

---

# Electrodynamique classique du vide et des milieux continus

Cet enseignement d'*électrodynamique classique du vide et des milieux continus* est particulier puisque vous n'allez rien **apprendre**. En effet, il s'agit de développements, dans le cadre d'une théorie classique, autour des cinq équations qui constituent la base de l'électromagnétisme et que tout étudiant connaît après deux années d'études supérieures : les quatre équations de **Maxwell** et la force de **Lorentz**. Par contre, vous devriez **comprendre** un grand nombre de notions dont la pertinence vous a échappé lors de vos études antérieures.

Ce cours est divisé en 11 chapitres répartis en trois grandes parties. La première traitera de l'électromagnétisme dans le vide et abordera quatre chapitres distincts :

1. **Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme**
2. **Electrostatique**
3. **Magnétostatique**
4. **Induction électromagnétique**

La seconde abordera une modélisation de la matière qui peut être faite en utilisant l'électromagnétisme :

5. **Milieux diélectriques**
6. **Milieux conducteurs**
7. **Milieux magnétiques**
8. **Electrodynamique dans les milieux et considérations énergétiques**

Enfin, la dernière partie traitera des ondes électromagnétiques, de leur génération jusqu'à leur propagation :

9. **Systèmes rayonnants**
10. **Propagation libre des ondes électromagnétiques**
11. **Propagation guidée des ondes électromagnétiques**

Ces notes complètent ce qui est dit en cours mais ne sauraient dispenser d'une assiduité régulière.

Dans le texte, les noms propres en gras correspondent à des scientifiques dont les principales contributions à l'électromagnétisme sont détaillées à partir de la page 2 du préambule, même si c'était par le biais des mathématiques ou de la chimie !

Ce polycopié doit beaucoup à ceux réalisés par les enseignants qui m'ont précédé (E. Augé, H. Doubre et J. Perez-Y-Jorba). Qu'ils en soient remerciés.

Patrick Puzo

---

# Le *who's who* de l'électromagnétisme

- Jean **Le Rond d'Alembert** (1717-1783), mathématicien et physicien français. Il établit en 1746 l'équation qui porte son nom à partir de l'étude des vibrations d'une corde de piano.
- André Marie **Ampère** (1775-1836), mathématicien et physicien français. Surnommé par **Maxwell** *le Newton de l'électricité*, il donne les premières formulations mathématiques de l'électromagnétisme et énonce le théorème qui porte son nom en 1820. On lui doit également les termes de *courant* et *tension* et l'invention du *galvanomètre* et du *solénoïde*. Il suppose également que les propriétés des aimants sont dues à des courants microscopiques dans la matière (*hypothèse d'Ampère*).
- François **Arago** (1786-1853), astronome et physicien français. Il met en évidence l'aimantation induite dans le fer par le champ créé par un courant.
- Jacques **Babinet** (1794-1872), astronome et physicien français. Il énonce le *théorème de Babinet* qui est utilisé pour l'étude du rayonnement de certaines antennes.
- Peter **Barlow** (1776-1862), mathématicien et physicien anglais. Il publie en 1820 son *Essai sur le magnétisme* et invente en 1822 un appareil de démonstration, la *roue de Barlow* dont on peut considérer qu'elle est le 1<sup>er</sup> convertisseur électromécanique, fonctionnant à la fois comme un moteur et comme un générateur.
- Adolfo **Bartoli** (1851-1896), physicien italien. En 1876, il montre que la pression de radiation, énoncée par **Maxwell** comme une conséquence de l'électromagnétisme, peut également être expliquée par la thermodynamique.
- Abraham **Benett** (1749-1799), abbé et physicien anglais. Il invente le premier électroscope à feuille d'or en 1789.
- Jean-Baptiste **Biot** (1774-1862), astronome et physicien français. Il travaille en 1820 avec **Savart** sur la loi donnant la forme du champ magnétique créé par un fil parcouru par un courant mais la loi qui porte leurs noms est en fait établie par **Laplace**.
- Félix **Bloch** (1905-1983), physicien américain d'origine suisse, prix Nobel de physique en 1952. Il travaille sur le magnétisme et introduit en 1946 les *équations de Bloch*. Il développe l'imagerie par résonance magnétique (IRM) et la résonance paramagnétique électronique (RPE).
- Paul **Boucherot** (1869-1943), ingénieur français. Il démontre le premier l'intérêt des courants polyphasés en 1894.
- Karl Ferdinand **Braun** (1850-1918), physicien allemand. Prix Nobel de Physique en 1909. Il développe le premier oscilloscope en 1897. Il fonde *Telefunken AG* et propage des ondes électromagnétiques sur 62 km en 1899.
- John **Canton** (1718-1772), physicien britannique. Il montre en 1753 qu'un objet métallique isolé peut se charger électriquement sans entrer en contact avec un corps chargé. On parle aujourd'hui de *charge par influence*.

- 
- Laurent **Cassegrain** (vers 1629-1693), prêtre et physicien français. Il est à l'origine du télescope qui porte son nom, basé sur un primaire parabolique et un secondaire convexe hyperbolique. Ce système a été repris pour améliorer les performances des antennes paraboliques.
  - Henry **Cavendish** (1731-1810), physicien et chimiste britannique. Il détermine la densité moyenne du globe à l'aide de sa balance de torsion, qui sert en outre à mesurer la force entre deux charges ponctuelles, ce qu'il montre en 1770. Il en déduit que le champ électrostatique est nul à l'intérieur d'une sphère creuse chargée. Il introduit le *potentiel électrostatique* et la *capacité* d'un condensateur.
  - Pavel **Cherenkov** (1904-1990), physicien russe, prix Nobel de physique en 1958. Il découvre l'effet qui porte son nom en 1934 en observant la teinte bleutée d'une bouteille d'eau soumise à des irradiations.
  - Rudolf **Clausius** (1822-1888), physicien allemand. Il démontre en 1879 la relation de **Clausius-Mossotti** entre la polarisabilité microscopique d'un milieu et sa permittivité macroscopique.
  - Aimé **Cotton** (1869-1951), physicien français. Il invente en 1900 la *balance de Cotton*, qui sert à mesurer avec précision l'intensité du champ magnétique. Cet appareil n'est détrôné qu'avec l'apparition des semi-conducteurs qui permettent des mesures à l'aide de sondes à effet **Hall** très performantes.
  - Charles Augustin de **Coulomb** (1736-1806), physicien français. Il étudie les aiguilles aimantées et introduit en 1777 la notion de *moment magnétique*. En 1785, sans avoir connaissance des travaux antérieurs de **Cavendish**, il montre expérimentalement à l'aide d'une balance de torsion très sensible que la force entre deux charges électriques est en  $1/r^2$  et que les charges d'un conducteur en équilibre se répartissent sur sa surface.
  - Pierre **Curie** (1859-1906), physicien français, prix Nobel de physique en 1903. Il découvre la piézoélectricité avec son frère Jacques en 1880. Ses études sur la symétrie des cristaux lui ont permis d'énoncer le *principe de Curie* en 1894.
  - William **Crookes** (1832-1919), chimiste et physicien britannique. Il conçoit en 1875 le *radiomètre de Crookes*. En 1878, il découvre les *rayons cathodiques* en travaillant sur la conduction de l'électricité dans des gaz à faible pression.
  - Peter **Debye** (1884-1966), physicien et chimiste néerlandais, prix Nobel de chimie en 1936. Il montre en 1920 que l'interaction dipolaire entre molécules génère une force de type **van der Waals**.
  - Arthur Jeffrey **Dempster** (1886-1950), physicien américain. Il développe en 1918 le premier spectromètre de masse.
  - Paul **Dirac** (1902-1984), physicien britannique, prix Nobel de physique en 1933. Il prédit en 1931 l'existence de monopoles magnétiques isolés, jamais observés jusqu'à aujourd'hui.
  - Prokop **Divis** (1698-1765), abbé et physicien tchèque. Indépendamment de **Franklin**, il construit en 1754 le premier paratonnerre relié à la terre.
  - Peter-Gustav **Dirichlet** ou **Lejeune-Dirichlet** (1805-1859), mathématicien allemand. Son nom est associé au théorème d'unicité lié à la résolution de l'équation de **Laplace**.
  - Paul **Drude** (1863-1906), physicien allemand. Il introduit la notation  $c$  pour la célérité de la lumière dans le vide en 1894 et propose en 1900 le modèle de la conductivité électrique dans les métaux en appliquant la théorie cinétique des gaz aux électrons des métaux.
  - Charles François de Cisternay **du Fay** (ou **Dufay**) (1698-1739), chimiste français, premier intendant du Jardin du Roi. Il énonce en 1733 l'hypothèse *des deux fluides électriques* (*électricité résineuse* et *électricité vitreuse*) basée sur la découverte que des objets frottés contre de l'ambre ou contre une baguette de verre se repoussent, mais que les objets frottés avec de l'ambre attirent ceux frottés avec

---

du verre. Il montra également que l'électrisation de l'extrémité d'une corde mouillée de 350 m se transmet presque instantanément à l'autre l'extrémité.

- Samuel **Earnshaw** (1805-1888), prêtre, mathématicien et physicien anglais. Il montre en 1842 le théorème d'électrostatique qui porte son nom.
- Thomas **Edison** (1847-1931), physicien et inventeur américain. Fondateur de *General Electric*, il dépose plus de 1000 brevets dans le domaine de l'électricité. Ardent défenseur de l'utilisation du courant continu, il s'oppose à son ex-employé **Tesla** et à son concurrent **Westinghouse** qui défendent l'utilisation du courant alternatif. La guerre entre les deux physiciens est si violente qu'Edison va jusqu'à électrocuter un éléphant avec un courant alternatif pour montrer la dangerosité de ce dernier (il introduit alors le terme *westinghoused*). C'est sur sa demande que la chaise électrique est mise au point (afin encore de chercher à discréditer le courant alternatif par rapport au continu), alors que les États-Unis cherchent une alternative à la pendaison.
- Albert **Einstein** (1878-1955), physicien américain d'origine allemande, prix Nobel de physique en 1921. Il donne la théorie complète de l'induction électromagnétique dans son article fondateur de la relativité restreinte en 1905.
- Walter **Elsasser** (1904-1991), physicien américain d'origine allemande. Il montre en 1946 que l'*effet dynamo* peut expliquer le magnétisme terrestre et réfute le modèle de **Gauss** d'un moment magnétique ferromagnétique à une température supérieure à la température de **Curie**...
- Michael **Faraday** (1791-1867), physicien et chimiste anglais. Il invente le *disque de Faraday* en 1821. Expérimentateur de génie (il a été surnommé *le prince des expérimentateurs*), il découvre le phénomène d'induction en 1831 et énonce la loi correspondante en 1854. Il introduit les termes de *champ* et de *ligne de champ* et effectue les premières études sur les propriétés des diélectriques. Il énonce également la conservation de la charge électrique.
- George **FitzGerald** (avec un "G" majuscule) (1851-1901), physicien irlandais. Il suggère en 1883 un appareil pour produire des courants électriques à oscillations rapides, lesquels créent des ondes électromagnétiques. Cet appareil sera utilisé par **Hertz** en 1888 pour prouver l'existence des ondes électromagnétiques.
- Hippolyte **Fizeau** (1819-1896), physicien français. Il effectue la première mesure précise de la vitesse de la lumière en 1851.
- Harvey **Fletcher** (1884-1981), physicien américain. Durant sa thèse, il réalise en 1909 avec son directeur de thèse **Millikan** l'expérience qui prouve que la charge électrique est quantifiée et pour laquelle **Millikan** obtiendra le prix Nobel en 1923.
- Léon **Foucault** (1819-1868), physicien français. Il découvre les courants induits dans la matière qui portent désormais son nom.
- Benjamin **Franklin** (1706-1790), homme politique et physicien américain. Il postule l'existence de deux sortes d'électricité (*positive* et *negative*) en 1747 et énonce une première forme qualitative du principe de conservation de la charge. Il postule la nature électrique des éclairs en 1750. On associe également son nom à l'invention du paratonnerre en 1760, bien que **de Romas** l'ait réalisé avant lui.
- Luigi **Galvani** (1737-1798), physicien italien. A la suite de travaux sur la contraction des muscles des grenouilles, il formule en 1791 l'hypothèse d'une *électricité animale*, qui serait sécrétée par le cerveau et se déchargerait lorsque qu'un nerf et un muscle seraient reliés par des métaux. La controverse avec **Volta** (promoteur de l'*électricité métallique*) sera close par l'invention de la pile électrique par ce dernier.
- Jean-Mothée **Gaugain** (1810-1880), physicien français. Selon certains, il serait en fait l'inventeur de



---

la configuration de bobines passées sous la postérité sous le nom de *bobines de Helmholtz*,

- Lucien **Gaulard** (1850-1888), ingénieur français. Ses travaux permettent la distribution à distance du courant électrique (transport à haute tension et abaissement de la tension sur le site d'utilisation) par l'invention du transformateur. En 1884, il achemine du courant sur 80 km.
- Carl Friedrich **Gauss** ou **Gauß** (1777-1855), mathématicien (surnommé *le prince des mathématiciens*) et physicien allemand. Il effectue en 1832 les premières mesures du champ magnétique terrestre et montre qu'il a la structure du champ d'un dipôle magnétique. En électrostatique, il donne sa forme définitive au *théorème de Gauss* en 1839.
- Andre **Geim** (né en 1958), physicien néerlandais d'origine russe, prix Nobel de physique en 2010 pour ses travaux sur le graphène. Il est également récipiendaire en 2000 du Ig Nobel pour avoir réussi à faire léviter une grenouille dans un champ magnétique intense.
- William **Gilbert** ou **Gilberd** (1544-1603), prêtre, médecin et physicien anglais, médecin et confesseur d'Elisabeth 1<sup>re</sup> puis de Jacques 1<sup>er</sup>. Il étudie qualitativement le magnétisme terrestre et introduit la notion de *pôle* d'un aimant et définit les pôles *Nord* et *Sud*. Il énonce en 1600 dans son livre *De Magnete, Magneticisque Corporibus, et de Magno Magnete Tellure* (Du magnétisme et des corps magnétiques, et du Grand Aimant Terre) qu'il n'existe pas de charge magnétique. Il montre que le magnétisme de la boussole est dû à la Terre, et non à la voûte céleste comme le pensait **Pierre de Maricourt**. En comparant les propriétés de l'ambre frotté et d'un aimant, il introduit les concepts de *conducteur* et d'*isolant* en électrostatique.
- Hermann Günther **Grassmann** (1809-1877), linguiste et mathématicien prussien. Il invente vers 1840 les bases des structures vectorielles et introduit les sommes et produits vectoriels.
- Stephen **Gray** (1670-1736), teinturier anglais, physicien autodidacte. Il découvre en 1729 que les phénomènes d'électrisation peuvent être transmis à grande distance par des fils métalliques. Il découvre et étudie également les conducteurs et les isolants électriques.
- George **Green** (1793-1841), mathématicien et physicien anglais. Il énonce une première forme du *théorème de Gauss* en 1828 et introduit la notion de *potentiel*.
- Otto von **Guericke** (1602-1686), physicien allemand. Il invente en 1672 les premières machines de production continue d'électricité statique.
- Edwin Herbert **Hall** (1855-1938), physicien américain. Il découvre en 1879 (sans doute avec l'aide de **Rowland** dont il fut l'élève) l'effet qui porte son nom.
- Wander de **Haas** (1878-1960), physicien néerlandais. Il observe en 1912 la mise en rotation d'un cylindre ferromagnétique suspendu au centre d'un solénoïde (*effet Einstein - de Haas*) qui montre que le magnétisme est engendré par les rotations microscopiques des électrons atomiques.
- René Just **Haüy** (1743-1822), abbé et minéralogiste français. Il imagine, sans toutefois le réaliser, le principe de l'électroscope. Ses travaux sur le spath d'Islande en 1817 amènent les premières découvertes de ce qui sera appelé plus tard *piézoélectricité*, *pyroélectricité* et *triboélectricité*.
- Oliver **Heaviside** (1850-1925), physicien britannique autodidacte. Il développe en 1880 l'*équation des télégraphistes* et surtout simplifie les équations de **Maxwell** sous la forme des quatre équations vectorielles utilisées de nos jours, en partant du système originel de **Maxwell** à huit équations.
- Werner **Heisenberg** (1901-1976), physicien allemand, prix Nobel de physique en 1932 pour sa théorie de la mécanique quantique. Il propose en 1928 la notion d'interaction d'échange (couplage par l'intermédiaire des fonctions d'onde) pour expliquer le ferromagnétisme.

- 
- Hermann Ludwig von **Helmholtz** (1821-1894), physicien et physiologiste allemand. Il introduit en 1847 le concept d'*énergie électrostatique*. Il est également connu pour être l'inventeur de la configuration dites des *bobines de Helmholtz*, que certains attribuent en fait à **Gauguin** sans que le débat puisse être tranché.
  - Joseph **Henry** (1797-1878), physicien américain. Il découvre l'auto-induction en 1832 et développe les électroaimants inventés par **Sturgeon**.
  - Heinrich **Hertz** (1857-1894), physicien allemand. Il démontre en 1888 l'existence des ondes électromagnétiques prédites par **Maxwell** en 1873 en créant une onde électromagnétique et en la détectant 20 m plus loin. Il estime ainsi que l'électricité se déplace à une vitesse de l'ordre de 200 000 km/s.
  - James Prescott **Joule** (1818-1889), physicien anglais. Il découvre l'*effet Joule* en 1840 et la magnétostriktion en 1847.
  - Willem Hendrik **Keesom** (1876-1956), physicien néerlandais, collègue puis successeur de Kamerlingh Onnes à la tête du laboratoire de Leyde. Il montre en 1921 que l'interaction dipôle-dipôle entre molécules polaires génère une force de type **van der Waals**.
  - Gustav Robert **Kirchhoff** (1824-1887), physicien allemand. Il énonce les lois sur les courants dérivés qui portent son nom, et établit l'équation des télégraphistes.
  - Erwald **von Kleist** (1700-1748), physicien prussien. En 1745, il invente un précurseur des condensateurs électriques, indépendamment de **van Musschenbroek**. Cette invention, initialement appelée *bouteille de Kleistian*, est maintenant connue sous le nom de *bouteille de Leyde*.
  - Hendrik **Kramers** (1894-1952), physicien hollandais. Il est à l'origine (avec **Kronig**) des *relations de Kramers-Kronig* qui décrivent la relation qui existe entre la partie réelle et la partie imaginaire de certaines fonctions complexes, en particulier la permittivité  $\epsilon(\omega)$ .
  - Ralph (de Laer) **Kronig** (1904-1995), physicien germano-américain. Il découvre le spin des particules élémentaires en 1925. Il est à l'origine (avec **Kramers**) des *relations de Kramers-Kronig* qui décrivent la relation qui existe entre la partie réelle et la partie imaginaire de certaines fonctions complexes, en particulier la permittivité  $\epsilon(\omega)$ .
  - Paul **Langevin** (1872-1946), physicien français. Il introduit en 1905 la fonction qui porte son nom lors de son étude sur le paramagnétisme.
  - Pierre Simon de **Laplace** (1749-1827), homme politique et physicien français. Il est à l'origine de la notion de potentiel par l'introduction de l'équation qui porte son nom. Il énonce en 1820 la *loi de Biot et Savart*.
  - Pyotr **Lebedev** (1866-1912), physicien russe. Il prouve expérimentalement l'existence de la pression de radiation en 1900.
  - Ernst **Lecher** (1856-1926), physicien autrichien. Il perfectionne l'expérience initiale de **Hertz** et prouve expérimentalement que la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques est sensiblement égale à la vitesse de la lumière dans le vide. Il développe également la théorie des lignes électromagnétiques.
  - Hendrika van **Leeuwen** (1887-1974), physicienne néerlandaise. Elle montre en 1919 (*théorème de van Leeuwen*) que le ferromagnétisme est essentiellement un phénomène quantique.
  - Adrien-Marie **Legendre** (1752-1833), mathématicien français. En physique, son nom reste associé à une équation et ses solutions polynomiales souvent utilisées pour la résolution de problèmes à symétrie sphérique.

- 
- Heinrich **Lenz** (1804-1865), physicien germano-russe. Son nom reste attaché à la loi de modulation reliant la force électromotrice induite dans un circuit à la variation du flux du champ magnétique à travers ce circuit.
  - Alfred-Marie **Liénard** (1869-1958), physicien français. Il introduit dans l'*Eclairage électrique* en 1898 la première version des *potentiels de Liénard-Wiechert*, indépendamment de **Wiechert**.
  - Fritz **London** (1900-1954), physicien germano-américain. Il montre en 1930 que l'interaction instantanée dipôle-dipôle entre molécules non polaires génère une force de type **van der Waals**.
  - Ludwig **Lorenz** (1829-1891), physicien danois. Il introduit les potentiels retardés en 1867 et la jauge qui porte désormais son nom en 1869. A ne pas confondre avec **Lorentz**. Ils entretiennent des relations exécrables...
  - Hendrik Antoon **Lorentz** (1853-1928), physicien néerlandais, prix Nobel de physique en 1902 pour sa théorie électronique de la matière appliquée au magnétisme. Il est également connu pour la transformation et la force qui portent son nom. Il énonce le *théorème de réciprocité* en 1896 et donne en 1920 la *correction de Lorentz* pour les diélectriques. A ne pas confondre avec **Lorenz**. Ils entretiennent d'ailleurs des relations exécrables...
  - Guglielmo **Marconi** (1874-1937), physicien italien, prix Nobel de physique en 1909 pour la première transmission radio entre le Canada et l'Angleterre, prouvant ainsi la propagation à grande distance en basse fréquence par réflexion sur l'ionosphère. Après une longue controverse, il sera reconnu coupable d'avoir utilisé des brevets de **Tesla** pour ses travaux.
  - Pierre de **Maricourt** également connu sous le nom de Petrus Peregrinus (Pierre le Pèlerin), savant français du 13<sup>e</sup> siècle. Spécialiste de métallurgie, il crée un nouveau modèle d'armure pour l'armée de Saint Louis. Il rédige en 1269 le premier traité connu sur les propriétés des aimants (sans doute le premier traité de physique expérimentale jamais écrit). Il imagine alors que magnétisme est dû à l'orientation de la voûte céleste.
  - James Clerk **Maxwell** (1831-1879), physicien britannique. Il rassemble l'électricité et le magnétisme sous une seule théorie (*l'électromagnétisme*) à partir de 1855 sous la forme d'un système de 20 équations à 20 inconnues. En 1873, dans son traité *Electricity and Magnetism*, il les condense en un système de huit équations. Il introduit également le *courant de déplacement* en 1862 et prédit la pression de radiation en 1871.
  - Gustav **Mie** (1868-1957), physicien allemand. Il énonce en 1908 la *théorie de Mie* qui donne une solution rigoureuse au problème de la diffusion d'une onde plane monochromatique sur une sphère métallique.
  - Robert **Millikan** (1868-1953), physicien américain, prix Nobel de physique en 1923. Il montre en 1909 avec **Fletcher** que la charge électrique est quantifiée.
  - Hermann **Minkowski** (1864-1909), mathématicien et physicien allemand. Il développe le formalisme quadridimensionnel de la relativité restreinte en 1907.
  - Ottaviano-Fabrizio **Mossotti** (1791-1863), physicien italien. Il introduit en 1850 la relation entre les constantes diélectriques de deux milieux différents traversés par de la lumière.
  - Pieter **van Musschenbroek** (1692-1761), physicien hollandais. En 1746, il invente (à Leyde) la *bouteille de Leyde*, précurseur des condensateurs électriques, indépendamment de **von Kleist**, qui avait développé un système équivalent l'année précédente.
  - Louis **Néel** (1904-2000), physicien français, prix Nobel de physique en 1970 pour la prédiction de l'antiferromagnétisme (découvert en 1936) et du ferrimagnétisme (découvert en 1956).

- 
- Carl **Neumann** (1832-1925), mathématicien allemand. Son influence en électromagnétisme est due à ses travaux sur les solutions de l'équation de Laplace. A ne pas confondre avec Franz Ernst **Neumann**.
  - Franz Ernst **Neumann** (1700-1770), physicien allemand. Il publie une théorie mathématique de l'induction en 1845. A ne pas confondre avec Carl **Neumann**.
  - Jean Antoine **Nollet** (1798-1895), abbé et physicien français. De 1730 à 1732, il travaille avec le surintendant **du Fay**. Il conçoit les premiers électroscopes à boule de sureau en 1747 et à feuille d'or en 1750. Il est le premier à voir dans la foudre et les feux de Saint-Elme l'action de l'électricité.
  - Hans Christian **Oersted** (1777-1851), physicien danois. Il découvre en avril 1820 l'influence d'un courant électrique sur le comportement de l'aiguille d'une boussole.
  - Georg Simon **Ohm** (1789-1854), physicien allemand. Il énonce la loi qui porte son nom en 1827.
  - Lars **Onsager** (1911-1976), chimiste norvégien, prix Nobel de chimie en 1968. Il donne l'expression du champ local pour les molécules polaires en 1936.
  - Vassilievitch **Ostrogradski** (1801-1862), mathématicien et physicien russe. Son *théorème de la divergence* (établi à la même époque indépendamment par **Gauss** et **Green**) est d'une grande utilité en électromagnétisme.
  - Gaston **Planté** (1834-1889), physicien français. Il met au point en 1859 l'accumulateur plomb/acide, la première batterie électrique rechargeable.
  - Johan Christian **Poggendorff** (1796-1877), physicien allemand. Il invente le galvanomètre en 1821.
  - Siméon Denis **Poisson** (1781-1840), physicien français (élève de **Laplace**). Il étend à l'électrostatique en 1811 la théorie du potentiel développée par **Laplace** pour la gravitation.
  - Alexandre **Popov** (1859-1906), physicien russe. Il invente l'antenne linéaire et développe le système inventé par Hertz pour l'émission et la détection des ondes. Etant employé d'un laboratoire militaire, ses travaux sont restés secrets pendant longtemps et personne ne sait qui de **Marconi** ou de lui a effectué la première communication radio.
  - John Henry **Poynting** (1852-1914), physicien anglais. Il énonce le théorème sur l'énergie électromagnétique qui porte désormais son nom et introduit la pression de radiation.
  - Georg Wilhelm **Richmann** (1711-1753), physicien russe d'origine allemande. Il réalise des travaux précurseurs dans le domaine de l'électricité atmosphérique. Ayant entendu parler des expériences de **Franklin** sur le paratonnerre, il tente de reproduire son expérience du cerf-volant et meurt foudroyé par un éclair.
  - Walther **Ritz** (1878-1909), physicien suisse. Il argumente en 1909 avec **Einstein** sur l'utilisation des potentiels avancés en électromagnétisme. **Einstein** défend l'égalité de traitement pour les potentiels avancés et retardés, tandis que Ritz défend les potentiels retardés (qui seraient une conséquence du 2<sup>e</sup> principe de la thermodynamique). Deux mois avant le décès de Ritz, ils publient ensemble un papier d'un seul paragraphe pour exposer leur désaccord (sans doute un record de concision).
  - Jacques **de Romas** (1713-1776), physicien français. Il prouve en 1754 la nature électrique de la foudre en envoyant un cerf-volant dans un orage et en observant des étincelles le long de la corde (entourée d'un fil métallique) qui le retenait au sol.
  - Henry Augustus **Rowland** (1848-1901), physicien américain. Il conçoit en 1873 l'*anneau de Rowland* qui permet de mesurer la courbe d'hystérésis d'un matériau magnétique. En 1878, il découvre qu'un disque chargé tournant rapidement donne lieu à des effets magnétiques. Certains auteurs lui attribuent

---

également la découverte originelle de l'*effet Hall*, sans que ce point soit clairement établi.

