L’étude qui vient d’être faite a montré que les matériaux ferromagnétiques sont non-linéaires, et peu faciles à modéliser. Ils ne se prêtent pas à des analyses mathématiques rigoureuses. Pour des études plus poussées, il faut utiliser des codes de simulation assez lourd à manipuler. Ou bien se contenter des petits modèles développés dans ce chapitre...

7.3.4 Autres milieux magnétiques

Le ferromagnétisme correspond à des spins parallèles dans un même domaine de **Weiss**. Il existe d’autres dispositions particulières ayant des propriétés magnétiques importantes (cf Figure 7.29) :

1. L’*antiferromagnétisme* concerne des milieux dont les atomes, éloignés les uns des autres, portent des moments magnétiques qui interagissent fortement entre eux avec $J_e < 0$. La distance inter-atomique est alors inférieure à celle de fer. La configuration de l’énergie d’échange (7.52) la plus stable est celle où les moments sont antiparallèles (chrome et manganèse).

Le magnétisme macroscopique est quasiment nul. Par contre, on observe un comportement paramagnétique en présence d’un champ appliqué : cet *ordre antiferromagnétique* disparaît au delà d’une température critique (*température de Néel*).

2. Le *ferrimagnétisme* concerne des milieux comportant deux types d’atomes différents, dont les moments sont orientés tête-bêche. Le magnétisme macroscopique d’un ferrimagnétique est plus faible que celui d’un ferromagnétique. On observe un comportement paramagnétique au delà d’une température critique.

Les plus connus sont les *ferrites*, oxydes de fer et d’un autre métal tel que Ni, Al, Mn, etc... Par exemple, on a MnFeO_4 et Fe_3O_4 ⁶.

Les corps ferrimagnétiques sont des isolants électriques très utilisés par exemple lorsqu’il s’agit de parcourir un cycle très souvent : leur très forte résistivité fait il n’y a pas de dissipation par courant de Foucault.

3. L’*hélismagnétisme* concerne des corps pour lesquels les spins tournent d’un angle fixe d’une couche atomique à une autre (par exemple 129° pour MNO_2). Ceci résulte d’une compétition entre des interactions d’échanges ferromagnétiques et antiferromagnétiques.

Au niveau macroscopique, l’aimantation totale d’un système hélismagnétique est nulle, car les moments sont orientés dans toutes les directions.

7.3.5 Résumé

La Figure 7.30 résume de comportement des lignes de champ au voisinage d’un matériau magnétique quelconque. Noter que dans le cas du diamagnétisme et du paramagnétisme, l’effet visuel est très exagéré, les

6. Ce qui fait que les premiers matériaux magnétiques connus en Occident, issus de Magnésie, étaient en fait des ferrimagnétiques.

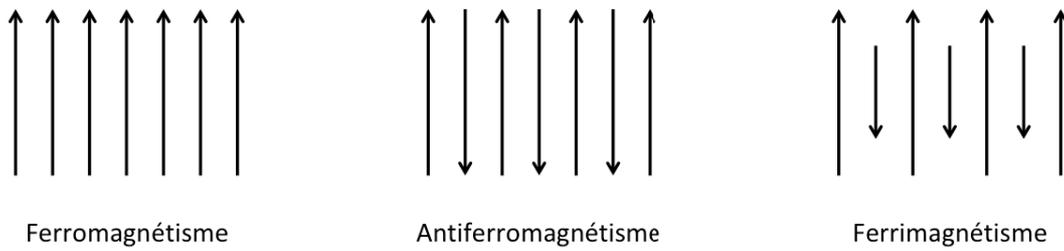


FIGURE 7.29 – Arrangement schématique des spins pour les corps ferromagnétiques, antiferromagnétiques et ferrimagnétiques.

susceptibilités étant trop faibles pour permettre un effet visible à cette échelle (sauf pour un supraconducteur considéré comme un corps diamagnétique parfait).

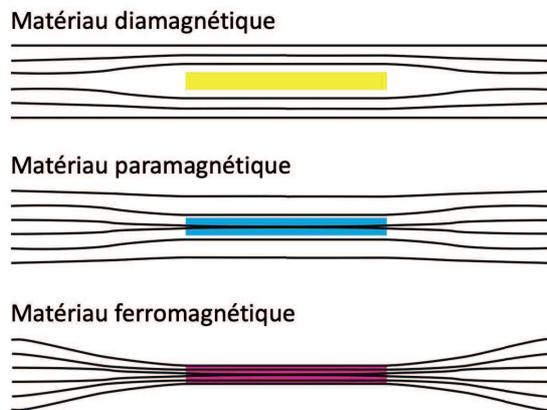


FIGURE 7.30 – Comportement des lignes de champ au voisinage d'un matériau dia, para ou ferromagnétique.

7.4 Aimantation en régime variable

La description d'un milieu magnétique en termes de charges d'aimantation faite précédemment peut également être appliquée aux régimes variables dans le temps. On se limitera néanmoins ici à la réponse d'un matériau soumis à un champ sinusoïdal.

Si on considère un matériau initialement non aimanté, on peut lui faire décrire la courbe de première aimantation en augmentant H . Par contre, en diminuant H , on ne parcourt pas la courbe de première aimantation mais la courbe caractéristique d'un *cycle d'hystérésis* (cf Figure 7.25). En utilisant un montage en bobine torique tel que défini sur Figure 7.17, on a :

$$V_1 - V_2 = N S \frac{dB}{dt} \quad \text{et} \quad I = \frac{H \ell}{N}$$

La puissance \mathcal{P} fournie s'écrit au matériau s'écrit donc :

$$\mathcal{P} = I(V_1 - V_2) = \ell S H \frac{dB}{dt}$$

Le travail volumique dw fournit au matériau pour faire varier le champ de dB est :

$$dw = \frac{\mathcal{P} dt}{\ell S} = H dB$$

L'énergie volumique fournie pour décrire un cycle d'hystérésis complet est donc :

$$w = \oint H dB = \oint H [\mu_0 d(H + M)] = \mu_0 \oint H dH + \mu_0 \oint H dM$$

Or, sur un cycle, $\oint H dH = [H^2/2]_{Cycle} \equiv 0$. Donc il reste :

$$w = \mu_0 \oint H dM \quad (7.53)$$

L'énergie volumique dissipée au cours d'un cycle (cf Figure 7.25) est proportionnelle à l'aire du cycle en coordonnées (H, M) . On généralisera ce résultat obtenu dans le cas particulier d'un montage en bobine torique à tous les matériaux magnétiques subissant un cycle d'hystérésis.

7.5 Aspects énergétiques des milieux magnétiques : le travail d'aimantation

Les considérations énergétiques associées aux milieux magnétiques peuvent être assez complexes. Le cas général est donné en Complément E.4. On ne donne ici sans démonstration que le cas simple de systèmes pour lesquels on peut négliger le couplage entre l'aimantation et le milieu (et donc négliger toute correction au champ appliqué par le champ créé par l'aimantation).

Tout matériau magnétique peut recevoir de l'énergie sous forme de chaleur, de travail dû aux forces de pression, de déplacement, et de travail magnétique. Dans le cas général, l'aimantation \vec{M} dépend du champ \vec{B} , qui lui-même dépend de \vec{M} . Si l'aimantation est faible, alors le couplage entre le milieu magnétique et le champ \vec{B} sera négligeable. On peut alors supposer que la présence du matériau magnétique ne modifie pas la répartition des courants libres.

On montre que le travail δW_m reçu se met sous la forme :

$$\delta W_m = \iiint_{Espace} \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \delta \vec{B} dV - \iiint_{Espace} \vec{M} \cdot \delta \vec{B} dV \quad (7.54)$$

En cas d'absence de couplage entre un milieu lhi et les courants libres du milieux, ce qui est en particulier vrai pour les corps diamagnétiques ou paramagnétiques, on pourra séparer les deux contributions à δW_b : le premier terme de (7.54) sera le travail fourni au champ macroscopique \vec{B} tandis que le deuxième terme sera associé au travail fourni au matériau magnétique. Dans ce cas, le *travail magnétique* peut se mettre sous trois formes différentes :

1. L'énergie magnétostatique du vide (externe au milieu magnétique) s'écrit :

$$W_1 = \iiint_{Espace} \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{H} dV \quad (7.55)$$

2. L'énergie fournie au milieu magnétique introduit dans le champ (énergie interne au milieu magnétique) s'écrit :

$$W_2 = \iiint_{Espace} \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{M} dV \quad (7.56)$$

3. Enfin, l'énergie fournie par le générateur en introduisant le milieu magnétique dans le champ s'écrit :

$$W_m = \iiint_{Espace} \vec{H} \cdot d\vec{B} dV \quad (7.57)$$

Cette dernière relation ne fait que traduire la conservation de l'énergie puisque $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$, ce qui est équivalent à dire que $W_m = W_1 + W_2$.