- Heinrich Daniel **Ruhmkorff** (1803-1877), ingénieur mécanicien français d'origine allemande. Il invente vers 1850 la bobine d'induction qui porte désormais son nom et qui peut produire une étincelle de 30 cm de long. Cette bobine, initialement prévue pour des usages médicaux, a été utilisée comme générateur de courant à haute tension par tous les physiciens de l'époque.
- Ernest **Rutherford** (1871-1937), physicien britannique d'origine néo-zélandaise, prix Nobel de chimie en 1908. Il montre à l'aide d'une expérience de diffusion de particules  $\alpha$  sur une feuille d'or que la charge électrique est localisée dans la matière.
- Félix **Savart** (1791-1841), médecin et physicien français. Il travaille en 1820 avec **Biot** sur la loi donnant la forme du champ magnétique créé par un fil parcouru par un courant mais la loi qui porte leurs noms est en fait établie par **Laplace**.
- Elie **Seignette** (1632-1698), chimiste et apothicaire français. En faisant réagir du tartre et de la soude, il inventa à La Rochelle vers 1650 le *sel de Seignette* (ou *sel de Rochelle*), qui en plus de propriétés laxatives recherchées à l'époque, est un puissant ferroélectrique. Ce sera même le seul connu jusqu'à la fabrication des céramiques piézo-électriques vers 1950.
- Sir George Gabriel **Stokes** (1819-1903), mathématicien et physicien irlandais. Spécialiste des fluides visqueux, son nom est associé à un théorème reliant la circulation d'un champ de vecteurs au flux de son rotationnel. Il faut noter que ce théorème avait originellement été démontré par **Ostrogradsky** vers 1820 et redécouvert ensuite par **Lord Kelvin**.
- John William **Strutt** (1842-1919), physicien anglais (plus connu sous son titre de Lord **Rayleigh**), prix Nobel de physique en 1904 pour la découverte de l'argon. Spécialiste des phénomènes ondulatoires, il relie en 1871 la couleur du ciel à la diffusion de la lumière par les molécules de l'atmosphère. Il succède à **Maxwell** à la direction du Cavendish Laboratory en 1879.
- William **Sturgeon** (1783-1850), physicien anglais. Il invente l'*électroaimant* en 1825.
- **Thalès de Milet** (625-547 av JC), philosophe et savant grec. Il observe un des premiers effets attribués aujourd'hui à l'électrostatique : une résine fossile de conifère, ou *ambre jaune*, frottée, attire des brindilles de paille ou de l'oxyde de fer.
- Nikola **Tesla** (1856-1943), physicien croate naturalisé américain. Il est avec **Westinghouse** un des grands artisans de l'utilisation des courants alternatifs, à l'opposé d'**Edison** qui préconise l'utilisation des courants continus. Il dépose plusieurs centaines de brevets autour de tous les aspects de l'énergie électrique, en particulier celui du moteur à induction en 1887.
- Joseph John **Thomson**, parfois appelé « JJ Thomson » (1856-1940), physicien anglais. Prix Nobel de Physique en 1906 pour ses travaux sur la conductivité électrique dans les gaz. Il découvre l'électron en 1897. A ne pas confondre avec William **Thomson**.
- William **Thomson** (1824-1907), physicien anglais (plus connu sous son titre de Lord **Kelvin**). Ses études en électricité portent sur la conduction électrique des câbles sous-marins (il est à l'origine de la construction du premier câble transatlantique). Il découvre l'*effet Thomson* et introduit la thermoélectricité. A ne pas confondre avec Joseph John **Thomson**.
- Johannes **van der Waals** (1837-1923), physicien hollandais. Prix Nobel de Physique en 1910. Il propose en 1873 l'équation des gaz réels qui porte désormais son nom, basée sur des interactions entre des moments dipolaires associés aux molécules du gaz.
- Alessandro **Volta** (1745-1827), physicien italien. Il observe en 1782 que les charges se condensent sur les faces en regard de deux conducteurs lorsqu'on les rapproche et introduit le terme de *condensateur*.

---

Promoteur de l'*électricité métallique* (par opposition à l'*électricité animale* de **Galvani**), il invente en 1800 la pile première pile électrique, constituée d'un empilement de disques de cuivre et de zinc plongés dans une solution sulfurique.

- Pierre **Weiss** (1865-1940), physicien français. Il introduit la notion de *domaine* dans les ferromagnétiques et est l'auteur de la théorie du champ moléculaire qui permet une extension aux matériaux ferromagnétiques de la théorie du paramagnétisme.
- George **Westinghouse** (1846-1914), physicien et ingénieur américain. Fondateur de *Westinghouse Electric Company*, il s'oppose violemment à **Edison** pour la suprématie de l'utilisation du courant alternatif par rapport au courant continu.
- Hermann **Weyl** (1885-1955), mathématicien et physicien allemand. Il introduit les *théories de jauge* en 1918.
- Emil Johann **Wiechert** (1861-1928), géophysicien et physicien allemand. Il introduit en 1900 la première version des *potentiels de Liénard-Wiechert*, indépendamment de **Liénard**.

## Bibliographie "électromagnétique" : livres conseillés pour l'année du L3

Quelques ouvrages de référence disponibles actuellement dans toutes les bonnes bibliothèques (choix personnel) :

1. E. Purcell, *Electricité et magnétisme - Cours de Physique de Berkeley, volume 2* (version française), Armand Colin, Paris, 1973
2. R. Feynman, R. Leighton et M. Sands, *Cours de Physique - Electromagnétisme* (version française), InterEditions, Paris, 1979
3. J.D. Jackson, *Electrodynamique classique* (version française), 3<sup>e</sup> édition, Dunod, Paris, 2001
4. A. Zangwill, *Modern Electrodynamics*, Cambridge University Press, 2013
5. D. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Fourth Edition, Pearson, 2014.

Parmi les collections de CPGE, les livres les plus complets traitant l'électromagnétisme sont sans doute (choix personnel) :

1. J.P. Faroux et J. Renault, *Electromagnétisme 1 - Cours et exercices corrigés*, Dunod, Paris, 1996
2. J.P. Faroux et J. Renault, *Electromagnétisme 2 - Cours et exercices corrigés*, Dunod, Paris, 1998
3. J.P. Perez, R. Carles et R. Fleckinger, *Electromagnétisme*, 3<sup>e</sup> édition, Masson, 1997

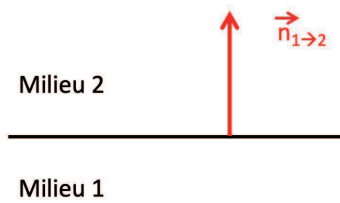
# Bibliographie

- [1] P. Lorrain, D. Corson et F. Lorrain, *Electromagnetic fields and waves*, W.H. Freeman & Company, 1970.
- [2] M. Soutif, *Vibrations, propagation, diffusion*, Dunod Université, Paris, 1970.
- [3] J.P. Barrat, *Electromagnétisme et Relativité Restreinte*, Ediscience, Paris, 1972.  
Très bon ouvrage, malheureusement épuisé. A été cloné, sans être généralement cité, par quasiment tous les ouvrages plus récents écrits en français.
- [4] R. Feynman, R. Leighton et M. Sands, *Cours de Physique - Electromagnétisme* (version française), InterEditions, Paris, 1979.  
Un classique ne détaillant pas trop les calculs et se concentrant sur l'interprétation des phénomènes. Attention, ce livre a été écrit il y a longtemps (avant la découverte de la structure des quarks par exemple) donc certaines explications ne sont plus pertinentes.
- [5] D.K. Cheng, *Field and Wave - Electromagnetics*, Addison-Wesley, 1983.
- [6] M. Bertin, J.P. Faroux et J. Renault, *Electromagnétisme 4 - Milieux diélectriques et milieux aimantés*, Dunod, Paris, 1984.  
Un des meilleurs ouvrages en français écrits pour l'étude des milieux matériels.
- [7] H. Gié et J.P. Sarmant, *Electromagnétisme*, Tec et Doc, Paris, 1985.
- [8] J.P. Faroux et J. Renault, *Electromagnétisme 1 et 2 - Cours et exercices corrigés*, Dunod, Paris, 1996-1998.  
Un des meilleurs ouvrages écrits pour les classes préparatoires. Se concentre principalement sur la discussion des résultats.
- [9] J.P. Perez, R. Carles et R. Fleckinger, *Electromagnétisme*, 3<sup>e</sup> édition, Masson, 1997.  
Un des ouvrages les plus complets. Se concentre principalement sur les calculs.
- [10] M. Lambert, *Relativité restreinte et électromagnétisme*, Ellipses, Paris, 2000.
- [11] J.D. Jackson, *Electrodynamique classique* (version française), 3<sup>e</sup> édition, Dunod, Paris, 2001.  
Sans doute le plus grand des classiques. Rarement un livre aura autant cerné un champ entier de la physique. Comme cette version est écrite en MKSA, il n'y a plus l'excuse de la difficulté due au système cgs...
- [12] D. Halliday, R. Resnick et J. Walker, *Physique*, 6<sup>e</sup> édition, McGraw-Hill, Montréal, 2003.
- [13] A. Zangwill, *Modern Electrodynamics*, Cambridge University Press, 2013.
- [14] D. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Fourth Edition, Pearson, 2014.

# Notations

Dans tout le polycopié, on notera ( $V$ ) un volume et ( $S$ ) la surface fermée qui s'appuie sur ce volume. La normale sortante du volume ( $V$ ) sera notée  $\vec{n}$ . Une surface ouverte sera notée ( $\Sigma$ ).

Dans un modèle surfacique, on notera  $\vec{n}_{1\rightarrow 2}$  le vecteur unitaire porté par la surface de séparation entre deux milieux (1) et (2) et orienté du milieu (1) vers le milieu (2).



Les principales notations sont résumées dans le tableau ci-dessous :

	Unité	Notation
Champ électrique	V/m	$\vec{E}$
Potentiel scalaire	V	$\Phi$
Champ magnétique	T	$\vec{B}$
Potentiel vecteur	Tm	$\vec{A}$
Polarisation	C/m <sup>2</sup>	$\vec{P}$
Vecteur $\vec{D}$	C/m <sup>2</sup>	$\vec{D}$
Aimantation	A/m	$\vec{M}$
Vecteur $\vec{H}$	A/m	$\vec{H}$
Vecteur de Poynting	W/m <sup>2</sup>	$\vec{R}$
Densité volumique d'énergie électromagnétique	J/m <sup>3</sup>	$u$
Densité volumique de charges	C/m <sup>3</sup>	$\rho$
Densité volumique de courants	A/m <sup>2</sup>	$\vec{J}$
Densité superficielle de charge	C/m <sup>2</sup>	$\sigma$
Densité superficielle de courant	A/m	$\vec{K}$
Intensité d'un courant permanent	A	$I$
Intensité d'un courant variable	A	$i$
Conductivité	S/m	$\gamma$

TABLE 1 – Principales notations récurrentes.



# Annexe A

## Rappels mathématiques

### Sommaire

---

A.1	Formes différentielles . . . . .	1
A.2	Outils mathématiques . . . . .	3
A.3	Systèmes de coordonnées . . . . .	7
A.4	Compléments sur les opérateurs . . . . .	9
A.5	Résolution de l'équation de Bessel . . . . .	10
A.6	Quelques notions sur l'analyse de Fourier . . . . .	12

---

### Introduction

Cette annexe présente, sans aucune démonstration, quelques propriétés mathématiques couramment utilisées dans ce cours. Les notations utilisées ici seront utilisées tout au long du polycopié.

#### A.1 Formes différentielles

##### A.1.1 Formule fréquentes

En notant  $\vec{r}$  le rayon vecteur, on pourrait montrer que l'on a :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{r}) = 3 \tag{A.1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{0} \tag{A.2}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r} \tag{A.3}$$

$$\vec{\nabla} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{A.4}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = -\Delta \left( \frac{1}{r} \right) = 0 \text{ si } r \neq 0 \tag{A.5}$$

On note  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{C}$  trois vecteurs quelconques et  $\phi$  et  $\psi$  des fonctions scalaires arbitraires. On pourrait montrer les relations suivantes :

$$\vec{\nabla}(\phi\psi) = \phi \vec{\nabla}(\psi) + \psi \vec{\nabla}(\phi) \quad (\text{A.6})$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \quad (\text{A.7})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{A}) = \phi \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla}(\phi) \quad (\text{A.8})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (\text{A.9})$$

$$\vec{\nabla} \times (\phi \vec{A}) = \phi \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \times \vec{\nabla}(\phi) \quad (\text{A.10})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \quad (\text{A.11})$$

$$\Delta(\phi\psi) = \phi \Delta\psi + \psi \Delta\phi + 2 \vec{\nabla}(\phi) \cdot \vec{\nabla}(\psi) \quad (\text{A.12})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \quad (\text{A.13})$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} \quad (\text{A.14})$$

En combinant les opérateurs différentiels du 1<sup>er</sup> ordre, on peut montrer que l'on a :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = \vec{0} \quad (\text{A.16})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) = \nabla^2(\phi) = \Delta\phi \quad (\text{A.17})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A} \quad (\text{A.18})$$

On peut montrer que la réciproque des relations (A.15) et (A.16) s'énonce de manière pratique sous les formes suivantes :

- Si un champ vectoriel a une divergence nulle, il existe au moins un champ vectoriel dont il est le rotationnel.
- Si un champ vectoriel a un rotationnel nul, il existe au moins un champ scalaire dont il est le gradient.

### A.1.2 Formules à adapter

Les formules ci-dessus sont celles que l'on trouve partout. Attention, il faut parfois les adapter en fonction des circonstances.

On va montrer ceci sur un exemple. On considère pour cela six variables d'espace, en coordonnées cartésiennes, définissant la position de deux points  $M(x_M, y_M, z_M)$  et  $P(x_P, y_P, z_P)$ . Lors de calculs impliquant les extrémités  $P$  ou  $M$  de  $\vec{PM}$ , il faut bien préciser sur quelles variables portent les dérivations ou les intégrations. Par exemple, on a  $\vec{PM}(x_M - x_P, y_M - y_P, z_M - z_P)$  et  $r^2 = (x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2 + (z_M - z_P)^2$ . On en déduit par exemple que :

$$\frac{\partial r}{\partial x_M} = \frac{x_M - x_P}{r} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial}{\partial x_M} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{-1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x_M} = -\frac{x_M - x_P}{r^3}$$

De la même façon, on montre que :

$$\frac{\partial}{\partial x_P} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{x_M - x_P}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial x_M} \left( \frac{1}{r} \right)$$

On en déduit en particulier que :

$$\vec{\nabla}_M \left( \frac{1}{\|\vec{PM}\|} \right) = -\frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} \quad \text{tandis que} \quad \vec{\nabla}_P \left( \frac{1}{\|\vec{PM}\|} \right) = \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} \quad (\text{A.19})$$

Les deux expressions de  $\vec{\nabla}_P$  et  $\vec{\nabla}_M$  sont identiques, seuls les signes diffèrent. Il en était de même pour  $\partial/\partial x_P(1/r)$  et  $\partial/\partial x_M(1/r)$ .

## A.2 Outils mathématiques

### A.2.1 Interprétation physique des opérateurs différentiels

#### Interprétation physique du gradient

Pour donner une interprétation intuitive au gradient d'une fonction  $f$ , il faut se souvenir de la propriété fondamentale suivante :

$$df = \vec{\nabla}(f) \cdot d\vec{OM} \quad (\text{A.20})$$

qui vient directement de la définition du gradient. L'équation  $f(x, y, z) = \lambda$ , définit des *surfaces de niveau* pour chaque valeur de la constante  $\lambda$ . Pour tout déplacement  $d\vec{OM}$  s'effectuant sur la surface  $f(x, y, z) = \lambda$ , la propriété fondamentale du gradient rapportée ci-dessus s'écrit  $\vec{\nabla}(f) \cdot d\vec{OM} = 0$ , ce qui montre que  $\vec{\nabla}(f)$  est normal à tout déplacement  $d\vec{OM}$  se faisant sur la surface  $f(x, y, z) = \lambda$  au voisinage de  $M$ .

De plus, lorsqu'on passe d'une surface de niveau à une surface voisine correspondant à une valeur supérieure de  $f$ , la relation (A.20) montre que le  $\vec{\nabla}(f)$  est dirigé suivant les valeurs croissantes de  $f$ .

En résumé, on retiendra que  $\vec{\nabla}$  est un opérateur différentiel qui s'applique à un champ de scalaires  $f$  et décrit un champ de vecteurs qui représente la variation de la valeur du champ scalaire dans l'espace :  $\vec{\nabla}(f)$  **est normal aux surfaces**  $f = Cste$  **et dirigé vers les valeurs croissantes de**  $f$ . Pratiquement, le gradient indique la direction de la plus grande variation du champ scalaire, et l'intensité de cette variation.

#### Interprétation physique de la divergence

On considère un champ de vecteur  $\vec{a}$ , défini par  $\vec{a} = \lambda \vec{r}$  où  $\lambda$  est une constante réelle. Les lignes de champ sont radiales. Suivant que  $\lambda$  est positif ou négatif, le champ diverge depuis l'origine  $O$  ou converge vers  $O$  (figure A.1). Comme de plus  $a_x = \lambda x$ ,  $a_y = \lambda y$  et  $a_z = \lambda z$ , on a  $\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 3\lambda$ , c'est-à-dire que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{a}$  a le signe de  $\lambda$ .



FIGURE A.1 – Interprétation physique de la divergence d'un champ de vecteurs.

En résumé, on retiendra que la divergence est un opérateur différentiel qui associe à un champ de vecteurs  $\vec{a}$  une quantité scalaire qui caractérise localement la façon avec laquelle les lignes de champs divergent ou convergent (selon le signe de  $\vec{\nabla} \cdot \vec{a}$ ). Plus la divergence est élevée, plus les lignes de champ divergent (ou convergent).

#### Interprétation physique du rotationnel

On considère un contour de surface donnée. On peut montrer que le rotationnel d'un champ de vecteurs est la limite du rapport :

$$\frac{\text{Intégrale curviligne autour du contour}}{\text{Aire de la surface définie par le contour}}$$

lorsque la surface du contour tend vers zéro. Considérons par exemple un champ de vecteur vitesse dont le rotationnel est non nul. On peut alors représenter les vitesses de ce champ par les schémas de la figure A.2, auxquels on superpose une dérive d'ensemble.

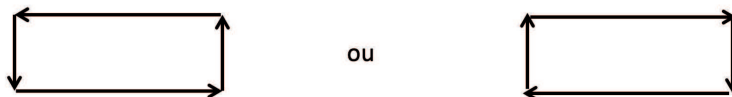


FIGURE A.2 – Interprétation physique du rotationnel d'un champ de vecteurs.

En résumé, on retiendra que l'opérateur rotationnel est un opérateur différentiel vectoriel qui mesure la propension du champ de vecteurs à tourner. Le vecteur résultant est porté par l'axe autour duquel s'opère la rotation.

### Interprétation physique du laplacien scalaire

On considère un champ scalaire quelconque  $V(M)$  autour d'un point  $M$ . On note  $V(M_0)$  la valeur du champ en un point  $M_0$  et  $\epsilon$  le rayon d'une petite sphère centrée sur  $M_0$ . On appelle *valeur moyenne* de  $V$  sur le domaine  $(\mathcal{D})$  la grandeur  $\langle V \rangle$  telle que :

$$\langle V \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon^2} \iint_{(\mathcal{D})} V(M) dS$$

On peut montrer que :

$$\langle V \rangle = V(M_0) + \frac{\epsilon^2}{6} \Delta V(M_0) + O(\epsilon^2) \quad (\text{A.21})$$

où le laplacien  $\Delta V(M_0)$  est évalué en  $M_0$ . Ce laplacien permet donc de comparer  $V(M_0)$  à la valeur moyenne du champ au voisinage de  $M_0$ . En particulier, si  $M_0$  est un minimum local, on a nécessairement  $\Delta V(M_0) > 0$ . De même, si  $M_0$  est un maximum local, on a nécessairement  $\Delta V(M_0) < 0$ .

## A.2.2 Transformation des domaines d'intégration

Certaines relations mathématiques ont une importance particulière dans tous les domaines de la physique, et principalement en électromagnétisme. On peut citer principalement, en notant  $\vec{A}$  un champ vectoriel à dérivées partielles bornées et  $\phi$  et  $\psi$  des fonctions scalaires :

1. la relation reliant le flux d'un champ de vecteurs  $\vec{A}$  à travers une surface fermée  $(S)$  à l'intégrale de sa divergence dans le volume  $(V)$  délimité par cette surface, connue sous le nom de *théorème d'Ostrogradsky* ou *théorème de la divergence* :

$$\oiint_{(S)} \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \oiint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S} \equiv \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV \quad (\text{A.22})$$

La normale  $\vec{n}$  à la surface est orientée sortante du volume.

2. la relation reliant la circulation d'un champ de vecteurs  $\vec{A}$  le long d'une courbe fermée  $(\mathcal{C})$  au flux de son rotationnel à travers une surface ouverte quelconque  $(\Sigma)$  qui s'appuie sur  $(\mathcal{C})$ , connue sous le nom de *théorème de Stokes* :

$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{A} \cdot d\vec{l} \equiv \iint_{(\Sigma)} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \quad (\text{A.23})$$

3. la relation reliant le flux du produit vectoriel de la normale  $\vec{n}$  à une surface fermée  $(S)$  avec un champ de vecteurs  $\vec{A}$  à travers cette surface, à l'intégrale de son rotationnel dans le volume  $(V)$  délimité par cette surface, connue sous le nom de *formule du rotationnel* :

$$\oiint_{(S)} (\vec{n} \times \vec{A}) dS \equiv \iiint_{(V)} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) dV \quad (\text{A.24})$$

4. la relation reliant le flux d'une fonction scalaire  $\phi$  à travers une surface fermée ( $S$ ) à l'intégrale de son gradient dans le volume ( $V$ ) délimité par cette surface, connue sous le nom de *formule du gradient* :

$$\oint_{(S)} \phi d\vec{S} \equiv \iiint_{(V)} \vec{\nabla}(\phi) dV \quad (\text{A.25})$$

5. la relation reliant la circulation d'une fonction scalaire  $\phi$  le long d'une courbe fermée ( $C$ ) au flux du produit vectoriel de la normale  $\vec{n}$  à une surface ( $\Sigma$ ) s'appuyant sur ce contour par le gradient de la fonction scalaire, connue sous le nom de *formule de Kelvin* :

$$\oint_{(C)} \phi d\vec{l} = \iint_{(\Sigma)} \vec{n} \times \vec{\nabla}(\phi) dS \quad (\text{A.26})$$

6. La formule suivante s'appliquant à une surface fermée ( $S$ ) est connue sous le nom de *formule de Green* :

$$\iiint_{(V)} [\phi \Delta(\psi) - \psi \Delta(\phi)] dV = \oint_{(S)} [\phi \vec{\nabla}(\psi) - \psi \vec{\nabla}(\phi)] \cdot d\vec{S} \quad (\text{A.27})$$

**Remarque 1 :** En se souvenant des propriétés des opérateurs différentiels (A.15) à (A.18), les formules de changement de domaine d'intégration ci-dessus permettent de passer de la formulation intégrale d'une loi à sa formulation locale, et vice versa (voir table A.1).

Propriété du champ	Formulation intégrale	Formulation différentielle en champ	Formulation différentielle avec potentiels
Circulation conservative	$\oint_{(C)} \vec{h} \cdot d\vec{r} = 0$ ( $C$ ) fermée quelconque	$\vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{0}$	$\vec{h} = \vec{\nabla}(f)$
Flux conservatif	$\iint_{(S)} \vec{g} \cdot d\vec{S} = 0$ ( $S$ ) fermée quelconque	$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = 0$	$\vec{g} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$

TABLE A.1 – Formulations mathématiques des principales propriétés des champs.

**Remarque 2 :**

On considère un contour ( $C$ ) et ( $\Sigma$ ) une surface qui s'appuie sur ce contour. Par définition, le *vecteur-surface* de ( $C$ ) est la somme des vecteurs élémentaires  $d\vec{S}$  associés à chacune des surface  $dS$ , et orientés selon la *règle du tire-bouchon* :

$$\vec{S} = \iint_{(\Sigma)} d\vec{S}$$

En considérant deux surfaces différentes ( $\Sigma_1$ ) et ( $\Sigma_2$ ), on peut définir deux vecteur-surface  $\vec{S}_1$  et  $\vec{S}_2$ . L'intégrale de  $d\vec{S}$  sur la surface fermée ( $\Sigma_1 + \Sigma_2$ ) vaut  $\vec{S}_2 - \vec{S}_1$ . En appliquant (A.25) au champ scalaire uniforme  $U = 1$  sur le volume  $V$  délimité par ( $\Sigma_1 + \Sigma_2$ ), on obtient :

$$\oint_{(\Sigma_1 + \Sigma_2)} 1 d\vec{S} = \vec{S}_2 - \vec{S}_1 = \iiint_{(V)} \vec{\nabla}(1) dV \equiv 0$$

Ceci montre que le vecteur-surface ne dépend pas de la surface ( $\Sigma_i$ ) mais uniquement du contour ( $C$ ) sur lequel elle s'appuie. En particulier, si on prend comme surface un cône de sommet  $O$  et de directrice ( $C$ ), on

montre que  $\vec{S}$  peut s'écrire :

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_{(C)} \vec{r} \times d\vec{r}$$

Cette expression sera abondamment utilisée au chapitre 7.

### A.2.3 Unicité de la définition d'un champ par des équations locales

#### Cas d'un champ scalaire

On considère une fonction scalaire  $f$  satisfaisant en tout point d'un volume ( $V$ ) limité par une surface ( $\Sigma$ ) l'équation :

$$\Delta f = \phi(\vec{r})$$

où  $\phi(\vec{r})$  est une fonction définie en tout point du volume ( $V$ ), sans singularité. On peut alors montrer que la solution est unique si une des trois conditions suivantes est remplie :

1. La valeur de  $f$  est connue en chaque point de la surface ( $\Sigma$ ) (condition dite *de Dirichlet*).
2. La valeur de  $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}(f)$  est connue en chaque point de la surface ( $\Sigma$ ), où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire normal à ( $\Sigma$ ) au point considéré (condition dite *de Neumann*).
3. La valeur de  $f$  est connue sur une partie de ( $\Sigma$ ), et la valeur de  $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}(f)$  est connue sur la partie complémentaire de ( $\Sigma$ ).

**Remarque :** Ceci est également valable si le volume ( $V$ ) est l'espace entier à condition que la fonction  $f$  s'annule en dehors d'une portion finie de l'espace et que  $\phi(\vec{r})$  tende vers zéro à l'infini au moins comme  $1/r$ .

#### Cas d'un champ vectoriel

On considère un champ vectoriel  $\vec{A}$  dans un volume ( $V$ ) limité par une surface ( $\Sigma$ ). On suppose que  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  et  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  sont définis en chaque point, sans singularité. La connaissance en chaque point de la surface ( $\Sigma$ ) de  $\vec{n} \cdot \vec{A}$  (où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire normal à la surface ( $\Sigma$ ) en chaque point) assure l'unicité du champ vectoriel  $\vec{A}$ .

**Remarque 1 :** Ceci est également valable si le volume ( $V$ ) est l'espace entier à condition que  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{0}$  et  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{0}$  en dehors d'une portion finie de l'espace et que  $\vec{A}(\vec{r})$  tende vers zéro à l'infini au moins comme  $1/r^2$ .

**Remarque 2 :** Ceci est une conséquence du *théorème d'Helmholtz* qui dit que tout champ vectoriel  $\vec{A}$  est parfaitement connu à une constante additive près si on connaît en tout point sa divergence  $D = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  et son rotationnel  $\vec{R} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ . On aura alors :

$$\vec{A} = -\vec{\nabla} v + \vec{\nabla} \times \vec{a} \quad \text{avec} \quad v(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{D(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \quad \text{et} \quad \vec{a} = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\vec{R}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

Ceci implique en particulier qu'un champ vectoriel quelconque peut se décomposer en la somme d'un champ rotationnel (également appelé *transverse*) et d'un champ irrotationnel (également appelé *longitudinal*).

### A.2.4 Dérivation d'une intégrale

On considère une fonction de la forme  $I(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ . Si les bornes  $a$  et  $b$  dépendent de  $x$ , on aura :

$$\frac{dI(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ \int_a^b f(x, t) dt \right] = f(x, b) \frac{db(x)}{dx} - f(x, a) \frac{da(x)}{dx} + \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt \quad (\text{A.28})$$

Si au contraire les bornes  $a$  et  $b$  ne dépendent pas de  $x$ , alors on aura simplement :

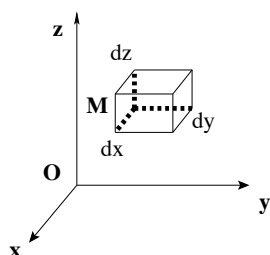
$$\frac{dI(x)}{dx} = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt \quad (\text{A.29})$$

De plus,  $I$  sera continûment dérivable si  $f$  admet des dérivées partielles continues.

## A.3 Systèmes de coordonnées

On donne ici quelques résultats importants. Les calculs, sans difficultés particulières, sont détaillés dans de nombreux ouvrages, par exemple dans [9, page 609 et suivantes]. On vous demandera de connaître les résultats en coordonnées cartésiennes (§ A.3.1). Les expressions dans les autres systèmes de coordonnées ne sont pas à retenir.

### A.3.1 Coordonnées cartésiennes ( $x, y, z$ )



$$dV = dx \, dy \, dz$$

- *Divergence* :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.30})$$

- *Gradient* :

$$(\vec{\nabla} f)_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (\vec{\nabla} f)_y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (\vec{\nabla} f)_z = \frac{\partial f}{\partial z} \quad (\text{A.31})$$

- *Rotationnel* :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{cases} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

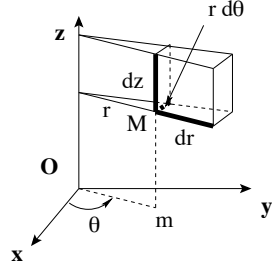
- *Laplacien scalaire* :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{A.33})$$

- *Laplacien vectoriel* :

$$\Delta \vec{A} = (\Delta A_x) \vec{u}_x + (\Delta A_y) \vec{u}_y + (\Delta A_z) \vec{u}_z \quad (\text{A.34})$$

### A.3.2 Coordonnées cylindriques ( $r, \theta, z$ )



$$dV = r dr d\theta dz$$

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

- Divergence :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.35})$$

- Gradient :

$$(\vec{\nabla} f)_r = \frac{\partial f}{\partial r} \quad (\vec{\nabla} f)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (\vec{\nabla} f)_z = \frac{\partial f}{\partial z} \quad (\text{A.36})$$

- Rotationnel :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{cases} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_\theta = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{cases} \quad (\text{A.37})$$

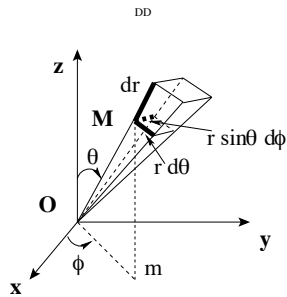
- Laplacien scalaire :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{A.38})$$

- Laplacien vectoriel :

$$\Delta \vec{A} = \left[ \Delta A_r - \frac{1}{r^2} \left( A_r + 2 \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \right] \vec{u}_r + \left[ \Delta A_\theta - \frac{1}{r^2} \left( A_\theta - 2 \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \right] \vec{u}_\theta + (\Delta A_z) \vec{u}_z$$

### A.3.3 Coordonnées sphériques ( $r, \theta, \phi$ )



$$dV = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi$$

$$\begin{cases} x = r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = r \cos(\theta) \end{cases}$$

- Divergence :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin(\theta) A_\theta] \right] + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (\text{A.39})$$

- Gradient :

$$(\vec{\nabla} f)_r = \frac{\partial f}{\partial r} \quad (\vec{\nabla} f)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (\vec{\nabla} f)_\phi = \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi} \quad (\text{A.40})$$



- *Rotationnel* :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{cases} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_r &= \frac{1}{r \sin(\theta)} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin(\theta) A_\phi] - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_\theta &= \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_\phi &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{cases} \quad (\text{A.41})$$

- *Laplacien scalaire* :

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

- *Laplacien vectoriel* :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A} &= \left[ \Delta A_r - \frac{2}{r^2 \sin(\theta)} \left( A_r \sin(\theta) + \frac{\partial(\sin(\theta) A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \right] \vec{u}_r + \\ &\quad \left[ \Delta A_\theta - \frac{2}{r^2 \sin(\theta)} \left( \frac{A_\theta}{2} - \sin^2(\theta) \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \cos(\theta) \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \right] \vec{u}_\theta + \\ &\quad \left[ \Delta A_\phi - \frac{2}{r^2 \sin(\theta)} \left( \frac{A_\phi}{2} - \sin(\theta) \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \cos(\theta) \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \right] \vec{u}_\phi \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

## A.4 Compléments sur les opérateurs

### A.4.1 Variation d'un champ pour un déplacement élémentaire

La variation  $dU$  d'un champ scalaire  $U(\vec{r}, t)$  au cours du déplacement élémentaire  $d\vec{\ell} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$  pendant l'intervalle de temps  $dt$  est donnée par :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz + \frac{\partial U}{\partial t} dt = d\vec{\ell} \cdot (\vec{\nabla}(U)) + \frac{\partial U}{\partial t} dt \quad (\text{A.44})$$

Pour un champ vectoriel  $\vec{a}(\vec{r}, t)$ , comme  $d\vec{\ell} \cdot (\vec{\nabla}(U)) = (d\vec{\ell} \cdot \vec{\nabla}) U$ , la variation du champ scalaire  $a_x$  sera :

$$da_x = (d\vec{\ell} \cdot \vec{\nabla}) a_x + \frac{\partial a_x}{\partial t} dt$$

En regroupant les trois composantes, on obtient donc que la variation du champ vectoriel  $\vec{a}(\vec{r}, t)$  s'écrit :

$$d\vec{a} = (d\vec{\ell} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} + \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} dt \quad (\text{A.45})$$

**Remarque** : VERIFIER????

On suppose qu'à l'instant  $t$ , une particule matérielle se trouve à une position  $\vec{r}$  et qu'elle vérifie une propriété  $\vec{A}(\vec{r})$ . A un instant ultérieur  $t + dt$ , la particule se trouve en  $\vec{r} + \vec{v} dt$  et vérifie la propriété  $\vec{A}(\vec{r} + \vec{v} dt, t + dt)$ . La variation de  $\vec{A}$  entre  $t$  et  $t + dt$  s'écrit :

$$d\vec{A} = \vec{A}(\vec{r} + \vec{v} dt, t + dt) - \vec{A}(\vec{r}, t) \approx \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \right) (v_x dt) + \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \right) (v_y dt) + \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \right) (v_z dt) + \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) dt$$

ou encore :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} \approx \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \quad (\text{A.46})$$

où  $d\vec{A}/dt$  représente la *dérivée particulaire*.

## A.4.2 Définitions intrinsèques des opérateurs

Dans tout ce paragraphe, les champs sont considérés à un instant  $t$ , et ne sont pas forcément des champs permanents. On note  $U$  un champ scalaire et  $\vec{a}$  un champ vectoriel. On peut donner les définitions intrinsèques suivantes<sup>1</sup> pour les opérateurs évoqués ci-dessus :

- D'après (A.44), la définition intrinsèque du gradient peut être :

$$dU = d\vec{l} \cdot \vec{\nabla}(U) \quad (\text{A.47})$$

On peut également dire que *le gradient d'un champ scalaire  $U$  est un champ vectoriel  $\vec{\nabla}(U)$  normal aux surface "equi- $U$ ", dirigé dans le sens des valeurs de  $U$  croissantes, et de norme égale à la dérivée normale de  $U$ .*

- En appliquant (A.22) sur un petit volume  $\delta V$  autour d'un point  $M$ , le flux sortant de ce volume est  $\delta\Phi \approx (\vec{\nabla} \cdot \vec{a})_M \delta V$ , tant qu'on peut négliger les variations spatiales de  $\vec{\nabla} \cdot \vec{a}$  sur le volume  $\delta V$ . On en déduit, par passage à la limite, la définition intrinsèque de la divergence :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{d\Phi}{dV} \quad (\text{A.48})$$

On peut également dire que *la divergence d'un champ vectoriel  $\vec{a}$  en un point  $M$  est le flux volumique de  $\vec{a}$  sortant localement du volume centré autour de  $M$ .*

- On considère un petit contour élémentaire ( $C$ ) de vecteur-surface  $\vec{S}$ , autour d'un point  $M$ . En négligeant les variations spatiales du champ sur ce volume, (A.23) permet d'écrire que  $\delta C \approx (\vec{\nabla} \times \vec{a})_M \cdot d\vec{S}$ . On en déduit, par passage à la limite, que  $dC = (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot d\vec{S}$ .

En privilégiant une direction, on peut définir un contour d'aire  $dS_z$  et de vecteur-surface  $dS_z \vec{u}_z$ , situé autour d'un point  $M$  dans le plan normal à  $\vec{u}_z$ . La circulation  $dC_z$  de  $\vec{a}$  le long de ce contour est la projection selon  $\vec{u}_z$  de  $\vec{\nabla} \times \vec{a}$ , ce qui entraîne la définition intrinsèque du rotationnel :

$$(\vec{\nabla} \times \vec{a})_z = \frac{dC_z}{dS_z} \quad (\text{A.49})$$

On peut également dire que *la projection du rotationnel sur une direction est égale à la circulation locale par unité d'aire autour de celle-ci.*

- En partant de (A.47), (A.48) et (A.49), on peut définir de manière intrinsèque les laplaciens scalaires et vectoriels :

$$\Delta U = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}(U)) \quad \text{et} \quad \Delta \vec{a} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a})$$

**Remarque :** La raison de l'intérêt de ces opérateurs en physique est qu'on peut les déterminer sans avoir à privilégier un système de coordonnées.

## A.5 Résolution de l'équation de Bessel

Les fonctions de Bessel sont des fonctions tabulées, de grande importance en physique pour tous les problèmes présentant une symétrie cylindrique.

1. Une *définition intrinsèque* est une définition qui ne dépend pas du système de coordonnées.

---

### A.5.1 Equation de Bessel

En utilisant la méthode de *séparation des variables*, la résolution de l'équation de **Laplace** en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

peut se faire en cherchant une solution de la forme  $V = F(r) G(\theta) H(z)$ . En multipliant ensuite le résultat par  $r^2/(GH)$ , on obtient l'équation décrivant l'évolution de  $F$  sous la forme :

$$r^2 \frac{d^2 F}{dr^2} + r \frac{dF}{dr} + (k^2 r^2 - \nu^2) F = 0$$

En substituant  $x = kr$ , on obtient l'équation de *Bessel d'ordre  $\nu$*  :

$$x^2 \frac{d^2 F}{dx^2} + x \frac{dF}{dx} + (x^2 - \nu^2) F = 0 \quad (\text{A.50})$$

### A.5.2 Fonctions de Bessel et fonctions de Neumann

Une solution de (A.50) est la *fonction de Bessel de 1<sup>er</sup> espèce*  $J_\nu(x)$  définie par :

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \quad (\text{A.51})$$

où  $\Gamma(x)$  est la fonction définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (\text{A.52})$$

Les variations des premières fonctions de Bessel sont données sur la figure A.3. Une autre solution de l'équation de Bessel (A.50) est  $J_{-\nu}(x)$ . Lorsque  $\nu$  n'est pas un entier,  $J_\nu(x)$  et  $J_{-\nu}(x)$  sont linéairement indépendants. Si  $\nu = n$  est entier, on peut montrer que :

$$J_n(x) = (-1)^n J_n(-x) \quad (\text{A.53})$$

La *fonction de Bessel de 2<sup>e</sup> espèce* ou *fonction de Neumann*  $N_\nu(x)$  est définie par :

$$N_\nu(x) = \lim_{m \rightarrow \nu} \left( \frac{\cos(m\pi) J_m(x) - J_{-m}(x)}{\sin(m\pi)} \right) \quad (\text{A.54})$$

Les variations des premières fonctions de **Neumann** sont données sur la figure A.4. On peut montrer que :

$$N_\nu(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} x^{-\nu} \quad \text{et} \quad N_\nu(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln(x)$$

### A.5.3 Résolution de l'équation de Bessel

Pour résoudre l'équation de Bessel (A.50), on doit donc considérer deux cas :

1. Si  $\nu$  n'est pas entier, la solution  $F_\nu(x)$  est une combinaison linéaire de  $J_\nu(x)$  et  $J_{-\nu}(x)$  :

$$F_\nu(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x) \quad (\text{A.55})$$

2. Si  $\nu = n$  est entier,  $J_n(x)$  et  $J_n(-x)$  ne sont pas linéairement indépendants d'après (A.53). On peut montrer que la solution  $F_n(x)$  est alors une combinaison linéaire de  $J_n(x)$  et  $N_n(x)$  :

$$F_n(x) = C_1 J_n(x) + C_2 N_n(x) \quad (\text{A.56})$$

où les propriétés des  $J_\nu$  et  $N_n$  sont données au paragraphe précédent.

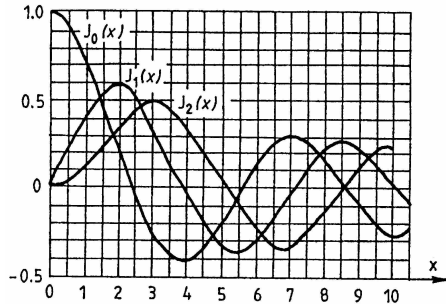


FIGURE A.3 – Les trois premières fonctions de Bessel  $J_n(x)$ . Noter que ces fonctions sont toutes toujours bornées.

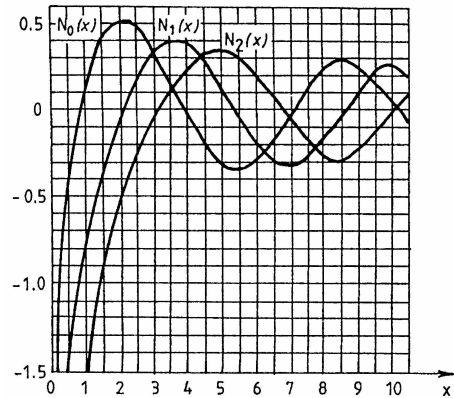


FIGURE A.4 – Les trois premières fonctions de Neumann  $N_n(x)$ . Noter la divergence pour  $x \rightarrow 0$ .

## A.6 Quelques notions sur l'analyse de Fourier

Ce paragraphe est uniquement qualitatif et ne prétend pas à la moindre rigueur mathématique. Se reporter à un cours spécialisé pour des démonstrations rigoureuses (voir par exemple [7, Tome 2 - Annexe B]).

### A.6.1 Coefficients de Fourier

On considère une fonction  $f(t)$  périodique de période  $T$ . On pose  $\omega_1 = 2\pi/T$ . Sous certaines conditions mathématiques assez peu restrictives en physique,  $f$  peut s'écrire, avec  $n$  entier :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(i\omega_n t) \quad \text{avec} \quad \omega_n = n\omega_1 \quad (\text{A.57})$$

L'équation (A.57) définit une *série de Fourier* dont les coefficients  $c_n$  se calculent selon :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(-i\omega_n t) dt \quad (\text{A.58})$$

L'ensemble des modules des coefficients  $c_n$  est appelé le *spectre de Fourier* de  $f$  (figure A.5).

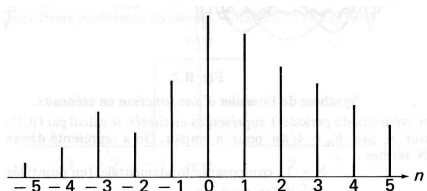


FIGURE A.5 – Exemple de spectre de Fourier.

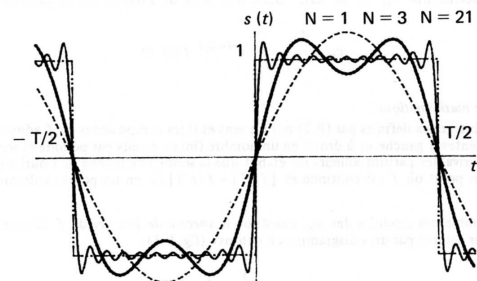


FIGURE A.6 – Superposition des harmoniques de la fonction créneau jusqu'à  $N = 3$  (trait épais) et  $N = 21$  (trait fin). Le fondamental est représenté en pointillés.

Si la fonction  $f$  est réelle, les coefficients  $c_n$  vérifient  $c_{-n} = c_n^*$ . On peut alors réécrire (A.57) sous la forme :

$$f(t) = a_{n=1} + \sum_0^{+\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \quad \text{avec} \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (\text{A.59})$$

$a_0$  représente simplement la moyenne de la fonction  $f$ . Pour  $n \geq 1$ , les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  sont donnés par :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_n t) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega_n t) dt \quad (\text{A.60})$$

Ces relations montrent que le spectre d'un signal périodique est un *spectre de raie* : à chaque valeur de  $n$  correspond une *harmonique (de rang  $n$ )*. L'harmonique de rang 1 est le *mode fondamental*. La figure A.6 représente la superposition de divers harmoniques d'une fonction en créneaux. Au fur et à mesure que le nombre d'harmoniques utilisées croît, la fonction se rapproche de plus en plus de la fonction originelle.

## A.6.2 Transformations de Fourier

On considère une fonction  $s(t)$  qui n'est pas forcément périodique. Sous certaines conditions mathématiques peut restrictives en physique, on montre que  $s(t)$  peut s'exprimer sous forme d'une *intégrale de Fourier* :

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \exp(i\omega t) dt \quad \text{avec} \quad S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (\text{A.61})$$

Les fonctions  $s(t)$  et  $S(\omega)$  sont les *transformées de Fourier* l'une de l'autre. Ces relations montrent que le spectre d'un signal continu est en général continu. L'intégrale de Fourier (A.61) est l'homologue, pour une fonction quelconque, du développement en série de Fourier donné par (A.57) pour une fonction périodique. La fonction  $S(\omega)$  ne fait que traduire le poids relatif des diverses pulsations.

### Exemple d'une fonction créneau

On considère la fonction créneau définie par  $s(t) = 1$  pour  $-\tau < t < \tau$ , 0 sinon (figure A.7). Sa transformée de Fourier est représentée sur la figure A.7 et vaut :

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau}^{+\tau} s(t) \exp(-i\omega t) dt = \frac{2\tau}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(X)}{X} \quad \text{avec} \quad X = \omega\tau \quad (\text{A.62})$$

On appelle *sinus cardinal* la fonction  $\sin(x)/x$  dont la forme caractéristique est à retenir.

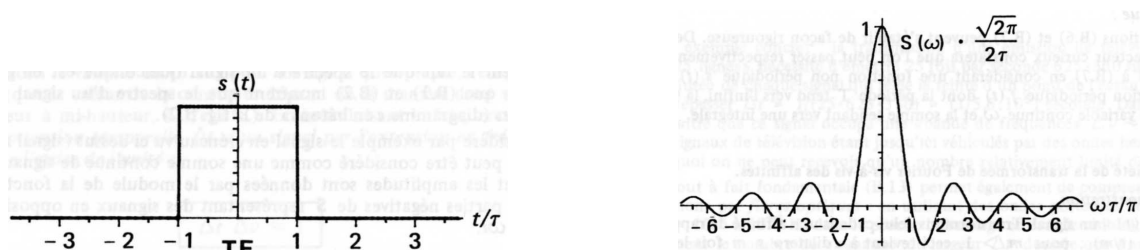


FIGURE A.7 – Fonction créneau (à gauche) et sa transformée de Fourier normalisée (à droite).

### Exemple d'une fonction sinusoïdale limitée

On considère la fonction définie par  $s(t) = \cos(\omega_0 t)$  pour  $-\tau < t < \tau$ , 0 sinon (figure A.8). Sa transformée de Fourier vaut :

$$S(\omega) = \frac{2\tau}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\sin[(\omega + \omega_0)\tau]}{(\omega + \omega_0)\tau} + \frac{\sin[(\omega - \omega_0)\tau]}{(\omega - \omega_0)\tau} \right) \quad (\text{A.63})$$

et est représentée sur la figure A.8. Dans un large domaine de pulsation, elle peut être considérée comme la somme de deux sinus cardinaux centrés sur  $\pm\omega_0$ .

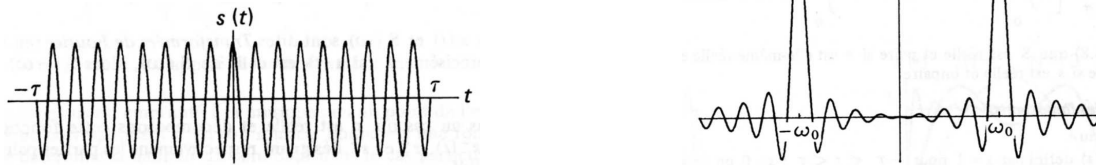


FIGURE A.8 – Fonction sinusoïdale limitée (à gauche) et sa transformée de Fourier (à droite).

### A.6.3 Extension du signal et largeur de son spectre

On considère la fonction créneau. Il est "naturel" au vu de la figure A.7 de définir son extension temporelle par  $\Delta t = 2\tau$  et l'extension spectrale de sa transformée de Fourier par  $\Delta\omega \approx \pi/\tau$ . On a alors :

$$\Delta\omega \Delta t \approx 2\pi \quad \text{ou} \quad \Delta\nu \Delta t \approx 1 \quad (\text{A.64})$$

en introduisant le spectre en fréquence  $\nu = \omega/(2\pi)$ . On admettra que (A.64) est généralisable pour un signal quelconque.

## Annexe B

# Electromagnétisme hors système MKSA

Dans les ouvrages français modernes, l'électromagnétisme est présentée à l'aide du système MKSA (Mètres - Kelvin - Seconde - Ampère) de 1946. Il est basé sur sept unités de base, toutes décimales, sauf pour le temps et les angles. Officiellement, ce système est utilisé dans le monde entier. Dans ce cours, on l'utilisera systématiquement.

Néanmoins, dans certains cas, on utilise encore parfois le système CGS (Centimètre - Gramme - Seconde) introduit en 1874 :

- En spectroscopie infrarouge ou UV, l'unité la plus couramment utilisée est le  $\text{cm}^{-1}$ .
- Dans la classification périodique des éléments, les unités sont en g/mol (et non en kg/mol).
- En astrophysique, les flux s'expriment souvent en  $\text{erg/s/cm}^2/\text{Hz}$ .
- etc..

Le système CGS n'est plus utilisé en électromagnétisme que dans certains ouvrages anglo-saxons. On présente dans ce paragraphe un petit formulaire permettant de s'y retrouver. Pour rationaliser les différents systèmes, on introduit généralement un coefficient  $\kappa$  tel que :

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = \kappa^2 \quad (\text{B.1})$$

Dans le système MKSA on a évidemment :

$$\kappa = 1 \quad 4\pi\epsilon_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \quad \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \quad (\text{B.2})$$

alors que dans le système CGS on a :

$$\kappa = c \quad 4\pi\epsilon_0 = 1 \quad \frac{\mu_0}{4\pi} = 1 \quad (\text{B.3})$$

On peut alors écrire la force de **Lorentz** (1.61) sous la forme :

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{\kappa} \times \vec{B} \right) \quad (\text{B.4})$$

tandis que les équations de **Maxwell** (1.6) deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{libre}}{\epsilon_0} \quad (\text{MG}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{M}\Phi) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{MF}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{\kappa} \vec{J}_{libre} + \frac{1}{\kappa c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{MA}) \end{array} \right. \quad (\text{B.5})$$

---

Les relations (1.12) et (1.13) entre les champs et les potentiels s'écrivent :

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}(\Phi) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

En jauge de **Lorenz** (1.18) :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\kappa} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.7})$$

les équations de propagation des potentiels (1.19) s'écrivent :

$$\begin{cases} \Delta \Phi - \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\kappa^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Delta \vec{A} - \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\kappa^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mu_0}{\kappa} \vec{J} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

dont la solution (*potentiels retardés*) (1.30) est de la forme :

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(t-r/c)}{r} d\tau \quad \text{et} \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi\kappa} \iiint \frac{\vec{J}(t-r/c)}{r} d\tau \quad (\text{B.9})$$

On en déduit alors les expressions des lois de **Coulomb** (2.2) :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho \vec{r}}{r^3} d\tau = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (\text{B.10})$$

et de **Biot et Savart** (3.12) :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi\kappa} \iiint \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^3} d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi\kappa} \int \frac{I d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3} \quad (\text{B.11})$$



Première partie

**Théorie électromagnétique dans le  
vide**



# Chapitre 1

## Electromagnétisme & équations de Maxwell

### Sommaire

---

1.1	Distributions de charge et de courant . . . . .	19
1.2	Equations de Maxwell dans le vide . . . . .	21
1.3	Potentiels en électromagnétisme . . . . .	24
1.4	Champ électromagnétique . . . . .	28
1.5	Régimes particuliers de l'électromagnétisme . . . . .	33
1.6	Invariances et symétries du champ électromagnétique . . . . .	35
1.7	Relations de continuité du champ électromagnétique . . . . .	39

---

### Introduction

L'électricité et le magnétisme étaient considérés comme des phénomènes physiques sans lien entre eux jusqu'à leur association avec la théorisation de l'électromagnétisme par **Maxwell** au 19<sup>e</sup> siècle. Ce chapitre part directement des équations de **Maxwell** pour étudier le champ électromagnétique dans toute sa généralité. Il s'achève par des rappels sur les symétries et les conditions aux limites auxquelles est soumis le champ électromagnétique.