On notera bien que la séparation entre W_1 et W_2 ne peut se faire que dans le cas où on peut négliger le couplage entre le milieu magnétique et le champ \vec{B} .

Conclusion

L'aimantation s'étudie principalement en se limitant au 1^{er} ordre du développement limité des termes du potentiel-vecteur. Le cas du ferromagnétisme est délicat à interpréter sans la mécanique quantique. Seuls les ordres de grandeur sont accessibles par la physique classique.

Chapitre 8

Electrodynamique dans les milieux

Sommaire

8.1	Equations de Maxwell	225
8.2	Une nouvelle forme pour u et \vec{R} à partir des charges libres	227
8.3	Energie et quantité de mouvement du champ	228

Introduction

Après une généralisation de certaines notions vues dans le cadre des seules densités ρ_{libre} et \vec{J}_{libre} au chapitre 1, ce chapitre abordera les questions énergétiques dans les milieux diélectriques et magnétiques possédant également des densités $\rho_{lié}$ et $\vec{J}_{lié}$.

Dans ce chapitre, on reprend certaines notions vues en début de cours, mais en considérant désormais l'influence des densités totales ρ_{tot} et \vec{J}_{tot} , et plus uniquement ρ_{libre} et \vec{J}_{libre} .

On a vu précédemment qu'on distinguait deux types de charges, les *charges liées* et les *charges libres* :

1. Les charges liées correspondent à des particules telles que les protons des noyaux ou les électrons des atomes qui sont attachées à la structure du milieu matériel. L'amplitude de leurs éventuels déplacements est de l'ordre de 1 ou 2 Å.
2. Les charges libres peuvent effectuer des déplacements importants, très supérieurs à l'ordre de grandeur des dimensions atomiques. Elles comprennent par exemple les électrons de conduction, ainsi que les particules chargées qu'on peut déposer à la surface d'un isolant.

8.1 Equations de Maxwell

8.1.1 Densités microscopiques et champs macroscopiques

Le champ électromagnétique dans la matière est décrit localement par le couple (\vec{e}, \vec{b}) qui a comme source les particules chargées (portant éventuellement un moment magnétique) qui se déplacent dans la matière et créent les densités ρ_{micro} et \vec{j}_{micro} . Ces champs vérifient les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{e} = \frac{\rho_{micro}}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{b} = \mu_0 \vec{j}_{micro} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{e} = -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0 \end{array} \right. \quad (8.1)$$

Les champs macroscopiques \vec{E} et \vec{B} s'obtiennent à travers le processus de lissage décrit au § 1.1.2. Cette opération de moyenne spatiale symbolisée par $\langle \dots \rangle$ commute avec les dérivations par rapport aux coordonnées d'espace et de temps pour finalement permettre d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\langle \rho_{micro} \rangle}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \langle \vec{j}_{micro} \rangle + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad (8.2)$$

8.1.2 Deux ensembles d'équations équivalentes

D'après ce qu'on a vu aux chapitres 5 et 7, dans le cas très formel d'un milieu qui pourrait à la fois posséder des charges libres et des charges liées dues à une polarisation \vec{P} et à une aimantation \vec{M} , les équations de **Maxwell** s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libre} \quad (\text{MG}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{libre} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{MA}) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{MF}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{M}\Phi) \end{array} \right. \quad (8.3)$$

De manière équivalente, en ne prenant en compte que les termes dipolaires, on peut modifier (MG) et (MA) en introduisant les densités totales $\rho_{tot} = \rho_{libre} + \rho_{lié}$ et $\vec{J}_{tot} = \vec{J}_{libre} + \vec{J}_{lié}$, soit :

$$\rho_{tot} = \rho_{libre} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad \text{et} \quad \vec{J}_{tot} = \vec{J}_{libre} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (8.4)$$

En injectant ces deux expressions dans (8.3), les équations de **Maxwell** s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0} \quad (\text{MG}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{tot} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{MA}) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{MF}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{M}\Phi) \end{array} \right. \quad (8.5)$$

Remarque 1 : Les deux expressions (8.3) et (8.5) sont équivalentes et ne préjugent en rien des propriétés du milieu ni des relations constitutives qui relient \vec{D} à \vec{E} et \vec{B} à \vec{H} (par exemple, on n'a rien supposé sur un éventuel comportement lhi).

Remarque 2 : En comparant les deux systèmes (8.2) et (8.5), on identifiera $\langle \rho_{micro} \rangle$ et ρ_{tot} , ainsi que $\langle \vec{j}_{micro} \rangle$ et \vec{J}_{tot} , dans la limite où on ne prend en compte que les termes du 1^{er} ordre pour le développement des potentiels.

Remarque 3 : Il ne faut pas oublier que les deux systèmes (8.3) et (8.5), ont été obtenus par un procédé de moyennage spatial sur des distances d typiques d'environ $1 \text{ \AA} = 10^{-9} \text{ m}$. Elles ne peuvent donc que décrire des phénomènes dont le temps d'évolution est inférieur à a/c , soit $\approx 10^{-18} \text{ s}$.

Remarque 4 : On peut remarquer que le moyennage spatial n'a aucun caractère de covariance relativiste (ie ne peut pas être invariant par changement de référentiel). Donc les équations de **Maxwell** (8.3) et (8.5) on perdu leur caractère relativiste. Un traitement complètement relativiste aboutirait aux mêmes équations, mais avec des expressions différentes pour \vec{P} et \vec{M} . Ceci sort totalement du cadre de ce cours..

8.1.3 Cas des métaux

Pour les métaux, les densités ρ_{libre} et $\rho_{lié}$ correspondent respectivement aux densités des électrons de conduction et des cations du réseau. En régime permanent et pour toutes les fréquences hertziennes, on a d'après (6.15) $\rho_{tot} = \rho_{libre} + \rho_{lié} \approx 0$ donc (MG) s'écrit toujours $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$.

La densité \vec{J}_{libre} correspond au mouvement d'ensemble des électrons de conduction. Dans les métaux magnétiques, on a $\vec{J}_{lié} \neq \vec{0}$ et il faut en tenir compte dans (MA). Par contre, dans les métaux non magnétiques tels que les métaux usuels (Cu, Al, ...) pour lesquels $\mu_r = 1$, (MA) s'écrit simplement :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{libre} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

8.1.4 Equations de conservation de la charge

En prenant la divergence de (MA) dans (8.3), on obtient immédiatement que :

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{libre} + \frac{\partial \rho_{libre}}{\partial t} \quad (8.6)$$

qui montre qu'on vérifie toujours l'équation (1.3) de conservation de la charge (libre) totale.. On montre une relation identique pour les charges liées en partant de l'expression du courant lié total $\vec{J}_{lié} = \vec{\nabla} \times \vec{M} + \partial \vec{P} / \partial t$. La divergence de cette relation montre que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{lié} + \frac{\partial \rho_{lié}}{\partial t} = 0 \quad (8.7)$$

puisque $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}) \equiv 0$.

On a donc montré (et c'est heureux) que les systèmes d'équations (8.3) et (8.5) sont compatibles avec la conservation de la charge, qu'on exprime ceci en terme de charge libre, de charge liée ou de la somme des deux.

8.1.5 La loi de Biot et Savart dans les matériaux

A l'aide du formalisme ci-dessus, pour des distributions localisées, le potentiel-vecteur \vec{A} s'écrira, avec les notations de la Figure 7.6 :

$$\vec{A}(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{Espace} \frac{1}{PQ} \left(\vec{J}_{libre} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{M} \right) d^3P \quad (8.8)$$

dont on déduit une forme plus générale de l'équation de **Biot** et **Savart** :

$$\vec{B}(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{Espace} \left(\vec{J}_{libre} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{M} \right) \times \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} d^3P \quad (8.9)$$

8.2 Une nouvelle forme pour u et \vec{R} à partir des charges libres

En utilisant la forme locale (1.3) de la conservation de la charge, on a pu prouver au § 1.4.1 l'existence d'un couple (u, \vec{R}) donné par (1.44). En adoptant le formalisme macroscopique dans les milieux (8.3), on cherche un nouveau couple (u', \vec{R}') qui utiliserait uniquement les charges libres. Si un tel couple existe, d'après l'équation locale de conservation de l'énergie (1.43) il doit vérifier :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{R}' + \frac{\partial u'}{\partial t} = -\vec{J}_{libre} \cdot \vec{E} \quad (8.10)$$

En multipliant scalairement (MF) par \vec{H} et en lui soustrayant (MA) multipliée par \vec{E} , on obtient :

$$\left(\vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \right) + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\vec{J}_{libre} \cdot \vec{E}$$

D'après (A.9), l'identité de **Poynting** (1.38) s'écrit donc ici :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{J}_{libre} \cdot \vec{E} \quad (8.11)$$

Dans le cas général, l'interprétation de (8.11) est quasi impossible. Dans le cas particulier des milieux lhi, pour lesquels on a $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ et $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$, on peut poser :

$$du' = \vec{E} \cdot d\vec{D} + \vec{H} \cdot d\vec{B} = d \left(\frac{\epsilon_0 \epsilon_r E^2}{2} + \frac{B^2}{2 \mu_0 \mu_r} \right) \quad (8.12)$$

Dans ce cas, l'identité de **Poynting** (8.11) prend une forme identique à la forme locale de la conservation de l'énergie (8.10) si on pose :

$$u' = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \quad \text{et} \quad \vec{R}' = \vec{E} \times \vec{H} \quad (8.13)$$

Remarque 1 : On pourrait montrer que la relation (8.13) reste encore valable pour les milieux linéaires non isotropes pour lesquels ϵ_r et μ_r sont représentés par les tenseurs de permittivité et de perméabilité, qui sont des opérateurs linéaires.