### 1.1 Distributions de charge et de courant

#### 1.1.1 La charge électrique

Diverses expériences ont montré que la charge n'était pas uniformément répartie dans tout l'espace mais localisée en quelques sites (par exemple l'expérience de diffusion de **Rutherford** décrite dans [11, page 654]), tandis que d'autres ont montré que la charge électrique de tout système à l'état libre était quantifiée (par exemple l'expérience de **Millikan** décrite dans [9, page 26]).

Suite aux travaux de **Franklin**, on classe les charges électriques en trois familles : *positives*, *négatives* ou *neutres*.

#### 1.1.2 Choix de l'élément de volume - Grandeurs nivelées

Pour avoir un sens, la densité volumique de charge  $\rho = \Delta Q / \Delta V$  ne doit pas dépendre de la forme exacte du volume  $\Delta V$  qui contient la charge  $\Delta Q$  et doit être raisonnablement constante si on déplace "légèrement" le volume d'intégration. Pour des raisons de commodité, on prend souvent une sphère de centre  $M$  et de rayon

$R$  pour évaluer la densité volumique  $\rho$  en  $M$ . D'un côté, le rayon  $R$  doit être grand à l'échelle atomique pour pouvoir contenir un grand nombre de charges, ce qui implique  $R \gg 1 \text{ \AA}$ . De l'autre, il doit être petit à l'échelle microscopique. Comme le meilleur état de surface actuellement réalisable est de l'ordre du micron, on doit avoir  $R \ll 1 \mu\text{m}$ . Finalement,  $R$  doit valoir approximativement 100 à 1000  $\text{\AA}$ .

Or le champ à la surface d'une sphère de rayon 100  $\text{\AA}$  contenant une unique charge élémentaire en son centre vaut  $1,5 \cdot 10^7 \text{ V/m}$ . C'est-à-dire que l'existence d'une charge en plus ou en moins dans la sphère de rayon  $R$  modifie considérablement le champ électrique, ce qui est incompatible avec l'hypothèse du début de ce paragraphe de constance du résultat en déplaçant "légèrement" la sphère.

Ceci montre qu'on ne doit pas procéder ainsi mais *niveler* la densité volumique de charges en remplaçant la "vraie" variation  $\rho_{vrai}$  par une grandeur débarrassée de toutes les fluctuations spatiales. On remplace donc une charge quasi ponctuelle centrée sur  $M$  (cf Figure 1.1) par une distribution continue  $\rho_{niv}$  de même intégrale centrée sur  $M$  mais s'étalant sur 100 à 1000  $\text{\AA}$ . La forme de la fonction de distribution  $\rho_{niv}$  n'a pas d'importance, il suffit qu'elle soit continue et étalée sur  $(100 \text{ \AA})^3$  à  $(1000 \text{ \AA})^3$ .

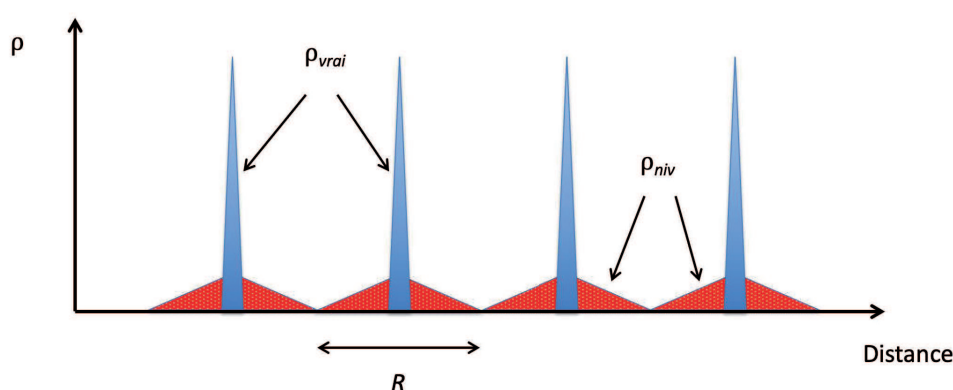


FIGURE 1.1 – On remplace la densité volumique  $\rho_{vrai}$  assimilable à une fonction de Dirac par une fonction nivelée  $\rho_{niv}$  de même intégrale dont l'extension spatiale  $R$  est de l'ordre de 100 à 1000  $\text{\AA}$  (voir texte).

L'utilisation d'une sphère pour moyenner les grandeurs microscopiques n'est pas entièrement satisfaisante. On pourrait montrer qu'il est préférable d'utiliser une *fonction de nivellement* continue, centrée en  $\vec{r}$  et à symétrie sphérique. La distance caractéristique sur laquelle cette fonction est non nulle est une distance mésoscopique de 0,3 à 1  $\text{\AA}$ . La fonction  $f$  doit vérifier :

$$\iiint_{\text{Espace}} f(\vec{r}) dV = 1 \quad (1.1)$$

Par exemple, une charge ponctuelle  $q_i$  en un point  $\vec{r}_i$  est remplacée par la fonction continue  $\rho_i = q_i f(\vec{r} - \vec{r}_i)$  et la densité volumique de charge  $\rho$  nivelée est donnée par :

$$\rho = \sum_i q_i f(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (1.2)$$

où la sommation s'effectue sur toutes les charges du système. La forme de la fonction  $f$  fait que dans la pratique, seules les charges qui se trouvent proche de  $\vec{r}$  apportent une contribution effective à  $\rho$ .

On procède de même pour les autres grandeurs que l'on souhaite niveler :  $\sigma$ ,  $\vec{J}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ , ...

### 1.1.3 Equation de continuité

Une constatation expérimentale, jamais remise en question, est que la charge totale d'un système isolé se conserve. En notant  $Q$  la charge totale contenue dans un volume ( $V$ ) et  $q$  la charge totale sortant du volume pendant l'intervalle de temps  $dt$ , ceci s'écrit :

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{dq}{dt} = 0$$

Comme on a :

$$\begin{cases} Q = \iiint_{(V)} \rho dV & \text{soit} & \frac{dQ}{dt} = \iiint_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \\ \frac{dq}{dt} = I = \iint_{(\Sigma)} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV \end{cases}$$

en utilisant (A.2.4) pour la première expression et (A.22) pour la seconde. On en déduit :

$$\iiint_{(V)} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \right) dV = 0$$

dont on déduit l'équation de continuité ou équation de conservation de la charge totale :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (1.3)$$

Cette relation signifie simplement qu'une diminution au cours du temps de la charge totale contenue dans un petit volume correspond à un flux de charges sortant à travers la surface délimitant ce volume.

Dans le cas particulier où les charges sont mobiles mais où leur densité volumique  $\rho$  reste constante au cours du temps, l'équation de continuité est simplement :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (1.4)$$

On dit alors qu'il s'agit d'un régime *permanent* ou *stationnaire*. La densité de courant  $\vec{J}$  est alors à *flux conservatif*. Si en plus  $\vec{J}$  est constant, on aura un *courant continu*.

**Remarque :** Lorsqu'il existe plusieurs types de porteurs de charges  $\alpha$ , on peut observer de la *création de paires* ou de la *recombinaison* :

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_\alpha = \sigma_\alpha \quad \text{avec} \quad \sigma_\alpha \neq 0 \quad (1.5)$$

La conservation de la charge totale s'écrit alors  $\sum_\alpha \sigma_\alpha = 0$ .

## 1.2 Equations de Maxwell dans le vide

Il y a deux façons d'introduire l'électromagnétisme et les équations de **Maxwell** :

1. On peut les démontrer à partir du principe de moindre action (voir le Complément D.1).
2. On peut les déduire des propriétés des champs statiques (électrostatique et magnétostatique). C'est l'approche suivie par **Maxwell**.

Dans ce cours, on commencera par introduire les équations de **Maxwell** directement, avant de revenir vers les domaines statiques.

### 1.2.1 Equations de Maxwell

En notant  $\rho(\vec{r}, t)$  et  $\vec{J}(\vec{r}, t)$  les densités respectives de charges et de courants volumiques, la forme locale des équations de **Maxwell** dans le vide s'écrit en fonction des champs  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  et  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{Maxwell - Gauss ou (MG)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \text{Conservation du flux magnétique ou (M}\Phi) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{Maxwell - Faraday ou (MF)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{Maxwell - Ampère ou (MA)} \end{array} \right. \quad (1.6)$$

---

en fonction des deux constantes universelles  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  F/m (*permittivité diélectrique du vide*) et  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m (*perméabilité magnétique du vide*).

**Remarque 1 :** Il est important de noter que l'expression *dans le vide* signifie en fait *dans un milieu suffisamment dilué pour que la matrice qui permet le transport des charges n'ait pas d'influence à part celle de maintenir des charges en place*. Il est bien évident qu'il faut un milieu pour que les distributions de charges n'explorent pas..

**Remarque 2 :** (MG) et (MA) traduisent le lien entre le champ et ses sources, mais ne sont pas suffisants pour calculer le champ à partir de ses sources (voir le *théorème d'Helmholtz* - § A.2.3), tandis que (MF) et (MΦ) traduisent les propriétés intrinsèques du champ.

**Remarque 3 :** On admettra que la solution des équations de **Maxwell** est unique à  $\rho$  et  $\vec{J}$  données.

**Remarque 4 :** (MΦ) est parfois appelée *équation de Maxwell-Thomson*.

**Remarque 5 :** Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont couplés par les équations de **Maxwell** et forment le *champ électromagnétique*.

**Remarque 6 :** L'ensemble formé par les équations de **Maxwell** et de la force de **Lorentz**  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  forme l'*électromagnétisme*.

**Remarque 7 :** L'équation de continuité (1.3) est implicitement comprise dans les équations de **Maxwell** (on s'en est servi pour les construire..). Pour s'en convaincre, il suffit de prendre la divergence de (MA) et d'y inclure (MG).

**Remarque 8 :** Les équations de **Maxwell** étant linéaires, on peut additionner les effets de plusieurs sources. Attention toutefois au phénomène d'*influence*, qui apparaît lorsque les charges sont déplacées par le champ (§ 6.2.2).

**Remarque 9 :** Les équations de **Maxwell** n'ont jamais mises en défaut au niveau macroscopique.

## 1.2.2 Formes intégrales

Il est parfois utile d'exprimer les équations de **Maxwell** (1.6) sous forme intégrale. Leur utilisation est parfois commode (en cas de symétries par exemple). Elle est quasiment indispensable lorsqu'on modélise un champ rapidement variable (dans l'espace ou le temps) par un champ présentant des discontinuités. Certaines dérivées partielles deviennent infinies et les équations locales sont alors inutilisables, tandis que les formes intégrales restent valables.

### Théorème de Gauss

On note  $\rho$  la densité volumique de charge contenue à l'intérieur d'un volume ( $V$ ), séparé du milieu extérieur par une surface ( $S$ ). L'intégrale sur ( $V$ ) donne la charge totale  $Q_{int}$ . En utilisant le théorème de la divergence (A.22), il est immédiat que (MG) entraîne :

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \quad \text{d'où} \quad \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (1.7)$$

La 2<sup>e</sup> équation est la *forme intégrale de la loi de Gauss*.

---

## Théorème d'Ampère

En utilisant le théorème de **Stokes** (A.23) sur un contour ( $\mathcal{C}$ ) s'appuyant sur une surface ouverte ( $\Sigma$ ), la circulation de  $\vec{B}$  le long de ( $\mathcal{C}$ ) permet d'écrire :

$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(\Sigma)} \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{(\Sigma)} \left( \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_{(\Sigma)} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \iint_{(\Sigma)} \vec{J}_d \cdot d\vec{S}$$

où :

$$I = \iint_{(\Sigma)} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \text{et} \quad I_d = \iint_{(\Sigma)} \vec{J}_d \cdot d\vec{S} \quad \text{avec} \quad \vec{J}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.8)$$

où  $\vec{J}_d$  est par définition la *densité volumique de courant de déplacement*. Le *théorème d'Ampère généralisé* s'écrit alors :

$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (I + I_d) \quad (1.9)$$

**Remarque 1 :** Le courant de déplacement est un courant fictif qui ne correspond à aucun déplacement.

**Remarque 2 :** Seul le courant total  $I + I_d$  a un sens physique. Pris individuellement  $I$  et  $I_d$  n'en ont pas.

## Conservation du flux magnétique

En utilisant le théorème de la divergence (A.22), il est immédiat que  $(\mathbf{M}\Phi)$  entraîne :

$$\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1.10)$$

qui est la *forme intégrale de la conservation du flux magnétique*.

## Loi de Faraday

En utilisant le théorème de **Stokes** (A.23) sur un contour ( $\mathcal{C}$ ) s'appuyant sur une surface ouverte ( $\Sigma$ ), la circulation de  $\vec{E}$  le long de ( $\mathcal{C}$ ) permet d'écrire :

$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(\Sigma)} \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \iint_{(\Sigma)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \left( \iint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) = - \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = - \frac{d\Phi_B}{dt} = e$$

où  $\Phi_B$  est le flux de  $\vec{B}$  traversant la surface ( $\Sigma$ ) et  $e$  la *force électromotrice* (la justification de la dernière égalité sera donnée au chapitre 4). On en déduit la *forme intégrale de la loi de Maxwell-Faraday* :

$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = e \quad (1.11)$$

### 1.2.3 Changements de référentiels et électromagnétisme

On note  $(\mathcal{R})$  et  $(\mathcal{R}')$  deux référentiels galiléens en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse  $\vec{u}$  l'un par rapport à l'autre. La physique classique utilise la transformation de Galilée pour passer de  $(\mathcal{R})$  à  $(\mathcal{R}')$ . Dans le Complément D.2, on montre qu'en fait ceci n'apporte que des résultats paradoxaux et inacceptables en électromagnétisme. Il faut utiliser la relativité restreinte pour traiter correctement les changements de référentiels en électromagnétisme, mais cela sort du cadre de ce cours (voir votre cours de relativité).

---

## 1.3 Potentiels en électromagnétisme

Jusqu'à présent, on a parlé d'électromagnétisme en terme de *champs*. Il est parfois plus pratique d'aborder cette théorie par le biais de *potentiels* :

1. On va montrer au § 1.3.2 que les deux formulations sont équivalentes et au § 1.3.3 que la résolution des équations de **Maxwell** se fait simplement à l'aide de potentiels.
2. Les potentiels, qui n'ont pas de sens physique en théorie classique, en acquièrent un dès que la mécanique quantique entre en jeu : l'électrodynamique quantique est basée sur les potentiels (et non les champs).

### 1.3.1 Définition des potentiels

Les potentiels utilisés en électromagnétisme découlent de la forme des équations de **Maxwell** :

1. Si  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , alors d'après § A.1.1, il existe au moins un champ vectoriel  $\vec{A}$  tel que :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (1.12)$$

où  $\vec{A}$  est le *potentiel vecteur* et s'exprime en tesla-mètre (T.m) ou Volt-seconde/mètre (Vs/m).

2. En introduisant cette relation dans (MF), alors d'après § A.1.1, il existe au moins un champ scalaire  $\Phi$  tel que :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}(\Phi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.13)$$

où  $\Phi$  est le *potentiel scalaire* et s'exprime en volt (V).

### 1.3.2 Invariances de jauge

On montre dans ce paragraphe qu'il est parfois plus simple d'introduire des potentiels que de résoudre directement les équations de **Maxwell**, qui sont des équations couplées du 1<sup>er</sup> ordre. On obtient alors moins d'équations, mais d'un ordre plus élevé.

#### Jauge de Lorenz

Il est évident que les définitions (1.12) et (1.13) des potentiels satisfont par construction les équations (MΦ) et de (MF). On montre facilement que (MG) entraîne alors :

$$\Delta \Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.14)$$

tandis que (MA) permet d'écrire :

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J} \quad (1.15)$$

Le champ  $\vec{B}$  reste inchangé par la transformation qui introduit un autre potentiel vecteur  $\vec{A}'$  tel que :

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}(\Lambda) \quad (1.16)$$

où  $\Lambda$  est une fonction scalaire quelconque. Pour que  $\vec{E}$  donné par (1.13) reste inchangé, il faut que  $\Phi$  se transforme simultanément en  $\Phi'$  vérifiant :

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (1.17)$$



On admettra que la liberté de choix offerte par (1.16) et (1.17) permet de choisir  $\vec{A}$  et  $\Phi$  tels que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (1.18)$$

et que l'on peut toujours trouver des potentiels  $\vec{A}$  et  $\Phi$  qui satisfont cette condition. La relation (1.18) permettant de fixer de manière univoque les potentiels est connue sous le nom de *condition de Lorenz* ou *condition de jauge de Lorenz*. En combinant cette relation avec (1.14) et (1.15), on obtient ainsi deux équations découplées qui sont équivalentes aux équations de **Maxwell** :

$$\begin{cases} \Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \square \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \square \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \end{cases} \quad (1.19)$$

en utilisant un nouvel opérateur, le d'Alembertien, définit par<sup>1</sup> :

$$\square \equiv \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (1.20)$$

L'ensemble des deux transformations (1.16) et (1.17) s'appelle une *transformation de jauge*, tandis que l'invariance des champs sous une telle transformation s'appelle une *invariance de jauge*.

**Remarque 1** : Si  $\vec{A}$  et  $\Phi$  vérifient la condition de **Lorenz**, alors la *transformation de jauge restreinte* ( $\vec{A} \rightarrow \vec{A}'$  et  $\Phi \rightarrow \Phi'$ ) permet d'écrire :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \Delta \Phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

soit :

$$\Delta \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \square \Lambda = 0 \quad (1.21)$$

Toute fonction  $\Lambda$  respectant (1.21) permettra de satisfaire la condition de **Lorenz**. Les potentiels de cette classe restreinte constituent la *jauge de Lorenz*. Cette jauge est couramment utilisée en électromagnétisme. Elle conduit à un traitement identique pour le potentiel scalaire  $\Phi$  et le potentiel vecteur  $\vec{A}$  (1.19).

**Remarque 2** : En prenant la convention d'annuler les potentiels à l'infini ( $\Phi(\infty) \equiv 0$  et  $\vec{A}(\infty) \equiv \vec{0}$ ), le couple  $(\Phi, \vec{A})$  est déterminé de manière unique (voir chapitres 2 et 3).

## Jauge de Coulomb

Il existe une autre jauge utilisée pour les phénomènes statiques :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (1.22)$$

C'est la *jauge de Coulomb*. En l'utilisant, les relations très générales (1.14) et (1.15) peuvent s'écrire :

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad (1.23)$$

Ces relations sont connues sous le nom d'*équations de Poisson*<sup>2</sup>. La première relation montre que dans cette jauge, le potentiel scalaire vérifie l'équation de **Poisson** (d'où son nom de *jauge de Coulomb*). La solution de ces deux équations est simplement le potentiel de **Coulomb** instantané dû à  $\rho$  et le potentiel vecteur instantané dû à  $\vec{J}$  :

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{Espace} \frac{\rho(P)}{PM} d^3P \quad \text{et} \quad \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{Espace} \frac{\vec{J}(P)}{PM} d^3P \quad (1.24)$$

1. Attention, certains auteurs définissent parfois le d'Alembertien par  $\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$  ..

2. On parle généralement d'*équations de Poisson* pour le cas statique (1.23) et d'*équations de propagation des potentiels* pour le cas dynamique (1.19).

**Remarque 1 :** En régime statique, les conditions de jauge de **Lorenz** (1.18) et de **Coulomb** (1.22) sont équivalentes.

**Remarque 2 :** La jauge de **Coulomb** est également utilisée lorsqu'il n'y a pas de source. C'est par exemple le cas en optique, où l'on a :

$$\Phi = 0 \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

### Remarque sur la causalité

La relation (1.24) indique que  $\Phi$  et  $\vec{A}$  se propagent instantanément, alors que les relations (1.19) indiquent que  $\vec{A}$  et  $\Phi$  se propagent à la vitesse  $c$ . Les domaines d'application de ces relations seront donc différents.

## 1.3.3 Solution des équations d'onde inhomogènes : potentiels retardés

### Position du problème

Pour obtenir les potentiels  $\Phi$  et  $\vec{A}$  observés au point  $P$ , il faut donc résoudre d'après (1.19) quatre équations de la forme :

$$\square \Psi(\vec{r}_P, t) = -f(\vec{R}, t) \quad (1.25)$$

où l'on a repris les notations de la Figure 1.2 :  $\vec{r}_P$  est la position (fixe) de l'observateur,  $t$  est le temps d'observation en  $P$  et  $\vec{R}$  est la position de la charge  $q$  (ou du volume mésoscopique qui caractérise la densité volumique de charge) se déplaçant sur une trajectoire quelconque.

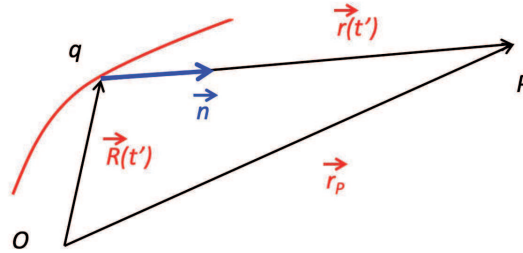


FIGURE 1.2 – Un observateur en  $P$  reçoit à l'instant  $t$  le rayonnement émis à l'instant antérieur  $t'$  en  $\vec{R}(t')$  par la charge  $q$ .

D'après le 2<sup>e</sup> principe de la relativité, le rayonnement reçu à l'instant  $t$  à la position  $\vec{r}_P$  est émis à l'instant antérieur  $t'$  à la position  $\vec{R}(t')$  qui décrit le mouvement de la charge  $q$  (cf Figure 1.2). On a simplement :

$$\vec{R}(t') + \vec{r}(t') = \vec{r}_P \quad (1.26)$$

La vitesse de la charge  $q$  est donnée par :

$$\vec{v}(t') = \vec{\beta}(t') c = \frac{d\vec{R}(t')}{dt'} \quad (1.27)$$

On considérera ici que l'observateur  $P$  est toujours immobile. En différentiant (1.26), on obtient :

$$\frac{d\vec{r}(t')}{dt'} = -\vec{v}(t') \quad (1.28)$$

La différence entre les temps  $t$  et  $t'$  représente le temps nécessaire pour que le rayonnement parcoure la distance  $r$  qui sépare les points d'émission et de réception. On a donc :

$$t - t' = \frac{r(t')}{c} \quad (1.29)$$

La résolution rigoureuse dans le cas général de (1.25) est délicate à cause des outils mathématiques nécessaires, basés sur les fonctions de **Green**. Les étudiants intéressés pourront trouver plus de détails dans le Complément D.3.

### Potentiels retardés

On montre finalement que dans l'espace libre sans condition aux limites :

$$\begin{cases} \Phi(\vec{r}_P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{R}, t')}{r} d^3\vec{R} \\ \vec{A}(\vec{r}_P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{R}, t')}{r} d^3\vec{R} \end{cases} \quad (1.30)$$

avec  $t' = t - r/c$  et  $r = \|\vec{r}_P - \vec{R}\|$ . Ces deux équations représentent les *potentiels retardés* exprimés en jauge de **Lorenz**. C'est la solution des équations de **Maxwell** qui inclut la causalité.

### 1.3.4 Application au cas d'une charge unique

L'application de (1.30) à une charge unique en mouvement n'est pas triviale puisqu'il a fallu 30 ans pour le faire! De nos jours, à l'aide de la théorie des distributions, on peut résoudre le problème facilement. Le calcul est développé dans le Complément D.3. On obtient finalement l'expression des *potentiels de Liénard-Wiechert* :

$$\begin{cases} \Phi(\vec{r}_P, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \right]_{ret} \\ \vec{A}(\vec{r}_P, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[ \frac{\vec{\beta}}{r(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \right]_{ret} \end{cases} \quad (1.31)$$

où les crochets doivent être évalués au temps retardé  $t' = t - r/c$ .

### 1.3.5 Expression de la force de Lorentz à l'aide des potentiels

On peut exprimer la force de **Lorentz**  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  à l'aide des potentiels  $\Phi$  et  $\vec{A}$ . On obtient :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q \left[ -\vec{\nabla}(\Phi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right]$$

D'après (A.7)<sup>3</sup>, on peut écrire que  $\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) = \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$ , soit encore :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -q \left[ \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{\nabla}(\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) \right]$$

En utilisant (A.46) appliqué à  $\vec{A}$ , on déduit ici que<sup>4</sup> :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$$

soit finalement :

$$\frac{d(\vec{p} + q\vec{A})}{dt} = -\vec{\nabla} \left( -q(\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) \right) \quad (1.32)$$

3. La vitesse  $\vec{v}$  est éventuellement une fonction du temps, mais pas de la position, ce qui fait que  $\vec{\nabla} \times \vec{v} \equiv 0$  et  $(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \equiv 0$ .

4. Cette expression signifie physiquement que la variation de  $\vec{A}$  a deux origines : une variation dans le temps (le 1<sup>er</sup> terme) et une variation due au déplacement de la particule dans l'espace (le 2<sup>e</sup> terme).

Un lecteur attentif aura reconnu dans cette dernière équation une équation connue de la mécanique<sup>5</sup>, où le rôle de la quantité de mouvement  $\vec{p}$  est joué par la *quantité de mouvement généralisée*  $\vec{P}_{canonique}$  et où celui de l'énergie potentielle  $U$  est pris par la quantité  $U_{vel}$  (dépendant de la vitesse) avec :

$$\vec{P}_{canonique} = \vec{p} + q \vec{A} \quad \text{et} \quad U_{vel} = q(\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) \quad (1.33)$$

On peut montrer une équation analogue à (1.32) pour l'évolution de l'énergie de la particule :

$$\frac{d(T + q\Phi)}{dt} = \frac{\partial (q(\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A}))}{\partial t} \quad (1.34)$$

où  $T = 1/2 \times m v^2$  est l'énergie cinétique et  $q\Phi$  l'énergie potentielle.