Remarque 2 : L'utilisation de u' et \vec{R}' à la place de u et \vec{R} répond au souci d'utiliser les quantités ρ_{libre} et \vec{J}_{libre} , parfois plus simples à appréhender que les quantités liées $\rho_{lié}$ et $\vec{J}_{lié}$.

Remarque 3 : Pour les milieux linéaires, l'emploi de \vec{R}' et u' est "évident". Il est donc malheureusement fréquent que les ' soient oubliés. On trouve souvent dans la littérature (8.13) écrit avec \vec{R} et u , même s'il s'agit en fait de \vec{R}' et u' .

8.3 Energie et quantité de mouvement du champ

8.3.1 Energie transférée aux charges

Il semble naturel de poser que la puissance cédée par le champ aux charges du milieu se met sous la forme :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dV} = \vec{J}_{tot} \cdot \vec{E} \quad (8.14)$$

puisqu'elle comprend les contributions associées aux charges libres et aux charges liées.

8.3.2 Quantité de mouvement transférée aux charges

En sommant sur toutes les charges, on obtient la variation de l'impulsion totale \vec{p}_{tot} d'une distribution caractérisée par ρ et \vec{J} dans un milieu lhi :

$$\frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = \iiint_{Espace} (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) dV$$

qu'on peut modifier en exprimant ρ et \vec{J} en fonction des champs :

$$\frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = \iiint_{Espace} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \vec{E} dV + \iiint_{Espace} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \times \vec{B} dV - \iiint_{Espace} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \times \vec{B} dV$$

En utilisant le fait que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \equiv 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} &= \iiint_{Espace} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \vec{E} dV + \iiint_{Espace} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{H} dV + \iiint_{Espace} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \times \vec{B} dV \\ &\quad - \iiint_{Espace} \frac{\partial \vec{D} \times \vec{B}}{\partial t} + \iiint_{Espace} \vec{D} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dV \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant (MF), il reste :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\vec{p}_{tot} + \iiint_{Espace} \vec{D} \times \vec{B} dV \right) &= \iiint_{Espace} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \vec{E} dV + \iiint_{Espace} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \times \vec{D} dV \\ &+ \iiint_{Espace} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{H} dV + \iiint_{Espace} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \times \vec{B} dV \end{aligned}$$

On montre après quelques développements que :

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{p}_{tot} + \iiint_{Espace} \vec{D} \times \vec{B} dV \right) = \iiint_{Espace} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} dV \quad (8.15)$$

où les composantes du tenseur $\overline{\overline{T}}$ sont $T_{ij} = T_{ij}^E + T_{ij}^B$ avec :

$$T_{ij}^E = \frac{1}{2} (D_i E_j + E_j D_i) - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\vec{D} \cdot \vec{E}) \quad \text{et} \quad T_{ij}^B = \frac{1}{2} (B_i H_j + B_j H_i) - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\vec{B} \cdot \vec{H}) \quad (8.16)$$

La relation (8.15) s'interprète comme une loi de conservation de l'impulsion. Le champ électromagnétique contient ainsi une *densité d'impulsion* \vec{g} :

$$\vec{g} = \vec{D} \times \vec{B}$$

Remarque : A l'aide du même raisonnement qu'au § 1.4.3, il est naturel d'introduire une *densité $\vec{\ell}$ de moment cinétique* portée par le champ électromagnétique :

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{g} = \vec{r} \times (\vec{D} \times \vec{B})$$

Conclusion

En résumé, l'électrodynamique dans les milieux se traite comme comme l'électrodynamique dans le vide, en introduisant les densités totales ρ_{tot} et \vec{J}_{tot} à la place des densités libres ρ_{libre} et \vec{J}_{libre} .

Certains points supplémentaires, concernant l'adaptation aux milieux du formalisme développé dans le vide au chapitre 1, sont développés en Complément E.5, à la fin de cette partie.

Annexe E

Compléments des Chapitres 5 à 8

Sommaire

E.1 Réponse d'un milieu à une excitation selon sa géométrie	231
E.2 Relations de Kramers-Kronig	233
E.3 Complément sur l'énergie associée aux milieux diélectriques	234
E.4 Complément sur l'énergie associée aux milieux magnétiques	239
E.5 Complément d'électrodynamique dans les milieux	241

E.1 Réponse d'un milieu à une excitation selon sa géométrie

E.1.1 Milieux diélectriques

On pourrait montrer que pour un ellipsoïde lhi uniformément polarisé, le champ \vec{E}_i créé par la polarisation à l'intérieur du diélectrique se met sous la forme :

$$\vec{E}_i = - [n] \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \tag{E.1}$$

où $[n]$ est une matrice 3×3 . Dans la base des axes principaux de l'ellipsoïde (qui coïncide avec $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$), $[n]$ est diagonale et vérifie $n_{xx} + n_{yy} + n_{zz} = 1$. Dans tous les exemples détaillés ci-dessous, la polarisation originelle \vec{P} est orientée selon (Oz) .

Cas de la sphère

Par raison de symétrie, on a $n_{xx} = n_{yy} = n_{zz} = 1/3$. On retrouve bien (5.31) :

$$\vec{E}_i = - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \vec{D}_i = \frac{2\vec{P}}{3} \tag{E.2}$$

Cas d'un cylindre allongé

Un cylindre peut être décrit comme un ellipsoïde infiniment allongé (cf Figure E.1). En orientant le cylindre selon (Oz) , on a $n_{xx} = n_{yy} = 1/2$ et $n_{zz} = 0$. On obtient :

$$\vec{E}_i = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{D}_i = \vec{P} \tag{E.3}$$

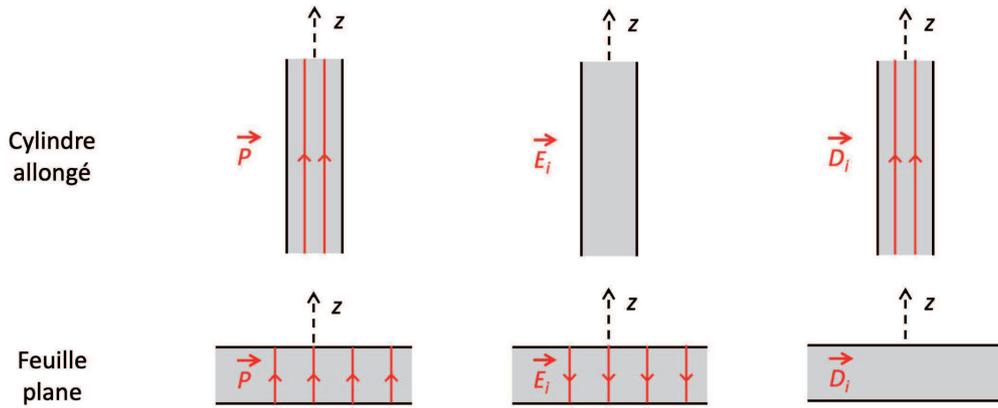


FIGURE E.1 – Les champs \vec{E}_i et \vec{D}_i dus à la polarisation \vec{P} orientés selon (Oz) s’obtiennent facilement dans le cas d’une ellipsoïde (voir texte).

Cas d’une feuille plane

Une feuille plane peut être décrite comme un ellipsoïde infiniment aplati (cf Figure E.1). En orientant la feuille selon (Ox) , on a $n_{xx} = n_{yy} = 0$ et $n_{zz} = 1$. On obtient :

$$\vec{E}_i = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \vec{D}_i = \vec{0} \quad (\text{E.4})$$

E.1.2 Milieux magnétiques

Dans le cas d’un ellipsoïde l’hi uniformément aimanté, le champ \vec{B}_i créé par l’aimantation à l’intérieur du milieu magnétique se met sous la forme :

$$\vec{B}_i = \mu_0 \vec{M} - \mu_0 [n] \vec{M} \quad (\text{E.5})$$

où $[n]$ est une matrice 3×3 . Dans la base des axes principaux de l’ellipsoïde (qui coïncide avec $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$), $[n]$ est diagonale et vérifie $n_{xx} + n_{yy} + n_{zz} = 1$. Dans tous les exemples détaillés ci-dessous, l’aimantation originelle \vec{M} est orientée selon (Oz) .

Cas de la sphère

Par raison de symétrie, on a $n_{xx} = n_{yy} = n_{zz} = 1/3$. On retrouve bien (7.28) :

$$\vec{B}_i = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M} \quad \text{et} \quad \vec{H}_i = -\frac{\vec{M}}{3} \quad (\text{E.6})$$

Cas d’un cylindre allongé

Un cylindre peut être décrit comme un ellipsoïde infiniment allongé (cf Figure E.2). En orientant le cylindre selon (Oz) , on a $n_{xx} = n_{yy} = 1/2$ et $n_{zz} = 0$. On obtient :

$$\vec{B}_i = \mu_0 \vec{M} \quad \text{et} \quad \vec{H}_i = \vec{0} \quad (\text{E.7})$$

Cas d’une feuille plane

Une feuille plane peut être décrite comme un ellipsoïde infiniment aplati (cf Figure E.2). En orientant la feuille selon (Ox) , on a $n_{xx} = n_{yy} = 0$ et $n_{zz} = 1$. On obtient :

$$\vec{B}_i = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{H}_i = -\vec{M} \quad (\text{E.8})$$

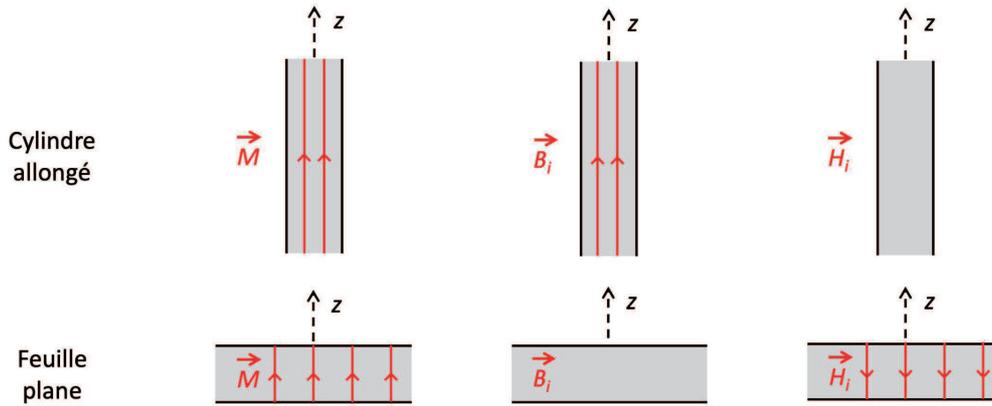


FIGURE E.2 – Les champs \vec{B}_i et \vec{H}_i dus à l'aimantation \vec{M} orientés selon (Oz) s'obtiennent facilement dans le cas d'une ellipsoïde (voir texte).

E.2 Relations de Kramers-Kronig

Les relations de **Kramers-Kronig** sont générales dès que l'on regarde la réponse d'une grandeur à une perturbation externe appliquée. On va donner ici un aperçu de la démonstration¹ dans le cas de la susceptibilité d'un diélectrique : la réponse (la polarisation) est la conséquence de l'application d'une perturbation (le champ électrique).

E.2.1 Propriétés temporelles de la susceptibilité

La causalité impose que $\chi(t)$ soit nulle pour $t < 0$, ce qui s'écrit :

$$P(t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^t \chi(t-t') E(t') dt'$$

On suppose que quelque soit l'instant t considéré, le champ \vec{E} est constant et donc que le régime est établi (le régime transitoire est passé). On a donc :

$$P(t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^0 \chi(-t') E dt' = \epsilon_0 \chi E \quad \text{d'où} \quad \chi = \int_0^{\infty} \chi(t') dt'$$

Ayant atteint la réponse statique à un champ statique, on coupe le champ appliqué \vec{E} à l'instant $t = 0$. On a alors un retour vers l'état d'équilibre $P = 0$. On a alors :

$$P(t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^0 \chi(t-t') E dt' = \epsilon_0 \left(\chi - \int_0^t \chi(t') dt' \right) E$$

On écrira que $\chi(t) = \chi(t) H(t)$ où $H(t) = 0$ pour $t < 0$ et $H(t) = 1$ pour $t > 0$.

E.2.2 Réponse du système en fréquence

On pose :

$$\tilde{\chi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t) \exp(i\omega t) dt \quad (\text{E.9})$$

Pour que la réponse ait un sens physique, on doit avoir $\tilde{\chi}(\omega) = \tilde{\chi}^*(-\omega)$, dont on tire :

$$\tilde{\chi}'(\omega) = \tilde{\chi}'(-\omega) \quad \text{et} \quad \tilde{\chi}''(\omega) = -\tilde{\chi}''(-\omega)$$

1. La démonstration donnée ici est très (trop) succincte. Voir un cours de mathématiques pour plus de détails.

On peut étendre ω dans le demi plan complexe supérieur : l'intégrale restera convergente pour $t \rightarrow \infty$. Comme la transformée de **Fourier** de $H(t)$ est :

$$\tilde{H}(\omega) = \frac{-i}{\omega} + \pi \delta(\omega)$$

et que la transformée de **Fourier** d'un produit est la convolution² des deux transformées de **Fourier**, on a :

$$\tilde{\chi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \tilde{\chi}(\omega) * \tilde{H}(\omega)$$

Après calculs, on obtient :

$$\tilde{\chi}(\omega) = -i \mathcal{P} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\chi}'(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' \right)$$

où \mathcal{P} représente la partie principale³. En en extrayant les parties réelles et imaginaires, on obtient les relations de **Kramers-Kronig** :

$$\chi'(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi''(s)}{\omega - s} ds \right) \quad \text{et} \quad \chi''(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi'(s)}{\omega - s} ds \right) \quad (\text{E.10})$$

E.3 Complément sur l'énergie associée aux milieux diélectriques

L'étude énergétique des milieux diélectriques est assez complexe. Elle a été abordée au chapitre 5 dans la situation particulière du champ uniforme, obtenu à l'aide d'un condensateur plan. On montrera dans ce paragraphe⁴ comment élargir ce qui a été vu, et en particulier comment on peut obtenir dans le bilan énergétique la contribution interne au système des mécanismes de polarisation.

E.3.1 Travail de polarisation en régime statique

Pour créer une distribution de charges, il faut fournir l'énergie de constitution de la distribution, qui est différente s'il existe ou non un milieu diélectrique dans le système.

Tout matériau diélectrique peut recevoir de l'énergie sous forme de chaleur, de travail dû aux forces de pression, de déplacement, et de *travail électrique*. C'est cette forme de travail qui sera détaillée dans ce paragraphe d'assez haut niveau, qui ne considère que des champs statiques.

Travail fourni par les générateurs en présence d'un matériau diélectrique

Le système considéré est constitué du milieu diélectrique (supposé sans charges libres pour simplifier), des conducteurs qui portent toutes les charges libres et de tout l'espace où le champ \vec{E} est non nul. Les générateurs sont supposés à l'extérieur du système. On supposera que les conducteurs et les milieux diélectriques sont immobiles, il n'y a aucun travail mécanique fourni au système.

Une petite modification δQ_i de la charge sur le conducteur $\#i$ (au potentiel Φ_i) nécessite un travail fourni par les générateurs (externes) donc reçu par le système. D'après (2.49), en négligeant l'effet **Joule** dans les conducteurs, ce travail total δW_e reçu par tous les conducteurs se met sous la forme :

$$\delta W_e = \sum_i \Phi_i \delta Q_i$$

2. Le produit de convolution est un opérateur qui, à deux fonctions f et g réelles ou complexes sur un même domaine infini, fait correspondre la fonction $f * g$ sur ce domaine, définie par :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x-t) dt$$

Le produit de convolution généralise l'idée de moyenne glissante.

3. La partie principale d'une fonction f est le premier terme non nul du développement limité de cette fonction, lorsqu'il existe.

4. Ce paragraphe doit beaucoup à l'excellente référence [6], qui suit le programme des CPGE de cette époque. Le lecteur intéressé y trouvera plus de détails que dans ce cours qui n'en est qu'un résumé succinct..

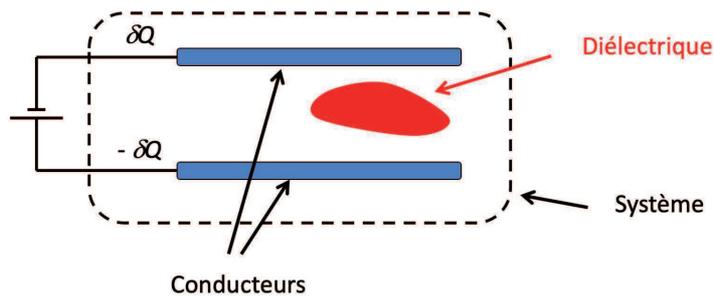


FIGURE E.3 – Le système utilisé comprend le diélectrique, les conducteurs, et tout l'espace où le champ \vec{E} est non nul (voir texte).