Les relations (1.32) et (1.34) font toutes les deux intervenir  $U_{vel}$ . Le parallèle entre ces deux équations incite à interpréter  $\vec{A}$  comme une *quantité de mouvement potentielle par unité de charge* tout comme  $\Phi$  est une *énergie potentielle par unité de charge*. Voir votre cours de relativité pour plus de détails.

## 1.4 Champ électromagnétique

On va voir dans ce paragraphe que le champ électromagnétique peut porter de l'énergie, de la quantité de mouvement et du moment cinétique.

### 1.4.1 Energie du champ électromagnétique

#### Localisation de l'énergie

Les deux expériences schématisées sur la Figure 1.3 permettent de mettre en évidence le fait que l'énergie se propage dans le vide, ce qui implique la nécessité de pouvoir faire un bilan local de l'énergie.



FIGURE 1.3 – Ces deux expériences mettent en évidence la propagation de l'énergie dans le vide, en l'absence de support matériel.

#### Puissance cédée par le champ à des charges

On suppose qu'il existe à l'instant  $t$  des distributions de charge  $\rho$  et de courant  $\vec{J}$  qui créent les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ . On cherche à déterminer quel est le travail  $dW$  effectué par la force électromagnétique sur ces charges pendant l'intervalle de temps  $dt$ . Pour cela, on évalue le travail  $dW$  effectué pendant l'intervalle de temps  $dt$  sur une charge  $q$  par la force de **Lorentz** :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = q\vec{E} \cdot \vec{v} dt \quad (1.35)$$

5. Le déplacement d'une particule matérielle de quantité de mouvement  $\vec{p}$  et d'énergie potentielle  $U$  vérifie :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\vec{\nabla} U$$

En intégrant (1.35) et en passant à la limite des courants continus,  $q \rightarrow \rho dV$  et  $\rho \vec{v} \rightarrow \vec{J}$ . Le taux auquel ce travail est effectué sur les charges du milieu se met donc sous la forme :

$$\frac{dW}{dt} = \iiint_{(V)} \vec{E} \cdot \vec{J} dV \quad (1.36)$$

Une autre façon de dire la même chose est que la puissance volumique cédée par le champ aux charges vaut :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dV} = \vec{J} \cdot \vec{E} \quad (1.37)$$

### Identité et théorème de Poynting

On part des formes suivantes de (MF) et (MA) :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$$

En multipliant scalairement la 1<sup>re</sup> équation par  $\vec{B}$  et en lui soustrayant la 2<sup>e</sup> multipliée par  $\vec{E}$ , on obtient :

$$\left( \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right) + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu_0 \vec{J} \cdot \vec{E}$$

D'après (A.9), on reconnaît  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$  dans le 1<sup>er</sup> terme, tandis que  $\vec{B} \cdot \partial \vec{B} / \partial t$  et  $\vec{E} \cdot \partial \vec{E} / \partial t$  s'écrivent respectivement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B^2}{2} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E^2}{2} \right)$$

Finalement, on obtient l'*identité de Poynting* :

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = -\vec{J} \cdot \vec{E} \quad (1.38)$$

En utilisant (1.36), on en déduit que le taux auquel le travail est effectué sur les charges du milieu se met sous la forme :

$$\iiint_{(V)} \vec{E} \cdot \vec{J} dV = - \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right) dV - \frac{d}{dt} \left[ \iiint_{(V)} \left( \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) dV \right]$$

ou encore :

$$\iiint_{(V)} \vec{E} \cdot \vec{J} dV = - \oint_{(S)} \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{S} - \frac{d}{dt} \left[ \iiint_{(V)} \left( \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) dV \right] \quad (1.39)$$

Dans cette expression, l'intégrale surfacique :

$$\oint_{(S)} \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{S}$$

représente le taux auquel l'énergie s'écoule à travers la surface ( $S$ ) tandis que la deuxième intégrale :

$$\frac{d}{dt} \left[ \iiint_{(V)} \left( \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) dV \right]$$

représente l'énergie totale stockée dans le champ électromagnétique. L'expression (1.39) est connue sous le nom de *théorème de Poynting* qui stipule que :

*Le travail effectué sur les charges du milieu par la force électromagnétique est égal à la perte d'énergie de l'énergie stockée dans le champ électromagnétique auquel on soustrait l'énergie qui passe à travers la surface de séparation avec le milieu extérieur*

On note :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \quad (1.40)$$

$\vec{R}$  est appelé le *vecteur de Poynting*. Cette définition du vecteur de **Poynting**, obtenue pour une surface fermée, sera étendue à toute surface ouverte et on stipulera que  $\vec{R} \cdot d\vec{S}$  est l'énergie par unité de temps qui traverse toute surface ( $\Sigma$ ), qu'elle soit élémentaire ou non.

On retiendra la forme compacte du *théorème de Poynting* :

$$\iiint_{(V)} \vec{E} \cdot \vec{J} dV = - \oint_{(S)} \vec{R} \cdot d\vec{S} - \frac{d}{dt} \left[ \iiint_{(V)} u dV \right] \quad (1.41)$$

### Relation locale de conservation de l'énergie

On note  $u$  la densité volumique d'énergie électromagnétique au sein d'un volume ( $V$ ),  $\vec{R}$  le flux d'énergie par unité de surface à travers la surface ( $S$ ) qui sépare le volume ( $V$ ) du milieu extérieur et  $\sigma$  la densité volumique d'énergie perdue par le champ électromagnétique. La variation  $d\mathcal{E}$  de l'énergie électromagnétique pendant  $dt$  peut se mettre sous la forme :

$$d\mathcal{E} = \iint_{(S)} (-\vec{R} dt) \cdot d\vec{S} - \left( \iiint_{(V)} \sigma dV \right) dt \quad \text{soit} \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \iint_{(S)} \vec{R} \cdot d\vec{S} + \iiint_{(V)} \sigma dV = 0 \quad (1.42)$$

En utilisant (A.29) pour transformer le 1<sup>er</sup> terme de cette dernière relation et le théorème d'**Ostrogradski** pour écrire le 2<sup>e</sup>, on obtient :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \iiint_{(V)} u dV \right) = \iiint_{(V)} \frac{\partial u}{\partial t} dV \quad \text{et} \quad \iint_{(S)} \vec{R} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{R}) dV$$

Finalement, on peut réécrire (1.42) sous la forme :

$$\iiint_{(V)} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{R} + \sigma \right) dV = 0$$

Comme ceci est valable pour tout volume de contrôle ( $V$ ), on en déduit l'*équation locale de conservation de l'énergie* :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{R} + \sigma = 0 \quad (1.43)$$

En identifiant avec (1.39), il semble naturel de poser :

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad \sigma = \vec{J} \cdot \vec{E} \quad \vec{R} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \quad (1.44)$$

**Remarque 1** : La densité volumique  $u$  généralise les densités obtenues en électrostatique et magnétostatique.

**Remarque 2** : L'expression (1.44) de  $\vec{R}$  est la plus simple pour obtenir  $\vec{R}$  à partir de (1.39). En fait, des considérations relativistes font que la définition utilisée est unique.

## 1.4.2 Quantité de mouvement du champ électromagnétique

### Problème de l'action instantanée à distance

On peut voir sur l'exemple de la Figure 1.4 que la force exercée par la particule (1) sur la particule (2) n'est pas l'opposée de la force exercée par la particule (2) sur la particule (1). Cela signifie que la somme des deux quantités de mouvement  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$  n'est pas constante. On va montrer dans la suite de ce paragraphe que la loi de conservation de la quantité de mouvement s'applique à  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_{champ}$  où  $\vec{p}_{champ}$  est la quantité de mouvement associée au champ électromagnétique.

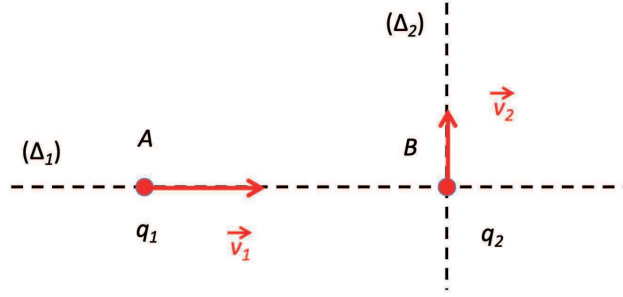


FIGURE 1.4 – Dans cette configuration où les axes  $(\Delta_1)$  et  $(\Delta_2)$  sont orthogonaux, la force exercée par la particule (2) sur la particule (1) n'est pas l'opposée de celle exercée par la particule (1) sur la particule (2) - Voir texte.

### Expression de la force en fonction des champs

La force  $\vec{F}$  totale qui s'exerce sur les charges contenues dans un volume  $(V)$  se met sous la forme :

$$\vec{F} = \iiint_{(V)} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \rho dV = \iiint_{(V)} (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) dV \quad (1.45)$$

On peut en déduire une expression de la force volumique  $\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$ . L'idée est d'exprimer  $\vec{f}$  uniquement en fonction des champs, en éliminant  $\rho$  et  $\vec{J}$  dans (1.45) à l'aide des équations de **Maxwell**. D'après (MG) et (MA), on peut écrire :

$$\vec{f} = \epsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \times \vec{B} \quad (1.46)$$

Comme on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) = \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} \right) + \left( \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

(MF) permet d'en déduire que :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

Finalement,  $\vec{f}$  peut se mettre sous la forme :

$$\vec{f} = \epsilon_0 \left[ (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right] - \frac{1}{\mu_0} \left[ \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B})$$

Comme on a toujours  $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B} \equiv 0$ , on peut symétriser les deux premiers termes en écrivant :

$$\vec{f} = \epsilon_0 \left[ (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[ (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B} - \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (1.47)$$

D'après (A.7), on a :

$$\vec{\nabla}(E^2) = 2 \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + 2(\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \quad \text{soit} \quad \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \frac{1}{2} \vec{\nabla}(E^2) - (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$$

De la même manière, on peut écrire pour  $\vec{B}$  :

$$\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{1}{2} \vec{\nabla}(B^2) - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

Ces deux expressions permettent de réécrire (1.47) sous la forme :

$$\vec{f} = \epsilon_0 \left[ (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[ (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \right] - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (1.48)$$

---

## Tenseur des contraintes de Maxwell

Cette expression peut se simplifier en utilisant le *tenseur des contraintes de Maxwell*<sup>6</sup>. Les neuf composantes  $T_{ij}$  de ce tenseur  $\overline{\overline{T}}$  sont par définition :

$$T_{ij} \equiv \epsilon_0 \left( E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right) \quad (1.49)$$

où les indices  $i$  et  $j$  prennent toutes les valeurs  $x, y$  ou  $z$ . Le *symbole de Kronecker*  $\delta_{ij}$  vaut 1 si les deux indices  $i$  et  $j$  sont égaux, 0 sinon. Après quelques calculs, on pourrait montrer que les neuf composantes du tenseur des contraintes se mettent sous la forme :

$$\begin{aligned} T_{xx} &= \frac{1}{2} \epsilon_0 (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \frac{1}{2\mu_0} (B_x^2 - B_y^2 - B_z^2) & T_{xy} &= \epsilon_0 (E_x E_y) + (B_x B_y)/\mu_0 & T_{yx} &= T_{xy} \\ T_{yy} &= \frac{1}{2} \epsilon_0 (E_y^2 - E_x^2 - E_z^2) + \frac{1}{2\mu_0} (B_y^2 - B_x^2 - B_z^2) & T_{xz} &= \epsilon_0 (E_x E_z) + (B_x B_z)/\mu_0 & T_{zx} &= T_{xz} \\ T_{zz} &= \frac{1}{2} \epsilon_0 (E_z^2 - E_x^2 - E_y^2) + \frac{1}{2\mu_0} (B_z^2 - B_x^2 - B_y^2) & T_{yz} &= \epsilon_0 (E_y E_z) + (B_y B_z)/\mu_0 & T_{zy} &= T_{yz} \end{aligned}$$

La divergence de ce tenseur s'obtient en considérant les propriétés du produit scalaire sur les tenseurs<sup>7</sup>. On en déduit que :

$$\left( \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}} \right)_j = \epsilon_0 \left( (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) E_j + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) E_j - \frac{1}{2} \vec{\nabla}_j E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) B_j + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) B_j - \frac{1}{2} \vec{\nabla}_j B^2 \right) \quad (1.50)$$

En utilisant le tenseur des contraintes  $\overline{\overline{T}}$ , la force volumique (1.48) peut finalement se mettre sous la forme plus compacte :

$$\vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} \quad (1.51)$$

où  $\vec{R}$  est le vecteur de **Poynting** (1.40). La force totale  $\vec{F}$  qui s'exerce sur les charges contenues dans le volume ( $V$ ) devient :

$$\vec{F} = \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}} dV - \epsilon_0 \mu_0 \iiint_{(V)} \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} dV$$

En utilisant le théorème de la divergence (A.22) et (A.29), on obtient finalement :

$$\vec{F} = \oint_{(S)} \overline{\overline{T}} \cdot d\vec{S} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \left( \iiint_{(V)} \vec{R} dV \right) \quad (1.52)$$

Physiquement,  $\overline{\overline{T}}$  est la force par unité de surface (ie la pression) qui agit sur la surface. Plus précisément,  $T_{ij}$  est la force par unité de surface dans la 1<sup>e</sup> direction qui agit sur un élément de surface orienté dans la  $j^e$  direction, les éléments diagonaux ( $T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}$ ) étant les pressions et les éléments hors diagonale les forces de cisaillement.

## Conservation de la quantité de mouvement

La 2<sup>e</sup> loi de Newton  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$  permet d'écrire (1.52) sous la forme :

$$\frac{d\vec{p}_{meca}}{dt} = \oint_{(S)} \overline{\overline{T}} \cdot d\vec{S} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \left( \iiint_{(V)} \vec{R} dV \right) \quad (1.53)$$

---

6. Dans la formulation relativiste de l'électromagnétisme, le tenseur des contraintes de **Maxwell** sera vu comme la composante électromagnétique du tenseur énergie-impulsion. Voir votre cours de relativité restreinte.

7. Comme  $\overline{\overline{T}}$  est caractérisé par deux indices, on peut écrire de deux façons différentes son produit scalaire avec un vecteur quelconque  $\vec{A}$ . Le résultat de l'opération est un vecteur dont les coordonnées sont :

$$\left( \vec{A} \cdot \overline{\overline{T}} \right)_j = \sum_{i=x,y,z} A_i T_{ij} \quad \text{ou} \quad \left( \overline{\overline{T}} \cdot \vec{A} \right)_j = \sum_{i=x,y,z} T_{ij} A_i$$



où  $\vec{p}_{meca}$  est la quantité de mouvement des particules contenues dans le volume ( $V$ ). Cette expression est identique à celle du théorème de **Poynting** (1.41) et invite donc à une interprétation identique : le premier terme correspond à une quantité de mouvement par unité de temps qui traverse la surface ( $S$ ) (attention au signe!) tandis que le deuxième terme correspond à une quantité de mouvement  $\vec{p}$  stockée dans le champ électromagnétique :

$$\vec{p} = \epsilon_0 \mu_0 \iiint_{(V)} \vec{R} dV \quad (1.54)$$

La relation (1.53) ne fait que traduire la conservation de la quantité de mouvement : toute variation de la quantité de mouvement mécanique est compensée soit par une variation de la quantité de mouvement stockée dans le champ, soit par un transfert de quantité de mouvement à travers la surface.

D'après (1.54), la densité volumique  $\vec{g}$  de quantité de mouvement du champ s'écrit :

$$\vec{g} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{R} = \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{\vec{R}}{c^2} \quad (1.55)$$

Si la quantité de mouvement mécanique  $\vec{p}_{meca}$  ne varie pas (par exemple si on se situe dans une région de l'espace qui est vide de charges), (1.53) s'écrit :

$$\oint_{(S)} \vec{T} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot \vec{T} dV = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \left( \iiint_{(V)} \vec{R} dV \right)$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{T} = \vec{0} \quad (1.56)$$

Cette équation est une équation de continuité pour la quantité de mouvement électromagnétique, semblable à l'équation de conservation de la charge totale (1.3), où  $\vec{g}$  joue rôle de  $\rho$  et où  $-\vec{\nabla} \cdot \vec{T}$  joue le rôle de  $\vec{J}$ . C'est la *forme locale de la conservation de la quantité de mouvement du champ électromagnétique*.

### 1.4.3 Moment cinétique du champ électromagnétique

De la même manière qu'on a associé de l'énergie et de la quantité de mouvement au champ électromagnétique, il est logique de lui attribuer également un moment cinétique. On pourrait montrer, par des calculs plus laborieux, que la densité volumique  $\vec{\ell}$  de moment cinétique du champ électromagnétique s'écrit :

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{g} = \epsilon_0 \left( \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) \right) \quad (1.57)$$

Les lois de conservation du moment cinétique doivent alors prendre en compte le moment cinétique du champ, en sus de celui des particules chargées contenues dans le champ.

Comme pour la quantité de mouvement, on observe que même des champs statiques portent du moment cinétique, dès lors que  $\vec{E} \times \vec{B}$  est non nul.

### 1.4.4 Conclusion sur le champ électromagnétique

En électromagnétisme, on ne doit pas parler de *la force que deux charges exercent l'une sur l'autre*, mais de *la force qu'une charge subit dans le champ créé par l'autre*.

Le champ  $\vec{E}$  est une perturbation qui remplit l'espace tout entier. Elle se propage depuis sa source dans toutes les directions à la vitesse finie  $c$  et permet d'expliquer le phénomène de la propagation (et des retards). Une seule charge suffit pour générer un champ  $\vec{E}$  dans tout l'espace. La force n'apparaît qu'ensuite, à l'aide d'une *charge d'essai* située en un autre point.

## 1.5 Régimes particuliers de l'électromagnétisme

Le seul *régime statique* au sens strict correspond à l'électrostatique (chapitre 2) où aucune charge n'est en mouvement.

### 1.5.1 Régime permanent

On appelle *régime permanent* le régime pour lequel les variations temporelles des termes sources du champ sont nulles. Le couplage entre  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  disparaît alors et les équations de **Maxwell** (1.6) s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{Maxwell – Gauss ou (MG)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \text{Conservation du flux magnétique ou (M}\Phi) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} & \text{Maxwell – Faraday ou (MF)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} & \text{Maxwell – Ampère ou (MA)} \end{array} \right. \quad (1.58)$$

Dans ce cas, il est possible de séparer l'électromagnétisme en deux branches :

1. l'étude du champ électrique permanent  $\vec{E}(\vec{r})$  ayant pour source  $\rho(\vec{r})$ .
2. l'étude du champ magnétique permanent  $\vec{B}(\vec{r})$  ayant pour source  $\vec{J}(\vec{r})$ .

**Remarque :** On peut noter que l'étude des champs magnétiques permanent est la *magnétostatique*, tandis que l'étude des champs électriques permanent n'est pas l'*électrostatique*.

### 1.5.2 Approximation des régimes quasi stationnaires

Cette *Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS)* consiste à calculer les champs à partir des potentiels  $\Phi$  et  $\vec{A}$  mais néglige les retards, ie utilise les potentiels instantanés en régime non permanent. Cela revient à négliger  $1/c^2 \times \partial \vec{E} / \partial t$  dans les équations de **Maxwell**, donc à négliger l'influence de la propagation. Les équations de **Maxwell** s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{Maxwell – Gauss ou (MG)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \text{Conservation du flux magnétique ou (M}\Phi) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{Maxwell – Faraday ou (MF)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} & \text{Maxwell – Ampère ou (MA)} \end{array} \right. \quad (1.59)$$

**Remarque 1 :** Le champ  $\vec{B}$  de l'ARQS vérifie les lois de la magnétostatique.

**Remarque 2 :** Le champ  $\vec{E}$  de l'ARQS n'est pas le champ électrique de l'électrostatique. Il en diffère par le terme  $-\partial \vec{A} / \partial t$  (qu'on appellera *champ électromoteur de Neumann* au chapitre § 4).

**Remarque 3 :** En prenant la divergence de (MA), on voit que l'intensité est conservative dans l'ARQS. C'est une propriété de base de l'électrocinétique.

**Remarque 4 :** Cette approximation est valide tant que le courant de déplacement est petit devant les deux autres termes de (MA), ie :

$$\left\| \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| \ll \left\| \vec{\nabla} \times \vec{B} \right\| \quad \text{et} \quad \left\| \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| \ll \left\| \mu_0 \vec{J} \right\| \quad (1.60)$$

Ces deux relations sont valides dans des domaines différents :

- Pour une onde électromagnétique dans le vide qui varie sur une distance caractéristique  $L$  et pendant un temps caractéristique  $\tau$ , la première condition de (1.60) signifie par exemple :

$$\left\| \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| \ll \left\| \vec{\nabla} \times \vec{B} \right\| \iff \frac{E}{c^2 \tau} \ll \frac{B}{L} \iff \frac{E L}{c^2 \tau B} \ll 1 \iff \frac{v_\phi L}{c^2 \tau} \ll 1$$

On verra au chapitre 10 que  $v_\phi = c$  pour des ondes électromagnétiques qui se propagent sans condition limite dans le vide. Cela signifie que les champs doivent varier rapidement dans l'espace ( $L$  petit) et rapidement en temps ( $\tau$  grand) pour respecter la condition  $L \ll c \tau$ .

- La seconde condition de (1.60) peut s'évaluer pour un conducteur ohmique pour lequel  $\vec{J} = \gamma \vec{E}$  :

$$\left\| \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| \ll \left\| \mu_0 \vec{J} \right\| \iff \frac{E}{c^2 \tau} = \frac{\epsilon_0 \mu_0 E}{\tau} \ll \mu_0 \gamma E$$

Le temps  $\tau$  doit être suffisamment grand pour respecter  $\epsilon_0 \ll \gamma \tau$ .

**Remarque 5 :** Le domaine de validité de l'ARQS correspond à des retards négligeables devant le temps caractéristique de l'évolution de la distribution. Pour un régime sinusoïdal, ceci signifie que la dimension du circuit est petite devant la longueur d'onde.

## 1.6 Invariances et symétries du champ électromagnétique

### 1.6.1 Principe de Curie

Les propriétés d'invariance et de symétrie du champ électromagnétique sont basées sur le *principe de Curie* (1894) qui reste valable tant que la solution du problème est unique :

*Si une cause présente une certaine symétrie (ou invariance), alors son effet aura la même symétrie (ou la même invariance), ou une symétrie supérieure.*

Appliqué à l'électromagnétisme, ceci implique que les éléments de symétrie ou d'antisymétrie des distributions de charge et de courant doivent se retrouver dans les champs et les potentiels. Le principe de **Curie** permet de dire que si un système possède un certain degré de symétrie, on peut déduire les effets créés par ce système en un point à partir des effets créés en un autre point à l'aide de six propriétés, valables aussi bien en régime statique qu'en régime variable, tant qu'on néglige le temps de propagation.

### 1.6.2 Invariances du champ électromagnétique

#### Invariance par translation

*Si un système est invariant dans toute translation parallèle à un axe, les effets sont indépendants des coordonnées de cet axe (propriété #1)*

#### Symétrie axiale

*Si un système est invariant dans toute rotation autour d'un axe donné, alors ses effets ne dépendent pas de l'angle qui définit la rotation (propriété #2)*

Par exemple, l'invariance d'une densité volumique de charge  $\rho$  par rapport à un axe  $Oz$  permet d'écrire en tout point  $M$  :

$$\Phi(M) = \Phi(r, z) \quad \text{et} \quad \vec{E}(M) = E_r(r, z) \vec{u}_r + E_\theta(r, z) \vec{u}_\theta + E_z(r, z) \vec{u}_z$$

#### Symétrie cylindrique

*Si un système est invariant par translation et rotation, ses effets ne dépendent que de la distance à l'axe de rotation (propriété #3)*

---

## Symétrie sphérique

Si un système est invariant dans toute rotation autour d'un point fixe, ses effets ne dépendent que de la distance à ce point (propriété #4)

### 1.6.3 Symétries du champ électromagnétique

#### Qu'est-ce que le *champ magnétique* ?

On peut introduire le champ magnétique à partir de l'action qu'il exerce sur une particule de charge  $q$ , c'est-à-dire à partir de la *force de Lorentz* :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.61)$$

On voit sur cette relation que, pour que la force  $\vec{F}$  soit une observable physique (puisque'elle est liée à l'énergie!), le champ  $\vec{B}$ , au contraire du champ  $\vec{E}$ , doit dépendre de la convention d'orientation de l'espace.

#### Une autre façon de voir la même chose

Expérimentalement, on montre que dans toute région de l'espace subissant l'influence de courants ou d'aimants permanents, la force  $d\vec{F}$  à laquelle est soumise un élément  $d\vec{\ell}$  de circuit parcouru par un courant  $I$  dépend linéairement de  $I d\vec{\ell}$ . On peut mathématiquement traduire ceci par :

$$\begin{pmatrix} dF_x \\ dF_y \\ dF_z \end{pmatrix} = (B) \begin{pmatrix} I d\ell_x \\ I d\ell_y \\ I d\ell_z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (B) = \begin{pmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.62)$$

On observe également que  $d\vec{F}$  et  $I d\vec{\ell}$  sont perpendiculaires, ce qui se traduit par  $dF_x I d\ell_x + dF_y I d\ell_y + dF_z I d\ell_z = 0$ . Comme ceci est valable pour toute longueur  $d\ell$ , on en déduit finalement que :

$$B_{xx} = B_{yy} = B_{zz} = 0 \quad B_{yx} = -B_{xy} \quad B_{xz} = -B_{zx} \quad B_{zy} = -B_{yz}$$

La matrice des coefficients de  $(B)$  définie par (1.62) est donc antisymétrique. Il suffit de trois quantités pour décrire l'action, sur l'élément de longueur  $d\vec{\ell}$ , du *champ magnétique*. On pose donc  $B_x = B_{yz}$ ,  $B_y = B_{zx}$  et  $B_z = B_{xy}$ , soit :

$$(B) = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.63)$$

On voit donc que même si la nécessité de le visualiser pousse à représenter le champ magnétique  $\vec{B}$  sous forme vectorielle ( $\vec{B} = B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y + B_z \vec{u}_z$ ), les trois coordonnées  $B_x$ ,  $B_y$  et  $B_z$  du champ magnétique sont en réalité les composantes d'un tenseur antisymétrique d'ordre deux<sup>8</sup>.