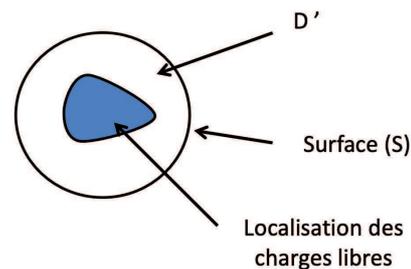


FIGURE E.4 – Le volume (D') est une sphère qui englobe toutes les charges libres.

Le passage aux distributions continues permet d'écrire que :

$$\delta W_e = \iiint_{(D)} \Phi \delta \rho_{libre} dV \quad (\text{E.11})$$

où l'intégration a lieu sur le volume (D) contenant toutes les charges libres.

Remarque : Les modifications de l'équilibre électrostatique des charges libres en ajoutant $\pm \delta Q$ se font en des temps bien plus courts que ceux nécessaire aux changements de la polarisation. L'expression (E.11) ne nécessite donc pas que les diélectriques soient en équilibre interne.

Une première expression du travail en fonction des champs

On considère un domaine (D') sphérique de rayon R englobant toutes les charges contenues dans le domaine (D) (cf Figure E.4). On a :

$$\delta W_e = \iiint_{(D)} \Phi \delta \rho_{libre} dV = \iiint_{(D')} \Phi \delta \rho_{libre} dV$$

De $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libre}$ et $\vec{\nabla} \cdot (\vec{D} + \delta \vec{D}) = \rho_{libre} + \delta \rho_{libre}$, on déduit que $\vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{D}) = \delta \rho_{libre}$. On a alors :

$$\delta W_e = \iiint_{(D')} \Phi \vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{D}) dV$$

En utilisant la relation bien connue (!) $\vec{\nabla} \cdot (\Phi \delta \vec{D}) = \Phi \vec{\nabla} \cdot \delta \vec{D} + \vec{\nabla} \Phi \cdot \delta \vec{D}$ et (A.22), on obtient :

$$\delta W_e = \oint_{(S)} \Phi \delta \vec{D} \cdot d\vec{S} + \iiint_{(D')} \vec{E} \cdot \delta \vec{D} dV \quad (\text{E.12})$$

A grande distance, Φ varie au moins comme $1/R$, $\delta \vec{D}$ au moins comme $1/R^2$, donc $\Phi \delta \vec{D} dS$ varie au moins comme $1/R$. En étendant le domaine d'intégration jusqu'à l'infini, (E.12) s'écrit finalement :

$$\delta W_e = \iiint_{Espace} \vec{E} \cdot \delta \vec{D} dV \quad (\text{E.13})$$

Remarque 1 : On trouve parfois dans la littérature la *densité volumique de travail* $\delta w_e = \vec{E} \cdot \delta \vec{D}$. En fait, il n'est pas évident (voire faux) que le travail fourni au volume dV soit $E \delta D$. Pour être complet, le bilan local doit prendre en compte les échanges d'énergie interne au système, dont nous ignorons l'expression généralement. Seule l'intégrale de (E.13) a une signification physique non ambiguë.

Remarque 2 : La relation (E.13) ne préjuge rien du lien existant entre \vec{D} et \vec{E} , ou entre \vec{E} et \vec{P} . Elle est également valable si \vec{P} n'est pas la polarisation d'équilibre.

Une deuxième expression du travail en fonction des champs

De $\delta\vec{D} = \epsilon_0 \delta\vec{E} + \delta\vec{P}$, on déduit que $\vec{E} \cdot \delta\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \delta\vec{E} + \vec{E} \cdot \delta\vec{P}$, d'où l'expression de δW_e :

$$\delta W_e = \iiint_{Espace} \left(\epsilon_0 \vec{E} \cdot \delta\vec{E} + \vec{E} \cdot \delta\vec{P} \right) dV \quad (\text{E.14})$$

Remarque : Il est tentant d'associer l'intégrale (sur tout l'espace) du premier terme à un travail fourni au champ macroscopique \vec{E} et celle du deuxième terme (sur le diélectrique) à un travail fourni au diélectrique. Ceci est faux dans le cas général car δW_e est fourni à l'ensemble (conducteur+diélectrique) et ces deux sous-systèmes sont couplés car l'énergie d'interaction (ou énergie de couplage) ne peut être négligée et est inconnue. Le champ et la matière sont couplés : E dépend de ρ_{libre} et de ρ_P , et P (ou ρ_P) dépend de E .

Une troisième expression du travail en fonction des champs

Une manière de faire non ambiguë est de soustraire à δW_e le travail qui serait fourni, en l'absence de milieu diélectrique, pour établir la même distribution de charges libres.

Pour cela, on note \vec{E}_0 le champ créé par la même distribution de charges libres (comme si elles étaient seules sans le diélectrique). On a $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ et $\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0$. De :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \frac{\vec{D} - \vec{D}_0}{\epsilon_0} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \delta\vec{D} = \epsilon_0 \delta\vec{E}_0 + \delta(\vec{D} - \vec{D}_0)$$

on déduit en développant qu'on peut écrire $\vec{E} \cdot \delta\vec{D}$ de (E.13) sous la forme (plus complexe) :

$$\vec{E} \cdot \delta\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_0 \cdot \delta\vec{E}_0 - \vec{P} \cdot \delta\vec{E}_0 + \vec{E} \cdot \delta(\vec{D} - \vec{D}_0) + (\vec{D} - \vec{D}_0) \cdot \delta\vec{E}_0 \quad (\text{E.15})$$

En utilisant la propriété générale sur les champs de vecteurs \vec{a} et \vec{b} qui décroissent au moins comme $1/r$ à l'infini :

$$\iiint_{Espace} \vec{a} \cdot \vec{b} dV = 0 \quad \text{si on a partout} \quad \vec{\nabla} \times \vec{a} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0 \quad (\text{E.16})$$

on voit que l'intégrale des deux derniers termes de (E.15) est nulle (puisque $\vec{\nabla} \times \vec{E} \equiv \vec{0}$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} \equiv 0$). Il reste simplement :

$$\delta W_e = \delta \left(\iiint_{Espace} \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} dV \right) - \iiint_{Diel.} \vec{P} \cdot \delta\vec{E}_0 dV \quad (\text{E.17})$$

où on a réduit au diélectrique le domaine d'intégration de la 2^e intégrale. Cette forme (E.17) du travail δW_e est la forme du travail la plus simple pour comparer la situation des conducteurs chargés avec et sans diélectrique.

Travail supplémentaire dû à la présence du diélectrique

Le premier terme de (E.17) représente le travail nécessaire pour modifier le champ de $\delta\vec{E}_0$ en l'absence de diélectrique. Le 2^e est donc forcément le terme supplémentaire $\delta W_e'$ lié à la présence du diélectrique. Il doit être fourni par le générateur pour obtenir les mêmes charges libre en présence du diélectrique fixe :

$$\delta W_e' = - \iiint_{Diel.} \vec{P} \cdot \delta\vec{E}_0 dV \quad (\text{E.18})$$

Cas particulier lié à la présence de charges libres sur les conducteurs

L'introduction d'un diélectrique modifie en général la répartition des charges libres sur les conducteurs, ainsi que les champs que ces chargent créent. On pourrait néanmoins montrer que (E.17) reste valable en prenant, au lieu du champ \vec{E}_0 le champ \vec{E}_a qui serait créé par les charges en l'absence de diélectrique :

$$\delta W_e = \delta \left(\iiint_{Espace} \frac{\epsilon_0 E_a^2}{2} dV \right) - \iiint_{Diel.} \vec{P} \cdot \delta\vec{E}_a dV \quad (\text{E.19})$$

Dans cette expression, δW_e et $\delta \vec{E}_a$ sont dus aux mêmes variations de charges libres.

Une modification des charges libres sur les conducteurs entraîne, en l'absence du diélectrique, un apport d'énergie donné par le 1^{er} terme de (E.19). Le travail supplémentaire, dû à la présence du diélectrique est alors :

$$\delta W_e' = - \iiint_{Diel.} \vec{P} \cdot \delta \vec{E}_a dV \quad (E.20)$$

Remarque : L'expression (E.20) est le pendant de (E.18) en présence de charges libres sur les conducteurs.

Travail de polarisation

On suppose désormais que la présence du diélectrique ne modifie pas la répartition des charges libres.