#### Représentation vectorielle de $\vec{E}$ et $\vec{B}$

On représente donc  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  par des vecteurs dans l'espace à trois dimensions, même si comme on vient de le voir, cette schématisation peut amener des confusions pour  $\vec{B}$ .

On appelle *parité* l'opération de symétrie par rapport à une origine  $O$ . Cette définition permet d'introduire deux types de "vecteurs" :

---

8. On appellera *tenseur* un tableau de coefficients traduisant des propriétés physiques, au contraire d'une *matrice* qui traduit simplement une variation linéaire entre diverses quantités. L'*ordre* d'un tenseur est le nombre d'indices matriciels nécessaires pour le décrire. Par exemple, la masse et toute autre quantité scalaire est un tenseur d'ordre 0, mais une force ou toute autre quantité vectorielle est un tenseur d'ordre 1.

1. un vecteur sera dit *polaire* ou *vrai vecteur* si  $\text{Parité}(\vec{V}) = -\vec{V}$ . Le champ électrique  $\vec{E}$ , le potentiel vecteur  $\vec{A}$ , la densité volumique de courant  $\vec{J}$ , le vecteur position  $\vec{r}$ , la vitesse  $\vec{v}$ , la force de **Lorentz**  $\vec{F}$ , etc .. sont des vecteurs polaires.
2. un vecteur sera dit *axial* ou *pseudo-vecteur* si  $\text{Parité}(\vec{V}) = \vec{V}$ . Comme le produit vectoriel de deux vecteurs polaires est un vecteur axial, le champ magnétique  $\vec{B}$  est un vecteur axial car la force magnétique  $q\vec{v} \times \vec{B}$  s'écrit alors comme le produit de deux vecteurs polaires.

Le principe de **Curie** permet de dire que *si un système admet un plan de symétrie, alors en tout point de ce plan, un effet vectoriel est contenu dans ce plan tandis qu'un effet axial est perpendiculaire à ce plan* (propriété #5).

De manière symétrique, on peut montrer que *si un système admet un plan d'antisymétrie, alors en tout point de ce plan, un effet vectoriel est perpendiculaire à ce plan tandis qu'un effet axial est contenu dans ce plan* (propriété #6).

### Symétrie par rapport à un point

Si une distribution de charge possède un centre de symétrie,  $\vec{E}$  est nul en ce point, tandis que si une distribution de courant possède un centre de symétrie,  $\vec{B}$  est nul en ce point.

### Symétrie par rapport à un axe

Si une distribution de charge possède un axe de symétrie,  $\vec{E}$  est porté par cet axe, tandis que si une distribution de courant possède un axe de symétrie,  $\vec{B}$  est nul en tout point de celui-ci.

### Symétrie par rapport à un plan

On dira d'une distribution de charge qu'elle possède un *plan de symétrie* ( $\pi$ ) si deux éléments de volume symétriques par rapport à ce plan contiennent la même charge. On notera  $M'$  le symétrique de  $M$  par rapport au plan ( $\pi$ ) dans tout ce paragraphe. On peut montrer que l'on a (cf Figure 1.5) :

$$\begin{cases} \vec{E}_{//}(M') = \vec{E}_{//}(M) \\ \vec{E}_{\perp}(M') = -\vec{E}_{\perp}(M) \end{cases} \quad \text{et} \quad \Phi(M') = \Phi(M) \quad (1.64)$$

En particulier, si un point  $M$  appartient à un plan de symétrie de la distribution de charge, le champ électrique en  $M$  est contenu dans ce plan.

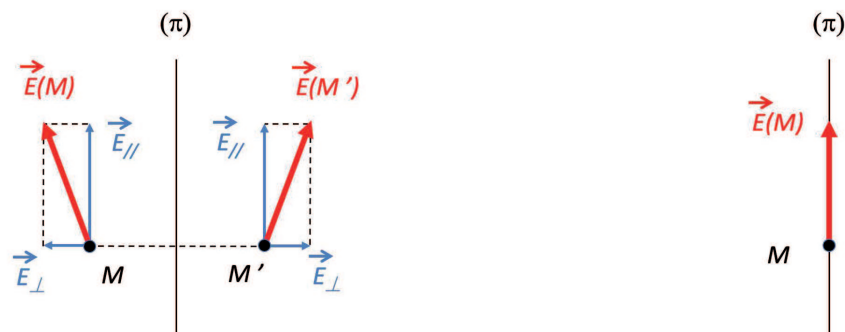


FIGURE 1.5 – Champ électrique d'une distribution de charge ayant un plan ( $\pi$ ) de symétrie : cas d'un point  $M$  situé en dehors du plan (à gauche) et d'un point  $M$  situé sur le plan (à droite).

De même, on dira d'une distribution de courant qu'elle possède un *plan de symétrie* ( $\pi$ ) si les courants volumiques  $\vec{J}$  en deux points  $P$  et  $P'$  symétriques par rapport à ce plan sont eux-mêmes symétriques :

$$\vec{J}_{\perp}(P') = -\vec{J}_{\perp}(P) \quad \text{et} \quad \vec{J}_{//}(P') = \vec{J}_{//}(P)$$

On peut montrer que l'on a (cf Figure 1.6) :

$$\begin{cases} \vec{B}_{//}(M') = -\vec{B}_{//}(M) \\ \vec{A}_{//}(M') = \vec{A}_{//}(M) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{B}_{\perp}(M') = \vec{B}_{\perp}(M) \\ \vec{A}_{\perp}(M') = -\vec{A}_{\perp}(M) \end{cases} \quad (1.65)$$

En particulier, si un point  $M$  appartient à un plan de symétrie de la distribution de courant, le champ magnétique en  $M$  est normal au plan tandis que le potentiel vecteur est contenu dans le plan.

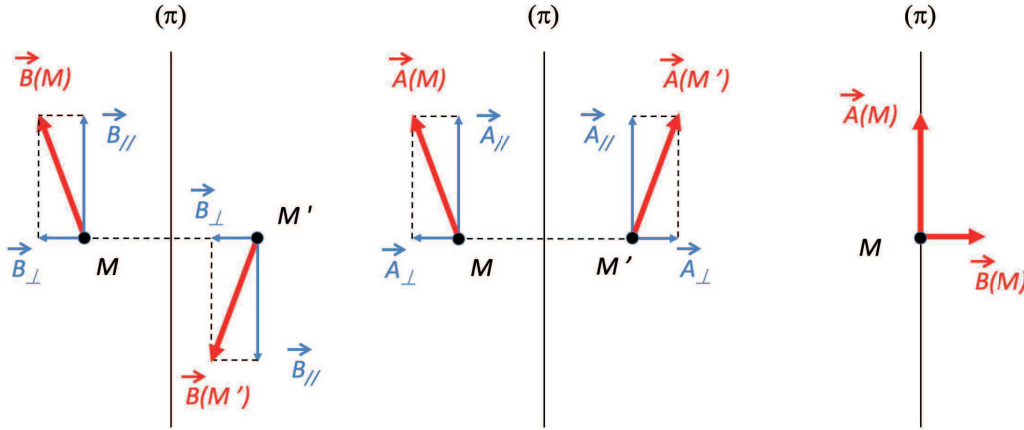


FIGURE 1.6 – Champ magnétique et potentiel vecteur d'une distribution de courant ayant un plan ( $\pi$ ) de symétrie : cas d'un point  $M$  situé en dehors du plan (à gauche et au centre) et d'un point  $M$  situé sur le plan (à droite).

### Cas des antisymétries

On peut aisément déduire du paragraphe précédent les propriétés de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dans une antisymétrie par rapport à un point, à un axe ou à un plan.

Par exemple, on dira d'une distribution de charge qu'elle possède un *plan d'antisymétrie* ( $\pi$ ) si deux éléments de volume symétriques par rapport à ce plan contiennent des charges opposées. Dans ce cas, on a (cf Figure 1.7) :

$$\begin{cases} \vec{E}_{//}(M') = -\vec{E}_{//}(M) \\ \vec{E}_{\perp}(M') = \vec{E}_{\perp}(M) \end{cases} \quad \text{et} \quad \Phi(M') = -\Phi(M) \quad (1.66)$$

En particulier, si un point  $M$  appartient à un plan d'antisymétrie de la distribution de charge, le champ électrique en  $M$  est normal à ce plan.

De même, on dira d'une distribution de courant qu'elle possède un *plan d'antisymétrie* ( $\pi$ ) si les courants volumiques  $\vec{J}$  en deux points  $P$  et  $P'$  symétriques par rapport à ce plan sont eux-mêmes antisymétriques, c'est-à-dire opposés à leur symétrique :

$$\vec{J}_{\perp}(P') = \vec{J}_{\perp}(P) \quad \text{et} \quad \vec{J}_{//}(P') = -\vec{J}_{//}(P)$$

On peut montrer que l'on a (cf Figure 1.8) :

$$\begin{cases} \vec{B}_{//}(M') = \vec{B}_{//}(M) \\ \vec{A}_{//}(M') = -\vec{A}_{//}(M) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{B}_{\perp}(M') = -\vec{B}_{\perp}(M) \\ \vec{A}_{\perp}(M') = \vec{A}_{\perp}(M) \end{cases} \quad (1.67)$$

En particulier, si un point  $M$  appartient à un plan de d'antisymétrie de la distribution de courant, le champ magnétique en  $M$  est contenu dans ce plan tandis que le potentiel vecteur est normal au plan.

Si une distribution de charge possède un axe d'antisymétrie,  $\vec{E}$  est perpendiculaire à cet axe, tandis que si une distribution de courant possède un axe d'antisymétrie,  $\vec{B}$  est porté par cet axe.

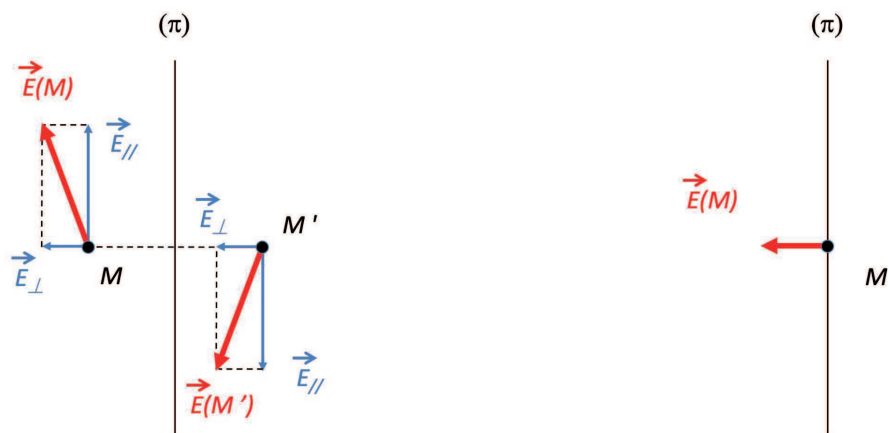


FIGURE 1.7 – Champ électrique d’une distribution de charge ayant un plan  $(\pi)$  d’antisymétrie : cas d’un point  $M$  situé en dehors du plan (à gauche) et d’un point  $M$  situé sur le plan (à droite).

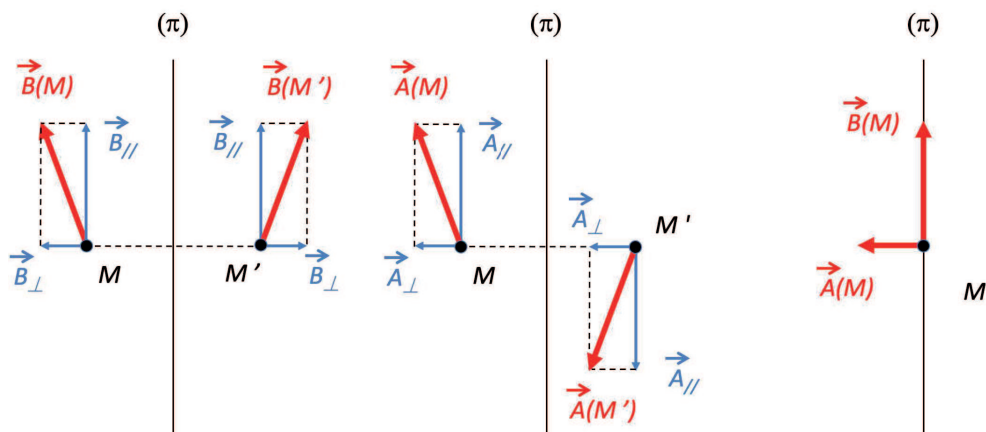


FIGURE 1.8 – Champ magnétique et potentiel vecteur d’une distribution de courant ayant un plan  $(\pi)$  d’antisymétrie : cas d’un point  $M$  situé en dehors du plan (à gauche et au centre) et d’un point  $M$  situé sur le plan (à droite).

## 1.7 Relations de continuité du champ électromagnétique

Les propriétés de continuité/discontinuité du champ électromagnétique dépendent de la nature des distributions et donc du modèle utilisé. Dans ce chapitre, on suppose des milieux caractérisés par  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$ . Le cas des milieux sera abordé aux chapitres 5 à 7.

Les relations obtenues dans ce paragraphe sont appelées selon les auteurs *relations de continuité* ou *relations de passage* du champ électromagnétique.

### 1.7.1 Modèles des densités ponctuelles, linéiques et volumiques

Pour traiter des problèmes de continuité du champ ou du potentiel, il faut garder à l’esprit qu’on sort du cadre de l’électromagnétisme classique lorsqu’on se rapproche ”trop” des charges car on doit alors prendre en compte des effets quantiques.

---

## Modèles de densités ponctuelles

Pour une densité de charges ponctuelles, on déduit des expressions du potentiel  $\Phi_{ponct}$  et du champ  $\vec{E}_{ponct}$  :

$$\Phi_{ponct}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{ponct}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i \quad (1.68)$$

qu'il existe des singularités au voisinage des charges, mais dans le cadre du modèle de l'électrostatique,  $\Phi$  et  $\vec{E}$  ne présentent aucune singularité mathématique dans un modèle de charges ponctuelles.

## Modèles de densités linéiques

Dans le cas d'un modèle linéique on aura :

$$\Phi_{lin}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad \text{et} \quad \vec{E}_{lin}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{u}_r \quad (1.69)$$

Le fil transporte le courant  $I$ . En appliquant le théorème d'Ampère sur un cercle centré sur le fil et de rayon  $a$ , on voit que :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{A}(M) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) \vec{u}_z \quad (1.70)$$

qui montrent que  $\vec{B}$  et  $\vec{A}$  présentent une singularité sur le fil mais rien en dehors de celui-ci.

## Modèles de densités volumiques

Par contre, dans le cas d'un modèle volumique, les équations de définition de  $\Phi_{vol}$  et du champ  $\vec{E}_{vol}$  s'écrivent :

$$\Delta\Phi_{vol} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}_{vol} = \vec{0} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{vol} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.71)$$

Elles indiquent que  $\Phi_{vol}$  et  $\vec{E}_{vol}$  sont définis (pas de singularité) et continus en tout point (car leurs dérivées partielles sont bornées).

L'expression du champ  $\vec{B}$  :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{J}(P) \times \overrightarrow{PM}}{PM^3} d^3P \quad (1.72)$$

indique que la seule singularité possible pour  $\vec{B}$  se situe en  $r = 0$ , soit lorsque  $P \rightarrow M$ . On considère un volume sphérique de rayon  $a$  centré autour d'un point  $M$  quelconque. On note  $J_m$  un majorant de la densité volumique de courant  $J$ . L'intégrale donnant la contribution de cette sphère à  $\vec{B}$  est majorée par :

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(r \leq a)} \frac{J_m}{r^2} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} J_m \int_0^a \frac{1}{r^2} 4\pi r^2 dr = \mu_0 J_m a \quad (1.73)$$

ce qui montre que  $\vec{B}$  doit être continu sur tout l'espace puisque cette majoration tend vers zéro avec  $a$ .

Le même calcul en partant de :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{J}(P)}{PM} d^3P \quad (1.74)$$

montre que  $\vec{A}$  est continu sur tout l'espace.

### 1.7.2 Modèle des densités surfaciques

Le cas des densités surfaciques est plus complexe.



## Discontinuité en physique et en mathématiques

On considère deux milieux (1) et (2) séparés par une surface ( $\Sigma$ ). Avec les notations de la Figure 1.9, une fonction  $F(x, y, z, t)$  est *discontinue en  $z$*  au point  $M$  si  $F_1 \neq F_2$  avec :

$$F_i = \lim_{M_i \rightarrow M} (F(x, y, z, t))$$

La *discontinuité* est mesurée par  $F_2 - F_1$ . Mathématiquement, la valeur de  $\partial F/\partial z$  n'est pas définie en  $M$ . En fait, en physique, il n'existe pas de discontinuité si brutale qu'on ne puisse la voir. La variation de  $F$  est simplement tellement rapide sur  $[M_1, M_2]$  que  $\partial F/\partial z$  est très élevée, mais reste finie, de même que :

$$F_2 - F_1 = \int_{M_1}^{M_2} \frac{\partial F}{\partial z} dz$$

puisque  $\partial F/\partial z$  a une valeur très élevée mais finie (cf Figure 1.10). Dans le cas d'une discontinuité en  $z$ , on supposera toujours que dans les autres dimensions ( $x, y$  et  $t$ ), la fonction  $F$  est continue. Par exemple :

$$\lim_{M_1 \rightarrow M_2} \left( \int_{M_1}^{M_2} \frac{\partial F}{\partial x} dx \right) = 0$$

On supposera également la même chose pour  $\partial F/\partial y$  et  $\partial F/\partial t$ . Dans la mesure où le rayon de courbure de la surface ( $\Sigma$ ) est grand devant les variations caractéristiques du phénomène étudié, on assimilera donc ( $\Sigma$ ) à son plan tangent pris pour  $z = 0$ .

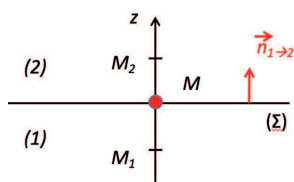


FIGURE 1.9 – La discontinuité d'une quantité  $F$  s'exprime par la différence  $F_2 - F_1$  évaluée dans les deux milieux (1) et (2).

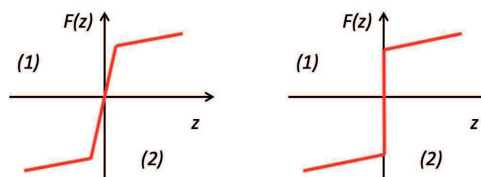


FIGURE 1.10 – Une variation rapide de  $\partial F/\partial z$  entre deux milieux (1) et (2) (à gauche) est assimilée à une discontinuité mathématique (à droite).

## Rappel de mécanique : choc pour un point matériel

On considère un point matériel dont l'évolution dans un référentiel galiléen se fait selon  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ . En intégrant cette relation, on obtient la variation de la quantité de mouvement  $\Delta\vec{p}$  :

$$\Delta\vec{p} = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \vec{F} dt \quad (1.75)$$

sur l'intervalle de temps  $[-\epsilon, +\epsilon]$ . Par définition, le *choc d'un point matériel* est caractérisé par la discontinuité de la quantité de mouvement ( $\Delta\vec{p} \neq 0$ ) obtenue lorsqu'on fait tendre  $\epsilon$  vers 0. Cette relation (1.75) montre que seule une force infinie est susceptible d'engendrer un choc (sinon, l'intégrale serait nulle).

Nous allons transposer à l'électromagnétisme ce principe du choc d'un point matériel en mécanique en faisant jouer dans (1.75) le rôle du temps  $t$  par la position  $z$  et le rôle de la force  $\vec{F}$  par les quatre équations de Maxwell.

## Composante normale de $\vec{E}$

Les champs  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  sont des fonctions de classe  $C^1$  mais ne sont pas définis sur la surface ( $\Sigma$ ). L'équation (MG) s'écrit localement :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

En utilisant le modèle du choc ci-dessus, on intègre cette relation sur l'épaisseur  $[-\epsilon, +\epsilon]$  qui correspond à une variation rapide de  $\rho$  :

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{\partial E_x}{\partial x} dz + \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{\partial E_y}{\partial y} dz + \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{\partial E_z}{\partial z} dz = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \rho(z) dz$$

Comme par hypothèse  $\partial E_x/\partial x$  et  $\partial E_y/\partial y$  sont bornées, la limite des deux premières intégrales en faisant tendre  $\epsilon$  vers 0 va s'annuler. Il reste alors dans cette limite :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{\partial E_z}{\partial z} dz \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \rho(z) dz \right)$$

Le terme de gauche devient :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{\partial E_z}{\partial z} dz \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (E_z(\epsilon) - E_z(-\epsilon)) = E_z(0^+) - E_z(0^-) = \Delta E_z$$

En définissant la *densité surfacique de charges*  $\sigma$  par :

$$\sigma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \rho(z) dz \right) \quad (1.76)$$

on obtient finalement la *relation de continuité* (ou de passage) pour la composante normale de  $\vec{E}$  à la traversée d'une surface chargée dans un modèle surfacique :

$$\Delta E_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{ou encore} \quad (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1.77)$$

### Composante tangentielle de $\vec{B}$

On choisit l'axe ( $Ox$ ) de façon à avoir localement  $\vec{J} = J \vec{u}_x$ . On considère (MA), en n'écrivant que les termes en  $\partial/\partial z$ , puisque les termes en  $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y$  et  $\partial/\partial t$  sont bornés sur la couche  $[-\epsilon, +\epsilon]$  donc le passage à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  va les faire disparaître. L'expression  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \partial \vec{E}/\partial t$  devient simplement :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} \approx \begin{vmatrix} 0 & & B_x & & -\partial B_y/\partial z & & J \\ & 0 & & B_y & & \partial B_x/\partial z & & \approx \mu_0 & 0 \\ & & \partial/\partial z & & B_z & & & & 0 \end{vmatrix} \quad (1.78)$$

En intégrant sur la couche  $[-\epsilon, +\epsilon]$ , le passage à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  de la projection de (1.78) sur ( $Ox$ ) donne :

$$-\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{\partial B_y}{\partial z} dz \right) = \mu_0 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} J(z) dz \right)$$

Le terme de gauche devient :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (-B_y(\epsilon) + B_y(-\epsilon)) = -B_y(0^+) - B_y(0^-) = -\Delta B_y$$

De manière analogue à (1.76), on peut définir la *densité superficielle de courant*  $\vec{K}$  portée par la surface ( $\Sigma$ ) selon :

$$\vec{K} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \vec{J} dz \right) \quad (1.79)$$

On obtient alors :

$$\Delta B_y = -\mu_0 K \quad (1.80)$$

Avec le même raisonnement, l'intégration sur la couche  $[-\epsilon, +\epsilon]$ , de la projection de (1.78) sur ( $Oy$ ) amènerait :

$$\Delta B_x = 0 \quad (1.81)$$

La *relation de continuité* (ou de passage) pour la composante tangentielle de  $\vec{B}$  à la traversée d'une surface portant une densité superficielle de courant  $\vec{K}$  s'écrit finalement :

$$\Delta B_x = 0 \quad \text{et} \quad \Delta B_y = -\mu_0 K \quad \text{ou encore} \quad (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = -\mu_0 \vec{K} \quad (1.82)$$

---

### Composante normale de $\vec{B}$

Formellement, on peut traiter (MΦ) de manière identique à (MG) en annulant le second membre de l'équation. Sans aucun calcul, on déduit donc de (1.77) la *relation de continuité* (ou *de passage*) pour la composante normale de  $\vec{B}$  à la traversée d'une surface portant une densité superficielle de charge :

$$\Delta B_z = 0 \quad \text{ou encore} \quad (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = 0 \quad (1.83)$$

### Composante tangentielle de $\vec{E}$

De la même manière, en comparant (MF) et (MA), on voit que le second membre de (MF) reste borné (il ne contient qu'un terme en  $\partial/\partial t$ ) et ne contient aucune source de discontinuité (comme  $\vec{J}$  dans (MA)). En transposant (1.80) et (1.81), on obtient donc sans calcul la *relation de continuité* (ou *de passage*) pour la composante tangentielle de  $\vec{E}$  à la traversée d'une surface chargée dans un modèle surfacique :

$$\Delta E_x = \Delta E_y = 0 \quad \text{ou encore} \quad (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0} \quad (1.84)$$

### Résumé

Finalement, en regroupant (1.77), (1.82), (1.83) et (1.84), on obtient les deux relations vectorielles :

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} = \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \\ \Delta \vec{B} = \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{K} \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \end{cases} \quad (1.85)$$

**Remarque 1 :** Ces relations sont valables pour les régimes non permanents et bien évidemment également pour les régimes permanents. La seule limitation serait pour les très hautes fréquences, où on ne peut plus négliger le temps de propagation sur le volume de test concerné, de part et d'autre de la surface ( $\Sigma$ ).

**Remarque 2 :** Il est important de souligner qu'en réalité (c'est-à-dire dans un modèle volumique), les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont continus de classe  $C^1$ . Les discontinuités données par (1.85) sont dues à l'approximation faite en négligeant l'épaisseur de la nappe chargée dans le modèle surfacique. Selon l'échelle à laquelle le phénomène est observé, on utilisera un modèle volumique (donc continu) ou surfacique (donc discontinu).

### Potentiel scalaire $\Phi$

Le potentiel scalaire  $\Phi$  est continu à la traversée d'une surface chargée.

### Potentiel vecteur $\vec{A}$

On considère un disque de rayon  $a$  centré autour d'un point  $M$  quelconque. On note  $J_m$  un majorant de la densité surfacique de courant  $J_S$ . L'intégrale donnant la contribution de ce disque à  $\vec{A}$  est majorée par :

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{(r \leq a)} \frac{J_m}{r} dS = \frac{\mu_0}{4\pi} J_m \int_0^a \frac{1}{r} 2\pi r dr = \frac{\mu_0}{2} J_m a \quad (1.86)$$

ce qui montre que  $\vec{A}$  doit être continu sur tout l'espace puisque cette majoration tend vers zéro avec  $a$ .



# Chapitre 2

## Electrostatique

### Sommaire

---

2.1	Loi de Coulomb, champs et potentiels en électrostatique . . . . .	46
2.2	Théorème de Gauss et équations de l'électrostatique . . . . .	53
2.3	Méthodes de calcul en électrostatique . . . . .	55
2.4	Aspects énergétiques liés à l'électrostatique . . . . .	59
2.5	Dipôles électrostatiques . . . . .	65

---

### Introduction

**Thales de Millet** remarque au 6<sup>e</sup> siècle avant JC que de l'ambre jaune, frottée, attire des brindilles de paille ou de l'oxyde de fer. C'est la première observation d'un effet lié à l'électrostatique. Les phénomènes électriques ont tout d'abord été qualitatifs, et n'ont pu être quantitatifs qu'avec l'invention de la pile électrique par **Volta** en 1800.

Pour les phénomènes ne dépendant pas du temps, la conservation de la charge totale (1.3) implique que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ , mais n'interdit pas  $\vec{J} = Cste \neq \vec{0}$ . L'*électrostatique* (ou *électrostatique du vide*) correspond à l'étude des charges immobiles ( $\vec{J} = \vec{0}$ ) dans le vide. Le cas où  $\vec{J} \neq \vec{0}$  correspond à l'*électrocinétique* et sera traité au chapitre 6. On abordera au chapitre 5 le cas de l'électrostatique dans les milieux.

Les observables physiques traitées dans ce chapitre sont donc indépendantes du temps, avec l'hypothèse supplémentaire que  $\vec{J} = \vec{0}$ .

**Remarque 1 :** Le domaine de validité de l'électrostatique s'étend jusqu'à l'infini pour les grandes dimensions. Dans le domaine microscopique, cette théorie cesse de s'appliquer dès qu'il faut prendre en compte les effets quantiques. On aborde alors l'électrodynamique quantique (*Quantum Electrodynamics* ou QED).

**Remarque 2 :** L'expérience montre qu'il existe deux types de phénomènes électriques :

1. L'électricité négative, obtenue par exemple avec de l'ambre frottée avec de la fourrure. Physiquement, ceci s'interprète comme un excès d'électrons.
2. L'électricité positive, obtenue par exemple avec du verre frotté avec de la soie. Physiquement, ceci s'interprète comme un défaut d'électrons.

et qu'on peut schématiquement répartir les corps en deux catégories :

1. Les *conducteurs* (métaux, électrolytes, etc...), sur lesquels de l'électricité peut se déplacer.
2. Les *isolants* (verre, soie, ébonite, etc...), sur lesquels de l'électricité ne peut pas se déplacer.

**Remarque 3 :** Enfin, il existe plusieurs façons de faire apparaître des charges sur un corps (ie de l'*électriser*) :

1. par frottement. Comme on vient de le voir, le signe des charges qui apparaissent est lié aux corps en présence.
2. par contact : en mettant en contact un corps avec un conducteur préalablement chargé, on peut faire passer les charges vers le corps qui se charge alors électriquement. Si ce corps est un isolant, les charges restent localisées près du point de contact.
3. par influence : cette propriété des conducteurs sera revue au chapitre 6.
4. par compression ou par chauffage. Ces deux phénomènes (appelés respectivement *piézoélectricité* et *pyroélectricité*) ne s'observent que sur certains corps très particuliers et seront abordés au chapitre 5.

## 2.1 Loi de Coulomb, champs et potentiels en électrostatique

### 2.1.1 Loi de Coulomb

La force d'interaction créée par une charge  $q_1$  (fixe) et s'exerçant sur une charge  $q_2$  (fixe) est donnée par la *loi de Coulomb* :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{1 \rightarrow 2}^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2} \quad (2.1)$$

où  $r_{1 \rightarrow 2}$  est la distance entre les deux charges et  $\vec{u}_{1 \rightarrow 2}$  un vecteur unitaire orienté de la charge (1) vers la charge (2). La constante  $\epsilon_0$  est la *permittivité diélectrique du vide* et vaut  $8,854 \cdot 10^{-12}$  F/m dans le système international<sup>1</sup>. Cette loi expérimentale est à la base de tout l'électrostatique.

**Remarque 1 :** La force est répulsive si les deux charges sont de même signe, attractive dans le cas contraire.

**Remarque 2 :** Comme on utilise des charges fixes, on est dans le cadre d'application du principe de l'action et de la réaction, c'est-à-dire que, en reprenant les notations précédentes, on a  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ .

**Remarque 3 :** Les ordres de grandeur mis en jeu par l'électrostatique sont inhabituels à notre échelle :

1. L'intensité de la force de **Coulomb** est considérable. Pour annuler la force de gravitation qui s'exerce entre la Terre et la Lune, il faudrait placer en leurs centres 330 kg d'électrons ( $m_e \approx 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg,  $m_{Terre} \approx 6 \cdot 10^{24}$  kg et  $m_{Lune} \approx 7,6 \cdot 10^{22}$  kg).
2. Un Coulomb représente une charge considérable : entre deux charges de 1 C placées à 1 m l'une de l'autre s'exerce une force capable de soulever un million de tonnes.

**Remarque 4 :** L'expérience ne montre que la proportionnalité entre la force et  $q_1 q_2 / r_{1 \rightarrow 2}^2$ . Le facteur  $1/4\pi\epsilon_0$  ne vient que du choix du système SI.

**Remarque 5 : Validité de la loi**

1. En fait, l'expérience ne vérifiait pas très bien la relation (2.1) car les corps électrisés utilisés pour la mesure ne sont pas réellement des charges ponctuelles (voir le Complément C.1.1 pour se faire une idée). C'est la raison pour laquelle certains auteurs utilisent l'expression *principe de Coulomb* en parlant de (2.1).
2. Par contre, de nos jours, il a été possible de tester cette loi de manière très précise. Pour cela, on cherche une valeur limite à un paramètre  $\epsilon$  en modélisant l'interaction entre deux charges par une loi en  $r^{-(2+\epsilon)}$ . L'expérience actuellement [11] fournit  $\epsilon < 10^{-16}$ .

**Remarque 6 : Ressemblance avec la force de gravitation**

1. La loi de **Coulomb** est en  $1/r^2$ , comme la loi de la gravitation. On trouvera donc une certaine similitude dans les méthodes de résolution des problèmes en électrostatique avec les méthodes connues de la mécanique.

1. On pourra retenir que  $1/(4\pi\epsilon_0) \approx 9 \times 10^9$  SI avec une très bonne approximation.

2. La loi de **Coulomb**  $\vec{F}_{elec(1\rightarrow2)}$  et la loi de la gravitation  $\vec{F}_{grav(1\rightarrow2)}$  sont toutes les deux de la forme :

$$\vec{F}_{elec(1\rightarrow2)} = q_2 \times \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{1\rightarrow2}^2} \right) \vec{u}_{1\rightarrow2} \quad \text{et} \quad \vec{F}_{grav(1\rightarrow2)} = m_2 \times \left( \frac{-G m_1}{r_{1\rightarrow2}^2} \right) \vec{u}_{1\rightarrow2}$$

où  $q_2$  est la *charge d'essai* pour la loi de **Coulomb** et  $m_2$  la *masse d'essai* pour la loi de la gravitation.

**Remarque 7 :** Pour une distribution de charges discrètes, le *principe de superposition* stipule que la force  $\vec{F}_i$  s'exerçant sur une charge  $i$  peut s'écrire comme la somme des forces  $\vec{F}_{j\rightarrow i}$  que chacune des charges  $j$  (autres que la charge  $i$ ) exerce sur la charge  $i$  :

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i}$$

Ceci permet de ramener l'étude des interactions électrostatiques au cas de deux charges ponctuelles et revient à dire que les équations de l'électrostatique doivent être linéaires. Attention toutefois au phénomène d'influence (§ 6.2.2).

## 2.1.2 Champ électrostatique

### Cas d'une charge ponctuelle

Le *champ électrostatique*  $\vec{E}(M)$  créé par la charge  $q$  situé en  $A$  en un point  $M$  s'obtient en considérant la force qui s'exercerait sur une charge  $q'$  située en  $M$ . Par définition, on pose  $\vec{F}_{q \rightarrow q'} = q' \vec{E}$  soit :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u} \quad (2.2)$$

où  $\vec{F}_{q \rightarrow q'}$  est la *force de Coulomb* qui s'exerce entre  $q$  et  $q'$  et  $\vec{u}$  le vecteur unitaire orienté de  $q$  vers  $M$ . Cette définition n'est donc valable que pour des charges  $q$  et  $q'$  fixes (puisque la loi de **Coulomb** ne s'applique que pour des charges fixes).



FIGURE 2.1 – Champ électrostatique  $\vec{E}$  exercé par une charge  $q$  située en  $M$ . Le champ est orienté selon  $\vec{u}$  si  $q > 0$ , en sens contraire si  $q < 0$ .

**Remarque :** La force qui s'exerce sur la particule (2) ne dépend pas du champ créé par la particule (2), mais uniquement du champ créé par la particule (1).

Par extension au cas des régimes variables, ce champ est souvent appelé *champ électrique* par abus de langage. La table 2.1 donne quelques ordres de grandeur de champs électrostatiques.

Dans un laser de puissance	1-2 10 <sup>10</sup> V/m
Lors d'un claquage dans l'air	10 <sup>6</sup> V/m
Dans la basse atmosphère	10 <sup>2</sup> V/m
A l'intérieur d'un conducteur en cuivre à l'équilibre	10 <sup>-2</sup> V/m

TABLE 2.1 – Quelques valeurs typiques de champs électrostatique (ou électriques).

## Cas d'une distribution de charges discrètes

Dans le cas d'une distribution de charges discrètes (cf Figure 2.2), le champ électrique s'exprimera, avec des notations évidentes, selon :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i \quad (2.3)$$

## Cas d'une distribution continue de charges

Dans le cas d'une distribution continue de charges (cf Figure 2.2), on considère le volume mésoscopique  $d^3P$  qui entoure le point  $P$  et qui contient la charge totale  $\delta q$ . On attribue par définition à ce volume la *densité volumique de charge*  $\rho(P)$  telle que :

$$\delta q = \rho(P) d^3P$$

En considérant (2.3) comme une somme de Riemann<sup>2</sup>, on obtient finalement l'expression du champ électrique :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(D)} \rho(P) \frac{\vec{PM}}{PM^3} d^3P \quad (2.4)$$

où  $\rho(P)$  est la densité volumique de charges (exprimée en C/m<sup>3</sup>) au point  $P$  et où l'intégrale est effectuée sur la distribution volumique de charges  $(D)$  décrite par le point courant  $P$ .

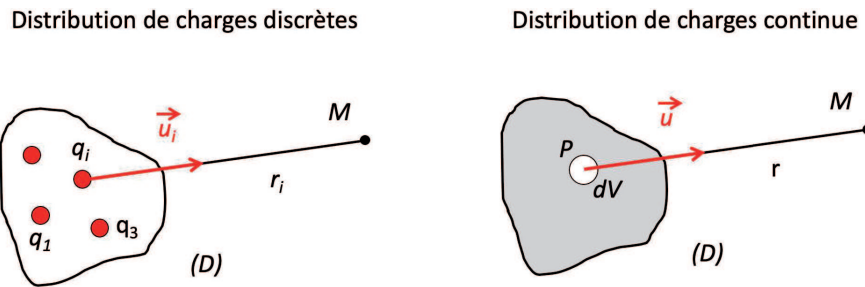


FIGURE 2.2 – Distribution de charges discrète (à gauche) ou continue (à droite).

**Remarque 1 :** Le champ  $\vec{E}_{lin}$  créé par une distribution linéique de charges caractérisée localement par la densité linéique  $\lambda = dQ/dl$  en chaque point d'une courbe  $(\Gamma)$  et le champ  $\vec{E}_{surf}$  créé par une répartition surfacique de charges caractérisée localement par la densité surfacique  $\sigma = dq/dS$  en chaque point d'une surface  $(\Sigma)$  et se mettent respectivement sous la forme :

$$\vec{E}_{lin} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(\Gamma)} \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{surf} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(\Sigma)} \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{u} \quad (2.5)$$

**Remarque 2 :** Du fait que les fonctions qu'on utilise sont généralement continues à dérivées continues, on transforme souvent des équations obtenues pour des distributions dues à des charges ponctuelles, en des équations utilisant des densités linéiques, surfaciques ou volumiques, à l'aide de la "recette" suivante :

$$\sum_{i=1}^n ( ) q_i \iff \int_{Ligne} ( ) \lambda dl \iff \iint_{Surface} ( ) \sigma dn \iff \iiint_{Volume} ( ) \rho dV$$

2. A toute fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[a, b]$ , on associe la *somme de Riemann* :

$$S = \sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) \quad \text{avec} \quad \forall i \in [1, n] \quad x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$$

où  $(x_0 = a < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b)$  est une subdivision de l'intervalle  $[a, b]$ . Si la fonction  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$ , alors les sommes de Riemann sont d'autant plus proches de l'intégrale que l'écart maximal entre deux points consécutifs de la subdivision est proche de zéro. On utilise allègrement ce résultat en physique pour faire un *passage à l'intégrale* ou *passage à la limite continue*, sans toujours avoir en tête les hypothèses sous-jacentes ...



---

**Remarque 3 :** On a vu au chapitre 1 que l'utilisation du champ au lieu de la force revient à remplacer une action à distance (la force) par une action locale (le champ). En électrostatique, on pourrait se passer du champ et n'utiliser que les forces, mais pour être cohérent avec l'électromagnétisme, on ne le fera pas.

### 2.1.3 Potentiel électrostatique

#### Cas d'une charge ponctuelle

On considère une charge ponctuelle  $q$  située à l'origine du repère  $Oxyz$ . Le champ  $\vec{E}$  que cette charge crée en un point  $M(x, y, z)$  est donc :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{avec} \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{et} \quad \vec{u} = \frac{\vec{OM}}{r} \quad (2.6)$$

Comme, d'après (A.4),  $\vec{r}/r^3 = -\vec{\nabla}(1/r)$ , on peut finalement écrire le champ électrostatique sous la forme :

$$\vec{E}(M) = -\vec{\nabla} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right)$$

Par définition, on appelle *potentiel électrostatique*  $\Phi(M)$  créé par la charge ponctuelle  $q$  le scalaire :

$$\Phi(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + Cste \quad (2.7)$$

Il existe d'autres façons de définir le potentiel électrostatique, mais celle-ci est la plus simple<sup>3</sup>. La fonction  $\Phi$ , appelée *potentiel scalaire* ou *potentiel électrostatique* et définie à une constante additive près, vérifie donc :

$$\vec{E}(M) = -\vec{\nabla}(\Phi(M)) \quad (2.8)$$

ou encore de manière équivalente :

$$\Phi(A) - \Phi(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (2.9)$$

La relation (2.9) montre que la circulation du champ électrostatique entre deux points ne dépend que de la valeur du potentiel en ces deux points. En particulier, sa circulation le long d'un contour fermé ( $\mathcal{C}$ ) est nulle :

$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (2.10)$$

D'après (A.16), on déduit immédiatement de (2.8) qu'on a toujours :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad (2.11)$$

#### Cas d'une distribution de charges discrètes

Chaque charge d'un ensemble de  $n$  charges discrètes  $q_i$  va créer en un point  $M$  un champ électrostatique  $\vec{E}_i(M)$  donné par :

$$\vec{E}_i(M) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \quad \text{d'où le champ total} \quad \vec{E}(M) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}$$

---

3. Par exemple, d'après (2.6), la circulation élémentaire  $d\mathcal{C}$  de  $\vec{E}$  correspondant à un déplacement élémentaire  $d\vec{OM}$  peut s'écrire :

$$d\mathcal{C} = \vec{E} \cdot d\vec{OM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u} \cdot d\vec{OM}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\left(\frac{1}{r}\right)$$

car  $\vec{u} \cdot d\vec{OM}$  n'est autre que la projection de  $d\vec{OM}$  sur  $\vec{u}$ , c'est-à-dire  $dr$  ! Cette relation montre que la circulation élémentaire  $d\mathcal{C}$  du champ électrostatique d'une charge ponctuelle est une différentielle totale (puisque  $\oint d\mathcal{C} \equiv 0$ ). Or un champ possédant cette propriété est un champ de gradient (voir par exemple [8, page 27]). On peut donc finalement introduire une fonction  $\Phi$  telle que  $d\mathcal{C} = -d\Phi$ , d'où la définition (2.7).

En utilisant toujours (A.4), on peut réécrire le champ total  $\vec{E}(M)$  et potentiel électrostatique  $\Phi(M)$  associés à la distribution de charges discrètes sous la forme :

$$\vec{E}(M) = -\vec{\nabla} \left( \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \right) \quad \text{et} \quad \Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} + Cste \quad (2.12)$$

### Cas d'une distribution continue de charges

On utilise le même raisonnement pour une distribution continue de charges. L'expression (2.4) du champ électrostatique permet de définir le potentiel électrostatique associé à la distribution continue de charges :

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(D)} \frac{\rho(P)}{PM} d^3P + Cste \quad (2.13)$$

où l'intégrale est effectuée sur la distribution volumique de charge ( $D$ ) décrite par le point courant  $P$ .

### La constante du potentiel électrostatique

Les expressions (2.7), (2.12) et (2.13) du potentiel électrostatique dans le cas de charges ponctuelles, et de distributions de charges discrètes et continues, contiennent toutes une constante arbitraire.

La convention  $\Phi(\infty) = 0$  (donc  $Cste \equiv 0$ ) est valable au minimum si les charges sont localisées dans l'espace et qu'il n'y a pas de charges à l'infini. On exclut par exemple le cas du fil infini chargé, ou du plan infini chargé.

Attention, on peut parfois utiliser  $\Phi(\infty) = 0$  avec des charges à l'infini, à condition qu'elles n'interviennent pas dans le problème. L'exemple le plus fréquent est celui d'un système baignant dans un champ uniforme : il y a forcément des charges à l'infini pour créer ce champ, mais si les charges ne modifient pas les sources du champ, on peut prendre la convention  $\Phi(\infty) = 0$ .

Dans tous les cas, si on ne peut pas utiliser  $Cste = 0$ , on ne peut plus utiliser les relations (2.7), (2.12) et (2.13) pour calculer  $\Phi$  (qui reste néanmoins défini). Il faut revenir à des relations équivalentes à (2.9) et adopter des conventions particulières.

**Remarque 1 :** La valeur du potentiel d'une charge ponctuelle est déterminée à une constante près. Seule la différence de potentiel entre deux points  $M_1$  et  $M_2$  est déterminée de manière univoque :

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

Cela tombe bien, seules les différences de potentiel ont un sens physique en électrodynamique classique !

**Remarque 2 :** Le potentiel  $\Phi_{lin}$  créé par une distribution linéique de charges caractérisée localement par la densité linéique  $\lambda = dQ/d\ell$  en chaque point d'une courbe ( $\Gamma$ ) et le potentiel  $\Phi_{surf}$  créé par une répartition surfacique de charges caractérisée localement par la densité surfacique  $\sigma = dq/dS$  en chaque point d'une surface ( $\Sigma$ ) et se mettent sous la forme :

$$\Phi_{lin} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(\Gamma)} \frac{\lambda d\ell}{r} \quad \text{et} \quad \Phi_{surf} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(\Sigma)} \frac{\sigma dS}{r} \quad (2.14)$$

#### 2.1.4 Equipotentiellles et lignes de champs

Les *surfaces équipotentiellles* sont par définition les surfaces pour lesquelles  $\Phi = cste$ . On en déduit d'après (2.9) que le champ  $\vec{E}$  est normal aux équipotentiellles en tout point de l'espace.

Les *lignes du champ électrostatique*<sup>4</sup> (cf Fig. 2.3) sont par définition les courbes tangentes en chaque point au champ  $\vec{E}$ . En notant  $M$  et  $M'$  deux points voisins sur une ligne de champ, on obtient l'équation des lignes

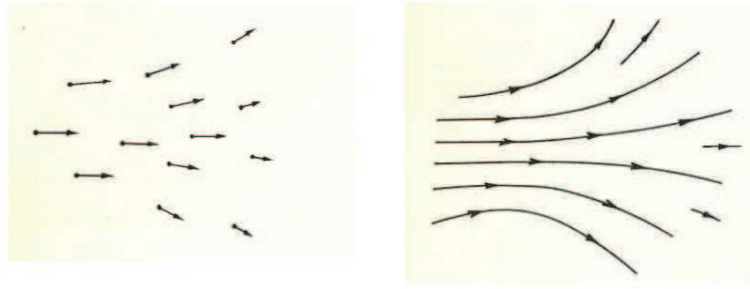


FIGURE 2.3 – Le champ  $\vec{E}$  peut être représenté en dessinant des flèches dont les longueurs et les directions correspondent aux valeurs de  $\vec{E}$  au niveau de l'origine des flèches (à gauche) ou à l'aide de lignes tangentes à la direction de  $\vec{E}$  en tout point, avec une densité des lignes proportionnelle à l'intensité de  $\vec{E}$  (figure extraite de [4, tome I, page 6]).

de champ en écrivant que  $\vec{E}$  et  $\overrightarrow{MM'}$  sont colinéaires, c'est-à-dire que  $\vec{E} \times \overrightarrow{MM'} = \vec{0}$ .

Les lignes de champ sont donc normales aux surfaces équipotentielles. Les équations différentielles qui décrivent les lignes de champ sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} & \text{en coordonnées cartésiennes} \\ \frac{dr}{E_r} = r \frac{d\theta}{E_\theta} = \frac{dz}{E_z} & \text{en coordonnées cylindriques} \\ \frac{dr}{E_r} = r \frac{d\theta}{E_\theta} = r \sin(\theta) \frac{d\phi}{E_\phi} & \text{en coordonnées sphériques} \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Les lignes de champ sont orientées dans le sens de  $\vec{E}$ , c'est-à-dire dans le sens des potentiels décroissants. Ce sont des courbes ouvertes qui ne peuvent être fermées car le potentiel ne cesse de décroître tout au long de la ligne de champ. Les lignes de champs convergent vers une charge négative et divergent depuis une charge positive (cf Figure 2.1.4).

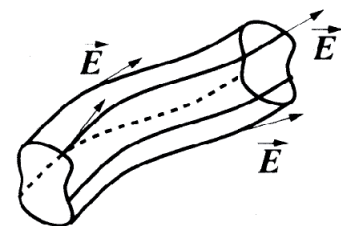
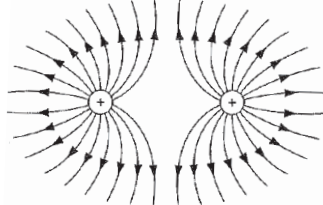
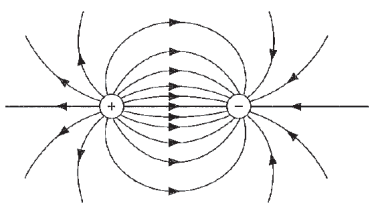


FIGURE 2.4 – Lignes de champ pour deux charges opposées (à gauche) ou identiques (à droite).

FIGURE 2.5 – Un tube de champ pour le champ  $\vec{E}$ .

Les *tubes du champ électrostatique* sont par définition les surfaces fermées constituées par l'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé (cf Figure 2.1.4).

Quelques applications de l'électrostatique sont donnée en Illustration C.1.

4. La notion de ligne de champ a été introduite par **Faraday** pour représenter les *lignes de force* qui, dans la description de l'époque, entouraient chaque corps soumis à des forces. Le concept de lignes de force a disparu depuis, mais les lignes de champ sont restées !

## Théorème de Earnshaw

Le fait que le potentiel soit toujours décroissant le long d'une ligne de champ entraîne le *théorème d'Earnshaw*<sup>5</sup> dont la déclinaison en électrostatique peut s'écrire :

*Il n'existe pas d'extremum absolu de potentiel dans une région de l'espace vide de charges*

Les lignes de champ ne convergent vers aucun point de l'espace vide, un équilibre stable ne peut donc y exister. On ne peut donc pas confiner des charges avec un simple champ électrostatique.

### 2.1.5 Le problème expérimental du zéro des potentiels

On utilisera la convention  $\Phi(\infty) = 0$  quand la distribution de charges est localisée dans l'espace (pas de charges à l'infini). Par contre, on peut parfois utiliser  $\Phi(\infty) = 0$  avec des charges à l'infini, à condition qu'elles n'interviennent pas dans le problème. La suite de ce paragraphe cherche à répondre à la question : comment réaliser  $\Phi(\infty) = 0$  dans la pratique ?

En suivant [8], on assimile la Terre à une sphère conductrice de rayon  $R = 6400$  km. On intercale une source de tension  $e$  entre la Terre et un conducteur sphérique de rayon  $a$  situé à une hauteur  $h \gg a$ . On suppose la neutralité du système, c'est-à-dire que la Terre porte la charge  $-Q$  et la sphère la charge  $+Q$  (cf Figure 2.6).

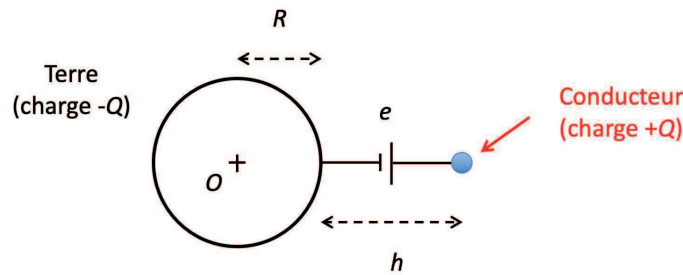


FIGURE 2.6 – Modélisation simpliste d'un conducteur chargé au voisinage de la Terre.

En prenant la convention  $\Phi(\infty) = 0$ , le potentiel de la Terre, calculé au centre  $O$ , vaut, en supposant que la charge  $+Q$  est située en  $C$  :

$$\Phi(O) \approx \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R+h)} \approx \frac{-Qh}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

Le potentiel de la sphère (calculé en  $C$ ) vaut quant à lui :

$$\Phi(C) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{Terre} \frac{dq}{r} \quad \text{avec} \quad \iiint_{Terre} dq = -Q$$

Or on peut écrire :

$$\left| \iiint_{Terre} \frac{dq}{r} \right| < \frac{1}{h} \left| \iiint_{Terre} dq \right| = \frac{Q}{h} \quad \text{d'où} \quad \Phi(C) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

En écrivant que  $e = \Phi(C) - \Phi(O)$ , on obtient :

$$\Phi(O) \approx \frac{-e}{R^2 \left(1 + \frac{a}{h}\right)} \quad \text{et} \quad \Phi(C) \approx \frac{e}{1 + \frac{a}{R^2}} \quad (2.16)$$

Il est donc équivalent de prendre le potentiel nul sur la Terre ou à l'infini tant que  $ah \ll R^2$ . Avec  $a \approx 10$  cm et  $h \approx 10$  m, on obtient  $ah/R^2 \approx 1,5 \cdot 10^{-7}$ , ce qui valide le modèle.

5. Le théorème d'Earnshaw concerne en fait toute combinaison de forces qui suivent une loi en  $1/r^2$ . Cela concerne en particulier les champs magnétiques, électriques ou gravitationnels.

## 2.2 Théorème de Gauss et équations de l'électrostatique

### 2.2.1 Flux du champ électrostatique

#### Flux de $\vec{E}$ à travers une surface élémentaire

On considère une charge ponctuelle  $q$  située en  $A$ , et un élément de surface  $dS$  de point médian  $M$ . On note  $\vec{n}$  la normale sortante à  $dS$  en  $M$  (cf Figure 2.7). Par définition, l'angle solide<sup>6</sup>  $d\Omega$  sous lequel on voit  $dS$  depuis  $A$  est  $d\Omega = dS \cos(\alpha)/r^2$ .