La distribution de charges libres et le diélectrique sont couplés. D'après (2.71), l'énergie d'interaction d'un dipôle \vec{p} dans un champ \vec{E} est $-\vec{p} \cdot \vec{E}$. On en déduit que l'énergie d'interaction U_I du diélectrique dans le champ \vec{E}_0 s'écrit :

$$U_I = - \iiint_{Diel.} \vec{P} \cdot \vec{E}_0 dV$$

dont la variation élémentaire s'écrit :

$$\delta U_I = - \iiint_{Diel.} \vec{P} \cdot \delta \vec{E}_0 dV - \iiint_{Diel.} \delta \vec{P} \cdot \vec{E}_0 dV$$

On peut définir un *travail de polarisation* $\delta W_e''$ correspondant à l'énergie fournie au diélectrique lors d'une modification $\delta \vec{P}$ de sa polarisation. On a :

$$\delta W_e'' = \delta W_e' - \delta U_I = \iiint_{Diel.} \vec{E}_0 \cdot \delta \vec{P} dV \quad (E.21)$$

Cette énergie fournie au diélectrique lors d'une modification $\delta \vec{P}$ de sa polarisation correspond aux mécanismes inter-atomiques qui déterminent l'évolution de la polarisation.

Remarque 1 : Si la distribution de charges libres sur les conducteurs est modifiée par la présence du diélectrique, il faut, en suivant ce qui a été dit ci-dessus pour établir (E.20), remplacer \vec{E}_0 par \vec{E}_a dans (E.21).

Remarque 2 : Dans le cas des faibles couplages, on peut remplacer \vec{E}_0 par \vec{E} dans les calculs de $\delta W_e'$ et $\delta W_e''$. Ces hypothèses, délicates à mettre en œuvre, ne sont en fait valables que dans l'approximation des très faibles polarisations, par exemple dans le cas des gaz dilués. On retombe dans ce cas sur les expressions données au § 5.5.

E.3.2 Cas d'un régime périodique

A cause de l'échelle de temps différente entre l'établissement d'un équilibre de charges libres et d'un équilibre de la polarisation, l'équilibre du système n'a pas été requis pour établir les expressions du § E.3.1 qui restent valables dans le cas de l'ARQS.

En supposant un régime périodique, au cours d'un cycle, les intégrales suivantes sont nulles :

$$(1) \quad \oint_{Cycle} \vec{E} \cdot d\vec{E} = 0 \quad (2) \quad \oint_{Cycle} \vec{E}_0 \cdot d\vec{E}_0 = 0 \quad (3) \quad \oint_{Cycle} d(\vec{P} \cdot \vec{E}_0) = 0$$

D'après (E.13), on a donc, au cours d'un cycle :

$$\oint \delta W_e = \iiint_{Espace} \left(\oint \vec{E} \cdot d\vec{D} \right) dV = \iiint_{Espace} \left(\oint \vec{E} \cdot d\vec{P} \right) dV$$

où la 2^e égalité vient de (1).

De même, d'après (E.17) :

$$\oint \delta W_e = - \iiint_{\text{Espace}} \left(\oint \vec{P} \cdot d\vec{E}_0 \right) dV = \iiint_{\text{Espace}} \left(\oint \vec{E}_0 \cdot d\vec{P} \right) dV = \oint \delta W_e'$$

où la 2^e égalité vient de (3) et la 3^e de (E.18). En utilisant (E.21) et (3), on a de plus $\oint \delta W_e = \oint \delta W_e''$. Finalement, on a montré qu'au cours d'un cycle, on a :

$$\oint \delta W_e = \oint \delta W_e' = \oint \delta W_e'' \quad (\text{E.22})$$

Cette énergie moyenne reçue au cours d'un cycle doit être évacuée, principalement sous forme de chaleur lors des phénomènes d'hystérésis.

E.3.3 Lien avec l'énergie électrostatique

Dans ce paragraphe, on va montrer que l'énergie électrostatique d'un diélectrique n'est pas une énergie interne comme on pourrait naïvement le penser, mais une énergie libre.

Fonctions énergétiques volumiques des diélectriques

Pour un système ouvert (formé du diélectrique et du champ) dont on néglige les variations de volume, on a :

$$dU = T dS + \iiint_D \vec{E} \cdot d\vec{D} dV + \mu dN \quad \text{et} \quad dF = -S dT + \iiint_D \vec{E} \cdot d\vec{D} dV + \mu dN$$

puisque $F = U - TS$. Le passage aux variables volumiques intensives (en posant $u = U/V$, $s = S/V$ et $\rho = N/V$) permet d'écrire :

$$du = T ds + \vec{E} \cdot d\vec{D} + \mu d\rho \quad \text{et} \quad df = -s dT + \vec{E} \cdot d\vec{D} + \mu d\rho$$

A l'aide d'une transformation de **Legendre**, on peut remplacer \vec{D} par \vec{E} . Il suffit de poser $\tilde{u} = u - \vec{E} \cdot \vec{D}$ et $\tilde{f} = f - \vec{E} \cdot \vec{D} = \tilde{u} - T s$. On déduit immédiatement que :

$$d\tilde{u} = T ds - \vec{D} \cdot d\vec{E} + \mu d\rho \quad \text{et} \quad d\tilde{f} = -s dT - \vec{D} \cdot d\vec{E} + \mu d\rho$$

L'avantage de cette dernière expression est qu'elle permet de travailler à T constant, plutôt qu'à s constant. En supposant un milieu lhi pour lequel $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, les fonctions d'état du diélectrique se mettent finalement sous la forme :

$$\tilde{u}(s, \rho, \vec{E}) = u_0(s, \rho) - \frac{\epsilon E^2}{2} \quad \text{et} \quad \tilde{f}(T, \rho, \vec{E}) = f_0(T, \rho) - \frac{\epsilon E^2}{2} \quad (\text{E.23})$$

Energie électrostatique

Pour un système dépourvu de sources d'irréversibilité, à l'équilibre, l'état du système est déterminé lorsque toutes les contraintes sont connues.

On considère un système fermé constitué de conducteurs rigides et d'un diélectrique lhi de volume V soumis à une pression uniforme p . Pour une transformation réversible à T et V constants, la variation de l'énergie libre du système va s'écrire :

$$dF = \iiint_{\text{Espace}} \vec{E} \cdot d\vec{D} dV = \delta W_e$$

puisque $dF = -S dT - p dV + \delta W_e$, où δW_e est d'après (E.13) le travail reçu par le système.

En intégrant entre $D = 0$ et la valeur finale, on obtient l'énergie nécessaire pour augmenter le champ jusqu'à sa valeur finale :

$$F_e = F(T, V, \Phi) - F(T, V, 0) = \iiint_{Espace} \left(\int_{D=0}^{D=D_{Final}} \vec{E} \cdot d\vec{D} \right) dV \quad (\text{E.24})$$

puisque les termes constants s'annulent à cause de (E.23). C'est par définition l'énergie électrostatique du système. On vient donc de montrer que l'énergie électrostatique est une énergie libre, au sens de la thermodynamique.

E.4 Complément sur l'énergie associée aux milieux magnétiques

L'étude énergétique des milieux magnétiques a été abordée au chapitre 7 dans la situation particulière du champ uniforme. On montrera dans ce paragraphe⁵ comment élargir ce qui a été vu, et en particulier comment on peut obtenir dans le bilan énergétique la contribution interne au système des mécanismes d'aimantation. Cette étude peut être faite de manière assez semblable à celle des milieux diélectriques du § E.3. On se contentera ici d'en donner les principaux résultats, sans tous les démontrer.

Il y a néanmoins des différences, en particulier à cause du rôle différents des champs \vec{B} et \vec{H} par rapport à celui joué par les champs \vec{E} et \vec{D} . Une 2^e cause de différence vient du fait qu'il faut fournir de l'énergie pour maintenir un courant constant dans un circuit, alors que maintenir des charges constantes sur un conducteur ne nécessite aucune énergie de la part du générateur.

E.4.1 Travail d'aimantation en régime statique

Le système est constitué de matériaux magnétiques et on suppose que les seuls courants libres viennent des générateurs (les matériaux sont isolants). Le système est l'espace où le champ \vec{B} est non nul, mais les générateurs sont pris à l'extérieur du système (cf Figure E.5).

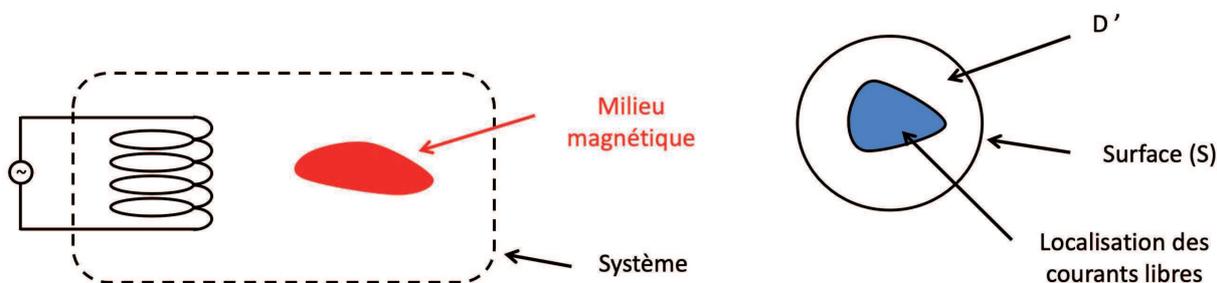


FIGURE E.5 – Le système utilisé comprend le milieu magnétique, les conducteurs, et tout l'espace où le champ \vec{B} est non nul (voir texte).

FIGURE E.6 – Le volume (D') est une sphère qui englobe toutes les courants libres.

Ce système peut recevoir de l'énergie, sous forme de chaleur ou de travail. On supposera que le seul travail reçu le sera sous forme électrique, de la part du générateur (en particulier, cela signifie que le circuit ne se déplace pas et ne se déforme pas). Une partie de cette énergie sera dissipée par effet **Joule** et peut être évacuée du problème si le système est maintenu à température constante puisque la dissipation par effet **Joule** est indépendante de l'état magnétique du matériau.

On devra considérer le travail que le générateur doit fournir pour lutter contre le fem d'induction $e = -d\Phi/dt$ (où Φ est le flux total de \vec{B} à travers le circuit). Le travail reçu δW_m reçu par le circuit pendant l'intervalle dt est :

$$\delta W_m = -e I dt = I \delta \Phi$$

5. Comme pour le § E.3, ce paragraphe doit beaucoup à la référence [6].

Pour un circuit et un milieu magnétique fixes et rigides, comme on l'a vu au chapitre 4, δW_m est l'opposé du travail de la force électromagnétique due au champ induit $\vec{E}_i = -\partial\vec{A}/\partial t$ sur les porteurs de charge libres :

$$\delta W_m = \iiint_{Espace} \vec{J}_{libre} \cdot \delta\vec{A} dV$$

On n'a supposé jusqu'à présent aucun lien entre l'intensité I et le flux Φ . Ces expressions restent valables en présence d'hystérésis et hors d'équilibre. On les traitera dans l'ARQS.

Une première expression du travail en fonction des champs

En utilisant (A.9) et (MA) dans l'ARQS, on obtient :

$$\vec{J}_{libre} \cdot \delta\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot \delta\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{H} \times \delta\vec{A}) + \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \times (\delta\vec{A})$$

Comme $\vec{\nabla} \times (\delta\vec{A}) = \delta\vec{B}$, on obtient finalement :

$$\iiint_{(V)} \vec{J}_{libre} \cdot \delta\vec{A} dV = \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot (\vec{H} \times \delta\vec{A}) dV + \iiint_{(V)} \vec{H} \cdot \delta\vec{B} dV = \oint_{(S)} \vec{H} \times \delta\vec{A} \cdot d\vec{S} + \iiint_{(V)} \vec{H} \cdot \delta\vec{B} dV$$

En supposant les courants répartis dans une zone finie de l'espace contenue dans une sphère de rayon R (cf Figure E.6), ce qu'on fait toujours dans l'ARQS, la première intégrale s'annule à grande distance puisque H et δA décroissent respectivement en $1/R^3$ et $1/R^2$. Il reste finalement :

$$\delta W_m = \iiint_{Espace} \vec{H} \cdot \delta\vec{B} dV \quad (E.25)$$

qui représente l'expression du travail des générateurs dans le cas de circuits et de milieux magnétiques fixes et rigides.

Remarque 1 : Cette expression ne préjuge rien du lien entre \vec{B} et \vec{H} . Elle est donc également valable pour une aimantation \vec{M} hors d'équilibre.

Remarque 2 : On trouve parfois dans la littérature l'expression d'une *densité volumique de travail* $\delta w_m = \vec{H} \cdot \delta\vec{B}$. Attention à bien noter qu'il ne s'agit que d'une étape dans les calculs et qu'elle n'a aucun sens physique. Seule l'intégrale donnant δW_m en a un.

Une deuxième expression du travail en fonction des champs

En partant de $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$, on montre immédiatement que $\vec{H} \cdot \delta\vec{B} = \vec{B} \cdot \delta\vec{B}/\mu_0 - \vec{M} \cdot \delta\vec{B}$ dont on déduit :

$$\delta W_m = \iiint_{Espace} \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \delta\vec{B} dV - \iiint_{Espace} \vec{M} \cdot \delta\vec{B} dV \quad (E.26)$$

Remarque : Comme pour les milieux diélectriques, il est tentant d'associer l'intégrale (sur tout l'espace) du premier terme à un travail fourni au champ macroscopique \vec{B} et celle du deuxième terme (sur le milieu magnétique) à un travail fourni au milieu. Ceci est faux dans le cas général car δW_m est fourni à l'ensemble (conducteur+milieu) et ces deux sous-systèmes sont couplés

Une troisième expression du travail en fonction des champs

Une manière de faire non ambiguë est de soustraire à δW_m le travail qui serait fourni, en l'absence de milieu magnétique, pour établir le même courant.

Pour cela, on introduit le champ \vec{B}_0 créé par les courants libres du système. Le champ $\vec{B}_m = \vec{B} - \vec{B}_0$ est le champ créé par l'aimantation. En posant $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0$, on peut écrire :

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + (\vec{H} - \vec{H}_0) \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + (\vec{B} - \mu_0 \vec{M} - \vec{B}_0) + \mu_0 \vec{M} = \vec{B}_0 + \mu_0 (\vec{H} - \vec{H}_0) + \mu_0 \vec{M}$$

On montre alors qu'on peut écrire $\vec{H} \cdot \delta \vec{B}$ de (E.25) sous la forme (plus complexe) :

$$\vec{H} \cdot \delta \vec{B} = (\vec{H} - \vec{H}_0) \cdot \delta \vec{B} + \vec{H}_0 \cdot \delta \vec{B}_0 + \vec{B}_0 \cdot \delta (\vec{H} - \vec{H}_0) + \vec{B}_0 \cdot \delta \vec{M} \quad (\text{E.27})$$

Avec le même raisonnement que celui du § E.3, on montre finalement qu'on obtient l'expression :

$$\delta W_m = \delta \left(\iiint_{\text{Espace}} \frac{B_0^2}{2\mu_0} dV \right) + \iiint_{\text{Magn.}} \vec{B}_0 \cdot \delta \vec{M} dV \quad (\text{E.28})$$

où on a réduit au milieu magnétique le domaine d'intégration de la 2^e intégrale. Cette forme (E.28) du travail δW_m est la forme du travail la plus simple pour comparer la situation des courants avec et sans milieu magnétique.

Travail d'aimantation dû à la présence du milieu magnétique

Le premier terme de (E.28) représente le travail nécessaire pour modifier le champ \vec{B}_0 en l'absence de milieu magnétique. Le 2^e est donc le travail nécessaire qu'il faut fournir pour modifier l'aimantation :

$$\delta W_m' = \iiint_{\text{Magn.}} \vec{B}_0 \cdot \delta \vec{M} dV$$

En notant Φ_m le flux de \vec{B}_m à travers le circuit, l'énergie magnétique de couplage s'écrira :

$$U_{mut} = \frac{1}{\mu_0} \iiint_{\text{Espace}} \vec{B}_0 \cdot \vec{B}_m dV = \iiint_{\text{Magn.}} \vec{B}_0 \cdot \vec{M} dV$$

soit encore :

$$\delta U_{mut} = \iiint_{\text{Magn.}} \vec{B}_0 \cdot \delta \vec{M} dV + \iiint_{\text{Magn.}} \vec{M} \cdot \delta \vec{B}_0 dV$$

On peut définir un travail d'aimantation $\delta W_m''$ correspondant à l'énergie fournie au milieu magnétique lors d'une modification $\delta \vec{M}$ de son aimantation. On a :

$$\delta W_m'' = \delta W_m' - \delta U_{mut} = \iiint_{\text{Magn.}} \vec{M} \cdot \delta \vec{B}_0 dV$$

Cette énergie fournie au milieu magnétique lors d'une modification $\delta \vec{M}$ de son aimantation correspond aux mécanismes internes qui déterminent l'évolution de l'aimantation.

E.4.2 Cas d'un régime périodique

Comme au § E.3, les expressions ci-dessus permettent d'obtenir qu'au cours d'un cycle dans le cas d'un régime périodique :

$$\oint \delta W_m = \oint \delta W_m' = \oint \delta W_m'' \quad (\text{E.29})$$

Cette énergie moyenne reçue au cours d'un cycle doit être évacuée, principalement sous forme de chaleur lors des phénomènes d'hystérésis.

E.5 Complément d'électrodynamique dans les milieux

On montre dans ce paragraphe quelques résultats qui utilisent le formalisme en ρ_{tot} et \vec{J}_{tot} des milieux matériels pour généraliser l'électrodynamique dans le vide. Ceci vient en complément de ce qui a été vu au chapitre 8.

E.5.1 Condition de Lorenz

Pour des phénomènes variant lentement, au voisinage d'un milieu qui contiendrait à la fois des charges libres ρ_{libre} et des courants libres \vec{J}_{libre} , une polarisation \vec{P} et une aimantation \vec{M} , le potentiel scalaire Φ et le potentiel vecteur \vec{A} en un point Q vérifient :

$$\Phi(Q) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V')} \frac{\rho_{tot}(Q')}{r} dV' \quad \text{et} \quad \vec{A}(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V')} \frac{\vec{J}_{tot}(Q')}{r} dV' \quad (\text{E.30})$$

où $\rho_{tot} = \rho_{libre} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ et $\vec{J}_{tot} = \vec{J}_{libre} + \partial P / \partial t + \vec{\nabla} \times \vec{M}$, et Q' est le point courant sur le volume (V') qui englobe toutes les charges et tous les courants. On note (x, y, z) les coordonnées de Q et (x', y', z') celles de Q' . La distance r vaut $r = \|\vec{Q}Q'\|$.

Les densités ρ_{tot} et \vec{J}_{tot} sont reliées par l'équation de conservation de la charge totale :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{tot} = -\frac{\partial \rho_{tot}}{\partial t} \quad (\text{E.31})$$

En comparant (E.30) et (E.31), on imagine facilement qu'il doit exister une relation entre Φ et \vec{A} , que nous allons obtenir dans ce paragraphe.

En prenant la divergence de \vec{A} , on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \left(\iiint_{(V')} \frac{\vec{J}_{tot}}{r} dV' \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V')} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{J}_{tot}}{r} \right) dV' \quad (\text{E.32})$$

où on a inversé l'intégrale et la divergence car l'intégrale opère sur (x', y', z') et la divergence sur (x, y, z) . De manière générale, on a d'après (A.8) :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{J}_{tot}}{r} \right) = \frac{1}{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{tot} + \vec{J}_{tot} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (\text{E.33})$$

Le 1^{er} terme est nul car $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{tot} \equiv 0$ puisque \vec{J}_{tot} dépend de (x', y', z') tandis que la divergence opère sur (x, y, z) . D'après (A.19), le 2^e terme s'écrit $\vec{\nabla} (1/r) = -\vec{\nabla}' (1/r)$. Donc finalement :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{J}_{tot}}{r} \right) = -\vec{J}_{tot} \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{r} \right) \quad (\text{E.34})$$

De la même façon qu'on a écrit (E.33), on peut écrire :

$$\vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}_{tot}}{r} \right) = \frac{1}{r} \vec{\nabla}' \cdot \vec{J}_{tot} + \vec{J}_{tot} \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{r} \right) \quad (\text{E.35})$$

En additionnant (E.34) et (E.35), on peut finalement écrire que :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{J}_{tot}}{r} \right) = \frac{1}{r} \vec{\nabla}' \cdot \vec{J}_{tot} - \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}_{tot}}{r} \right) \quad (\text{E.36})$$

L'expression de $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ donnée par (E.32) peut donc s'écrire :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V')} \frac{1}{r} \vec{\nabla}' \cdot \vec{J}_{tot} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V')} \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}_{tot}}{r} \right) dV' \quad (\text{E.37})$$

La 2^e intégrale est nulle puisqu'à l'aide du théorème de la divergence (A.22), elle est égale au flux de \vec{J}_{tot}/r sur la surface englobant V' , qui par définition, englobe tous les courants. Donc $\vec{J}_{tot} \equiv \vec{0}$ sur cette surface et donc l'intégrale est nulle. Il reste uniquement :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V')} \frac{1}{r} \vec{\nabla}' \cdot \vec{J}_{tot} dV'$$

Ici, il faut remarquer que $\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}_{tot}$ correspond exactement à $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{tot}$ donné par l'équation de conservation de la charge totale (E.31) : cette équation est locale et concerne des quantités évaluées au même point, au sein de (V') . En utilisant (E.31), on écrit donc que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V')} \frac{1}{r} \frac{\partial \rho_{tot}}{\partial t} dV'$$

Dans cette équation, on peut inverser les signes d'intégration et de dérivation par rapport au temps car la distance r entre les points Q et Q' ne dépend pas du temps :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_{(V')} \frac{\rho_{tot}}{r} dV' \right) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

d'après (E.30). Ceci s'écrit encore :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (\text{E.38})$$

qui n'est autre que la condition de **Lorenz** (1.18). On pourrait être tenté de considérer cette démonstration comme très générale. Attention à se souvenir que (E.30) n'était valable que pour des phénomènes lentement variables.

E.5.2 Equations d'onde inhomogènes

La présence de milieux ne modifie pas les définitions des potentiels scalaire et vecteur qui découlent directement des équations de **Maxwell** (MF) et (MΦ) :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\text{E.39})$$

Equation d'onde pour Φ

Si $\rho_{tot} = \rho_{libre} + \rho_P$ est la densité volumique de charges totale, on a toujours d'après (MG) :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla}^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) &= -\frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0} \\ \Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

où la dernière relation vient de $\vec{\nabla}^2 \equiv \Delta$ et de la condition de **Lorenz** (E.38). On retombe sur :

$$\square \Phi = -\frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0} \quad (\text{E.40})$$

Cette relation n'est autre que l'équation (1.19) qui reste donc valable également dans le cas des milieux possédant une polarisation et/ou une aimantation. Pour les phénomènes statiques, on retombe sur l'équation de **Poisson** :

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0} \quad (\text{E.41})$$

Equation d'onde pour \vec{A}

De la même manière, en notant $\vec{J}_{tot} = \vec{J}_{libre} + \partial\vec{P}/\partial t + \vec{\nabla} \times \vec{M}$, on peut écrire successivement d'après (MA) :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J}_{tot} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= \mu_0 \vec{J}_{tot} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \\ \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} &= \mu_0 \vec{J}_{tot} - \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \\ \vec{\nabla} \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \Delta \vec{A} &= \mu_0 \vec{J}_{tot} - \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

où la dernière relation vient de la condition de **Lorenz** (E.38). En simplifiant, on obtient :

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}_{tot} \quad \text{soit} \quad \square \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}_{tot} \quad (\text{E.42})$$

Cette relation n'est autre que l'équation (1.19) qui reste donc valable également dans le cas des milieux possédant une polarisation et/ou une aimantation. Pour les phénomènes statiques, on retombe sur l'équation de **Poisson** :

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}_{tot} \quad (\text{E.43})$$

E.5.3 Potentiels retardés pour des distributions volumiques

Dans le cas statique, la solution des équations de **Poisson** (E.41) et (E.43) est simplement :

$$\Phi(Q) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V')} \frac{\rho_{tot}(Q')}{r} dV' \quad \text{et} \quad \vec{A}(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V')} \frac{\vec{J}_{tot}(Q')}{r} dV'$$

Dans le cas de phénomènes dépendant du temps, on a vu au § 1.3.3 que la quantité à utiliser est la valeur des distributions à l'instant retardé $t_r = t - r/c$. La forme⁶ des *potentiels retardés* est alors⁷ :

$$\Phi(Q, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V')} \frac{\rho_{tot}(Q', t_r)}{r} dV' \quad \text{et} \quad \vec{A}(Q, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V')} \frac{\vec{J}_{tot}(Q', t_r)}{r} dV' \quad (\text{E.44})$$

Dans le cas de milieux lhi, pour lesquels on peut écrire $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ et $\vec{B} = \mu \vec{H}$, on aura simplement :

$$\Phi(Q, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{(V')} \frac{\rho_{libre}(Q', t_v)}{r} dV' \quad \text{et} \quad \vec{A}(Q, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{(V')} \frac{\vec{J}_{libre}(Q', t_v)}{r} dV' \quad (\text{E.45})$$

où $t_v = t - r/v$ est le temps retardé correspondant à la vitesse de propagation $v = (\epsilon\mu)^{-1/2}$ dans le milieu.

6. La vitesse à utiliser ici est la vitesse de la lumière dans le vide, et pas la vitesse de la lumière dans le milieu. En effet, un rayonnement électromagnétique est émis dès qu'une particule chargée accélère. En traversant un milieu, les molécules de celui-ci se polarisent et rayonnent dans toutes les directions. La somme de ces ondes diffusées est une onde qui se propage à une vitesse c/n . En utilisant les densités totales dans (E.44), on considère que le milieu agit comme une source dans le vide. Le temps retardé implique alors la vitesse c .

7. Attention à bien noter que ce raisonnement n'est valable que pour les potentiels et serait absolument faux pour les champs puisque :

$$\vec{E}(Q, t) \neq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V')} \frac{\rho_{tot}(Q', t_r)}{r^2} \vec{u}_r dV' \quad \text{et} \quad \vec{B}(Q, t) \neq \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V')} \frac{\vec{J}_{tot}(Q', t_r) \times \vec{u}_r}{r^2} dV'$$