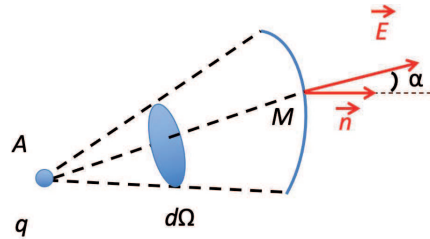


FIGURE 2.7 – Lien entre le flux de  $\vec{E}$  et l'angle solide  $d\Omega$  (voir texte).

Le flux de  $\vec{E}$  à travers la surface  $dS$  est  $d\phi = \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E dS \cos(\alpha)$ . D'après l'expression du champ  $\vec{E}$ , on en déduit immédiatement que :

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q dS \cos(\alpha)}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad (2.17)$$

#### Flux de $\vec{E}$ à travers une surface ouverte

Le flux total  $\phi$  créé par une charge ponctuelle unique à travers une surface ( $\Sigma$ ) non fermée est simplement donné par :

$$\phi = \iint_{(\Sigma)} d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(\Sigma)} d\Omega \quad (2.18)$$

#### Flux de $\vec{E}$ à travers une surface fermée

On doit considérer deux cas distincts (cf Figure 2.8), selon que la charge ponctuelle  $q$  est située à l'extérieur ou à l'intérieur de la surface fermée ( $S$ ).

Si la charge ponctuelle est à l'intérieur de la surface ( $S$ ), le flux de  $\vec{E}$  à travers la surface élémentaire  $dS$  est donné par (2.17). Le flux total à travers la surface ( $S$ ) est donc :

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint\!\!\!\oint_{(S)} d\Omega$$

Or, l'angle solide total sous lequel on voit la surface ( $S$ ) depuis  $A$  vaut  $4\pi$ . On vient donc de montrer que le flux total  $\phi$  du champ  $\vec{E}$  vaut :

$$\phi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.19)$$

si la charge ponctuelle se trouve à l'intérieur de la surface fermée ( $S$ ).

On considère maintenant le cas où la charge ponctuelle se trouve à l'extérieur de la surface ( $S$ ). On considère le cône élémentaire d'angle solide  $d\Omega$  et de sommet  $A$ . Il intercepte la surface ( $S$ ) en deux endroits et définit

6. On rappelle les conventions pour donner une valeur algébrique à l'angle solide :

1. La *face nord* de  $dS$  est celle par laquelle sort le vecteur normal  $\vec{n}$ , tandis que la *face sud* est l'autre face.
2. L'angle solide  $d\Omega$  est compté positivement si depuis  $A$ , on voit la face sud de  $dS$ , négativement dans le cas contraire.

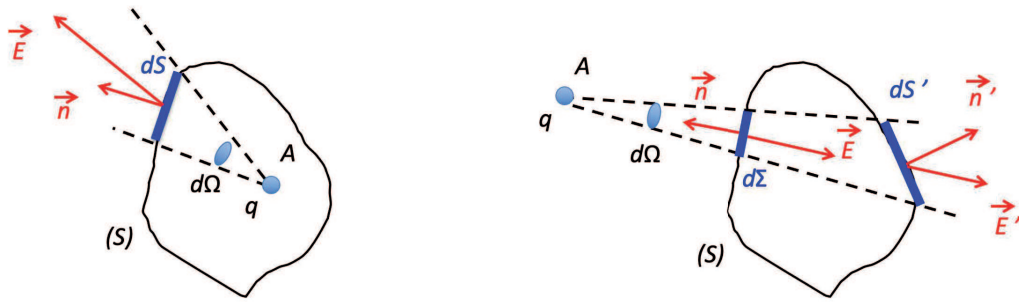


FIGURE 2.8 – Le calcul du flux du champ électrostatique à travers une surface fermée est différent selon que la charge est située à l'intérieur ou à l'extérieur de la surface (voir texte).

deux surfaces élémentaires ( $dS$ ) et ( $dS'$ ) (cf Figure 2.8). On note  $\vec{E}$  et  $\vec{E}'$  les champs électrostatiques créés par la charge  $q$  sur ( $dS$ ) et ( $dS'$ ).

Si on suppose  $q > 0$ , le flux de  $\vec{E}$  à travers ( $dS$ ) sera positif et celui de  $\vec{E}'$  à travers ( $dS'$ ) sera négatif. Or en valeur absolue, ces flux sont égaux (car l'angle solide est le même). Donc dans tous les cas, le flux total du champ électrostatique sortant de ( $dS$ ) + ( $dS'$ ) sera  $d\phi + d\phi' = 0$  (les signes sont inversés si  $q < 0$ ).

Ce raisonnement peut se généraliser à tous les angles solides  $d\Omega$ . Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée est donc toujours nul, dès que la charge ponctuelle est située à l'extérieur de la surface.

## 2.2.2 Théorème de Gauss

On peut généraliser ceci à toute distribution de charges, ponctuelles ou non. Pour les charges situées à l'extérieur, la contribution au flux du champ électrostatique sera nulle, tandis que la contribution de chacune des charges internes  $q_{int}$  à la surface fermée ( $S$ ) sera  $q_{int}/\epsilon_0$ .

On a donc montré que :

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0} & \text{si } q \text{ se trouve à l'intérieur de } (S) \\ 0 & \text{si } q \text{ se trouve à l'extérieur de } (S) \end{cases} \quad (2.20)$$

Cette relation constitue le *théorème de Gauss pour une charge ponctuelle*. Pour une densité de charge  $\rho$  continue, le théorème de **Gauss** devient :

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{(V)} \rho dV \quad (2.21)$$

En utilisant le théorème d'**Ostrogradsky** (A.22), cette dernière relation permet d'écrire :

$$\iiint_{(V)} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dV = 0$$

Comme le volume d'intégration ( $V$ ) est arbitraire, on en déduit la *forme locale du théorème de Gauss* :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.22)$$

**Remarque 1 :** Le théorème de **Gauss** est toujours valide et permet de calculer le champ électrostatique dans des problèmes où la symétrie des sources est suffisante pour que le calcul du flux  $\phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}$  sortant d'une surface convenablement choisie soit simple. La surface ( $S$ ) à travers laquelle on calcule le flux  $\phi$  est appelée *surface de Gauss*.

**Remarque 2 :** Les deux équations locales de l'électrostatique (2.11) et (2.22) sont analogues dans leur forme à celles vérifiées par le champ de gravitation  $\vec{g}$  :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi\mu G \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{g} = \vec{0}$$

---

**Remarque 3** : L'électrostatique peut s'étudier de manière générale en considérant qu'il s'agit de l'étude d'un champ à rotationnel nul et à divergence donnée.

### Extrema de potentiel

En appliquant le théorème de **Gauss**, on peut établir deux résultats importants :

1. S'il n'y a pas de charge en un point à une distance finie, alors le potentiel  $\Phi$  en ce point ne peut être un extremum absolu.
2. Si en un point à distance finie, le potentiel  $\Phi$  présente un maximum, alors il y a une charge positive placée en ce point. De même, si  $\Phi$  présente un minimum, alors il y a une charge négative en ce point.

### 2.2.3 Equations de Poisson et de Laplace

En combinant (A.17) et (2.8), on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}(\Phi)) = -\Delta\Phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Le potentiel scalaire vérifie donc l'équation de **Poisson** :

$$\Delta\Phi + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (2.23)$$

qui donne l'équation de **Laplace** en l'absence de charge :

$$\Delta\Phi = 0 \quad (2.24)$$

Le § A.2.3 traitait de l'unicité de la solution de cette équation. Les surfaces fermées considérées y sont les surfaces extérieures des conducteurs en équilibre électrostatique. La solution de (2.23) et (2.24) est donc unique si :

1. Le potentiel des conducteurs (donc de leur surface) est connu (*condition de Dirichlet*).
2. Le champ est connu sur la surface des conducteurs (*condition de Neumann*).
3. Le potentiel est connu sur certains conducteurs, alors que le champ l'est sur les autres.

Ce résultat est parfois connu sous le nom de *théorème d'unicité*.

## 2.3 Méthodes de calcul en électrostatique

Les méthodes générales de résolution des équations de **Laplace** et de **Poisson** font intervenir les fonctions de **Green** et imposent des calculs parfois pénibles. De nos jours, on utilise généralement une résolution numérique à l'aide de codes de calculs (commerciaux ou non). Dans quelques cas particuliers simples, on peut trouver une solution littérale (méthode des images, méthode de séparation des variables). L'utilisation du théorème d'unicité permet de dire ensuite que c'est LA solution. Dans d'autres cas, on peut trouver des solutions approchées (méthodes variationnelles, méthodes numériques).

Ce paragraphe regroupe les principales méthodes utilisées de nos jours.

### 2.3.1 Méthodes formelles pour calculer $\vec{E}$

Selon ce qui vient d'être dit, il existe plusieurs méthodes pour calculer le champ électrique  $\vec{E}(M)$ , connaissant la distribution de charges  $\rho(M)$  en tout point de l'espace :

1. Formulation différentielle en champ :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

2. Formulation différentielle en potentiel :

$$\Delta\Phi + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{puis} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}(\Phi)$$

3. Formulation intégrée en champ :

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad \text{ou} \quad \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

où  $(C)$  est un contour fermé et  $(S)$  une surface fermée.

4. Calcul direct par l'intégrale vectorielle :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(D)} \rho(P) \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} d^3P$$

où le calcul se restreint à la zone contenant la distribution  $(D)$ .

5. Calcul indirect à l'aide du potentiel scalaire :

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(D)} \frac{\rho(P)}{PM} d^3P \quad \text{suivi de} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}(\Phi)$$

où le calcul se restreint à la zone contenant la distribution  $(D)$ .

### 2.3.2 Méthodes liées à une modélisation particulière

Dans certains cas particuliers, en sus des techniques de calculs rappelées ci-dessus, on peut utiliser des méthodes qui permettent une simplification du problème. On va en développer deux dans ce paragraphe : la *méthode des images* et la *méthode de séparation des variables*.

#### Méthode des images

La *méthode des images* consiste à remplacer un problème donné par un problème ayant - dans une partie de l'espace - la même distribution volumique et les mêmes conditions aux limites. L'équation de **Poisson** à résoudre étant la même, les solutions seront identiques.

On peut traiter ceci sur l'exemple de la charge ponctuelle située devant un plan parfaitement conducteur (Problème 1 de la Figure 2.9). On cherche à calculer simplement la force exercée par le demi-espace sur la charge  $q$  située en  $A$ . Le calcul direct implique de déterminer la densité superficielle de charges située à la distance  $r$  de l'axe  $Oz$ , et d'intégrer sur tout le plan  $z = 0$ .

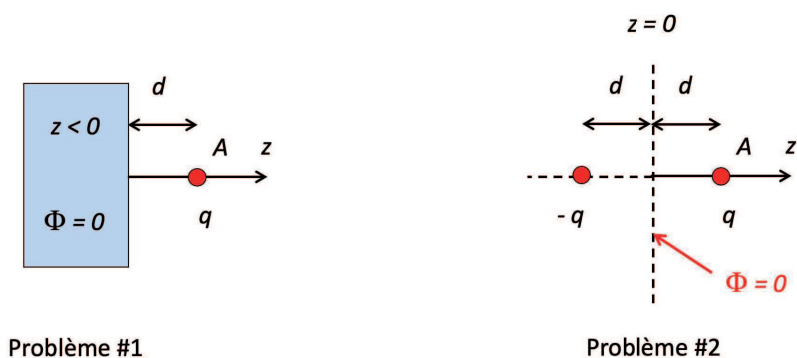


FIGURE 2.9 – Problème de la charge ponctuelle placée devant un plan parfaitement conducteur : la méthode des images consiste à remplacer le problème #1 par le problème #2, plus simple à résoudre (voir texte).



Considérons maintenant le cas de deux charges  $-q$  et  $+q$  dans le vide, séparées de la distance  $2d$  (Problème 2 de la Figure 2.9). Le potentiel  $\Phi$  dans le plan médian  $z = 0$  est nul.

Dans le demi-espace  $z > 0$ , on doit résoudre dans les deux problèmes la même équation différentielle, avec la même condition aux limites ( $\Phi = 0$  sur le plan  $z = 0$ ). La solution est donc la même. On en déduit immédiatement que le champ créé en  $A$  par le demi-plan  $z < 0$  (ou de manière équivalente par la charge  $-q$ , image de  $q$  par rapport au plan  $z = 0$ ), s'écrit :

$$\vec{E}(A) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(2d)^2} \vec{u}_z$$

La charge  $q$  est donc attirée par le demi-espace  $z < 0$  avec la force :

$$\vec{F} = q\vec{E}(A) = \frac{-q^2}{16\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2} \vec{u}_z$$

### Méthode de séparation des variables

La méthode de *séparation des variables* consiste à faire l'hypothèse que le potentiel  $\Phi(x, y, z)$  peut se mettre sous la forme<sup>7</sup> :

$$\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (2.25)$$

où  $X, Y$  et  $Z$  sont des fonctions arbitraires. On suppose ainsi que le problème ne dépend pas de termes croisés, par exemple des termes en  $xy, xz$ , etc... L'utilisation du théorème d'unicité permet ensuite de déterminer que cette solution particulière est LA solution.

Si l'on cherche à résoudre l'équation de **Laplace**  $\Delta\Phi = 0$  (le raisonnement serait identique avec l'équation de **Poisson**), on doit donc résoudre :

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0 \quad (2.26)$$

On en déduit immédiatement que  $X''(x)/X(x)$  est une constante, de même que  $Y''(y)/Y(y)$  et  $Z''(z)/Z(z)$ . Ces trois constantes peuvent être respectivement notées  $-\alpha^2, -\beta^2$  et  $\alpha^2 + \beta^2$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont réels ou imaginaires purs. On ne déduit que  $X, Y$  et  $Z$  s'écrivent :

$$\begin{cases} X(x) = A \exp(i\alpha x) + B \exp(-i\alpha x) \\ Y(y) = C \exp(i\beta y) + D \exp(-i\beta y) \\ Z(z) = E \exp(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z) + F \exp(-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z) \end{cases} \quad (2.27)$$

où  $A, B, C, D, E$  et  $F$  sont des constantes qui sont déterminées par les conditions aux limites du problème. La forme générale de  $\Phi$  découle ensuite de (2.25).

### 2.3.3 Méthodes variationnelles

L'approche variationnelle permet de décrire des phénomènes en mécanique à l'aide du principe de moindre action<sup>8</sup> : le comportement réellement observé d'un système correspond à la minimisation (ou la maximisation) d'une certaine grandeur.

On pourrait montrer [4, Tome 1, Page 341] que le potentiel électrostatique  $\Phi$ , dans le cas d'une distribution connue  $\rho$  de charges volumiques, est celui qui minimise la quantité :

$$U^* = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint (\vec{\nabla}\Phi)^2 dV - \iiint \rho\Phi dV \quad (2.28)$$

7. Bien sûr, en coordonnées cylindriques ou sphériques, on écrirait  $\Phi(r, \theta, z) = X(r)Y(\theta)Z(z)$  ou  $\Phi(r, \theta, \phi) = X(r)Y(\theta)Z(\phi)$ .

8. En optique, on parle de *Principe de Fermat*.

En d'autres termes, il est équivalent de dire la *solution est donnée par l'équation de Laplace* ou la *solution est donnée par la minimisation de (2.28)*. On connaît le résultat, c'est  $\Delta\Phi = -\rho/\epsilon_0$ . Dans le cas particulier où les seules charges du système se répartissent sur les conducteurs, on a simplement :

$$U^* = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint (\vec{\nabla} \Phi)^2 dV \quad (2.29)$$

Pour appliquer la méthode variationnelle, on va prendre suivant [4, Tome 1, Page 344] l'exemple d'un condensateur cylindrique, de rayon interne  $a$  et de rayon externe  $b$ . Le conducteur extérieur est au potentiel nul, tandis que le conducteur interne est porté au potentiel  $\Phi_0$ .

En prenant la forme correcte du potentiel entre les deux électrodes, (2.29) permet de calculer l'énergie totale du système. On remonte à la capacité  $C_0$  en écrivant que cette énergie vaut  $1/2 \times C_0 \Phi_0^2$  pour un cylindre de longueur unité. On obtient alors la véritable capacité du condensateur cylindrique (par unité de longueur) :

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)} \quad (2.30)$$

Si on prend une expression approchée au lieu de prendre la bonne expression pour le potentiel  $\Phi$ , on obtiendra par cette méthode une valeur de la capacité plus élevée que la valeur réelle  $C_0$ . Comme l'erreur sur  $C$  est du second ordre par rapport à l'erreur sur  $\Phi$ , la valeur de  $C$  obtenue sera une bonne approximation de la valeur réelle, même si la forme de  $\Phi$  est très éloignée de sa forme réelle.

En première approximation, on peut faire le calcul en supposant un champ constant dans le condensateur, c'est-à-dire un potentiel qui varie linéairement avec la distance. On doit alors avoir, pour respecter les deux conditions aux limites ( $\Phi(r=a) = \Phi_0$  et  $\Phi(r=b) = 0$ ) :

$$\Phi = \Phi_0 \left(1 - \frac{r-a}{b-a}\right) \quad (2.31)$$

Cette forme du potentiel  $\Phi$  permet de calculer  $U^*$  à l'aide de (2.29) sur un cylindre de longueur unité. On en déduit une expression approchée  $C_1$  de la capacité :

$$C_1 = 2\pi\epsilon_0 \frac{b+a}{2(b-a)} \quad (2.32)$$

L'erreur sur la valeur de la capacité n'est pas trop importante, en dépit du fait que la forme du potentiel est complètement fautive (cf Figure 2.10).

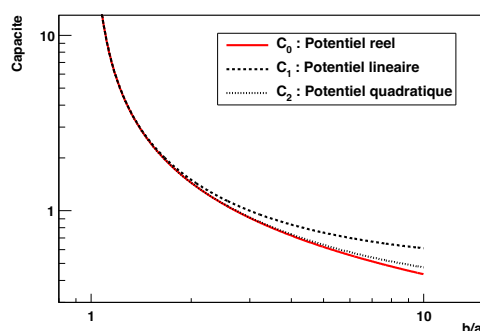


FIGURE 2.10 – Variations de la capacité du condensateur cylindrique en fonction de  $b/a$ , pour diverses hypothèses sur la forme du potentiel entre les électrodes (voir texte).

Pour améliorer la détermination de la capacité, on peut prendre une autre forme du potentiel entre les électrodes. La valeur la plus basse sera celle qui sera la plus proche de la réalité.

On peut par exemple prendre l'hypothèse d'un potentiel quadratique, c'est-à-dire d'un champ qui varie linéairement avec la distance. La forme quadratique la plus générale qui respecte les conditions aux limites

sur les conducteurs s'écrira :

$$\Phi = \Phi_0 \left[ 1 + \alpha \left( \frac{r-a}{b-a} \right) - (1+\alpha) \left( \frac{r-a}{b-a} \right)^2 \right] \quad (2.33)$$

où  $\alpha$  est une constante arbitraire. On peut facilement en déduire l'expression du champ électrique :

$$E(\alpha) = -\frac{d\phi}{dr} = -\frac{\alpha V}{b-a} + 2(1+\alpha) \frac{(r-a)V}{(b-a)^2} \quad (2.34)$$

et de la capacité :

$$C(\alpha) = 2\pi\epsilon_0 \frac{a}{b-a} \left[ \frac{b}{a} \left( \frac{\alpha^2}{6} + \frac{2\alpha}{3} + 1 \right) + \frac{\alpha^2}{6} + \frac{1}{3} \right] \quad (2.35)$$

qui dépendent tous les deux de la valeur de la constante  $\alpha$ . La valeur de  $C(\alpha)$  la plus proche de la valeur réelle  $C_0$  sera la valeur minimale de  $C(\alpha)$ . En écrivant  $dC/d\alpha = 0$ , on obtient  $\alpha_{min} = -2b/(b+a)$ . On en déduit :

$$C_2 = 2\pi\epsilon_0 \frac{b^2 + 4ab + a^2}{3(b^2 - a^2)} \quad (2.36)$$

On peut généraliser cette approche à d'autres situations pour lesquelles on ne connaît pas la forme du champ ou l'expression du potentiel. On introduit une fonction d'essai, et on minimise le résultat obtenu. Le résultat sera d'autant plus proche de la réalité que la fonction d'essai sera réaliste. On peut ainsi, par résolution numérique, obtenir d'excellents résultats pour des problèmes qu'on ne saurait résoudre de manière analytique.

### 2.3.4 Résolution numérique

On peut résoudre numériquement l'équation de **Laplace** à partir du développement de Taylor du potentiel. Pour un problème à deux dimensions, on écrira par exemple :

$$\begin{cases} \Phi(x \pm \epsilon, y) = \Phi(x, y) \pm \frac{\partial \Phi}{\partial x} \epsilon + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \epsilon^2 \pm \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \epsilon^3 + O(\epsilon^4) \\ \Phi(x, y \pm \epsilon) = \Phi(x, y) \pm \frac{\partial \Phi}{\partial y} \epsilon + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \epsilon^2 \pm \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} \epsilon^3 + O(\epsilon^4) \end{cases} \quad (2.37)$$

On en déduit que :

$$\Phi(x + \epsilon, y) + \Phi(x - \epsilon, y) + \Phi(x, y + \epsilon) + \Phi(x, y - \epsilon) = 4\Phi(x, y) + \epsilon^2 \Delta \Phi(x, y) + O(\epsilon^4) \quad (2.38)$$

Si le potentiel vérifie l'équation de **Laplace**, alors le potentiel en un point donné est, à l'ordre 4 près, la moyenne sur les quatre points voisins :

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4} [\Phi(x + \epsilon, y) + \Phi(x - \epsilon, y) + \Phi(x, y + \epsilon) + \Phi(x, y - \epsilon)] + O(\epsilon^4) \quad (2.39)$$

Dans la pratique, on part d'une valeur initiale donnée du potentiel et on répète la procédure jusqu'à la précision voulue pour résoudre numériquement l'équation de **Laplace**.

## 2.4 Aspects énergétiques liés à l'électrostatique

### 2.4.1 Rappels sur l'énergie potentielle en mécanique

On considère un point matériel plongé dans un champ de force  $\vec{f}$ . On montre en mécanique que si  $\vec{f}$  peut se mettre sous la forme :

$$\vec{f} = -\vec{\nabla}(E_p(\vec{r})) \quad (2.40)$$

alors le travail de la force  $\vec{f}$  lors d'un déplacement du point matériel ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement des positions initiales et finales. La fonction  $E_p(\vec{r})$  est appelée *énergie potentielle du point matériel dans le champ de force*.

Dans le cas d'un ensemble de  $n$  points matériels, on montre que si la force  $\vec{f}_k$  traduisant l'interaction des autres points matériel avec le point  $k$  peut se mettre sous la forme :

$$\vec{f}_k = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_k} (U_I(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{k-1}, \vec{r}_{k+1}, \dots, \vec{r}_n)) \quad (2.41)$$

alors le travail des forces internes et externes est donné par :

$$dW_{int} = -dU_I \quad \text{et} \quad dW_{ext} = d(E_c + U_I) \quad (2.42)$$

La fonction  $U_I$  est alors appelée *énergie potentielle d'interaction des  $n$  points matériels*.

## 2.4.2 Énergie potentielle de charges ponctuelles dans le vide

On supposera dans tout ce paragraphe que le champ électrostatique  $\vec{E}$  est constant.

### Cas d'une seule charge

Si une charge  $q$  se trouve en un point  $M$  où le potentiel électrostatique est  $\Phi(M)$  et le champ électrostatique  $\vec{E}(M)$ , elle subit une force  $\vec{F}$  telle que :

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad \text{avec} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}(\Phi) \quad \text{ou encore} \quad \vec{F} = -\vec{\nabla}(U_I) \quad \text{avec} \quad U_I = q\Phi$$

Par définition, on dira que  $U_I$  est l'*énergie potentielle de la charge  $q$  dans le champ  $\vec{E}$* , ou de manière équivalente l'*énergie d'interaction de la charge ponctuelle  $q$  avec la distribution ( $\mathcal{D}$ ) qui engendre  $\vec{E}$  et  $\Phi$* . Cette définition de  $U_I$  en donne l'origine : elle est nulle lorsque la charge se trouve à une distance infinie de la distribution ( $\mathcal{D}$ ) qui engendre le potentiel  $\Phi$ , c'est-à-dire lorsque  $\Phi$  est nul.

Le travail élémentaire  $dw$  de la force électrostatique lors d'un déplacement élémentaire  $d\vec{r}$  de la charge  $q$  vaut :

$$dw = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\vec{\nabla}(q\Phi) \cdot d\vec{r} = -q d\Phi = -dU_I$$

Si l'on suppose qu'un opérateur va fournir le travail externe  $dW$  pour effectuer ce déplacement, le théorème de l'énergie cinétique<sup>9</sup> appliqué à la charge s'écrit :

$$dW + dw = dE_c \quad \text{soit} \quad dW = d(E_c + U_I) \quad (2.43)$$

On se place ici dans le cas de charges fixes. Cela signifie que si les charges sont amenées à se déplacer, on se limitera à des situations où dans les états initiaux et finaux les particules ont une vitesse nulle. Dans notre cas particulier d'une charge plongée dans le potentiel  $\Phi$ , la relation (2.43) s'écrit :

$$dW = dU_I \quad (2.44)$$

car la charge est immobile dans les états initiaux et finaux.

9. Le théorème de l'énergie cinétique énonce que :

*Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique  $E_c$  d'un point matériel soumis à une force  $\vec{f}$  pendant l'intervalle de temps  $dt$  est égale au travail élémentaire de cette force pendant  $dt$ , soit :*

$$dE_c = \delta W = \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

---

## Cas de deux charges

On considère cette fois que le potentiel est créé par une charge ponctuelle  $q_1$ . Une deuxième charge  $q_2$  est soumise au potentiel  $\Phi_1$  tel que :

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}}$$

L'énergie potentielle d'interaction des deux charges s'écrit :

$$U_I = q_2 \Phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad (2.45)$$

et est ainsi entièrement déterminée (elle est nulle lorsque les deux charges sont infiniment éloignées l'une de l'autre). Cette énergie potentielle représente le travail qu'un opérateur doit fournir pour amener depuis l'infini la charge  $q_2$  à la distance  $r_{12}$  de la charge  $q_1$ , la charge  $q_2$  étant immobile dans ses positions initiales et finales.

Comme on peut également écrire  $U_I = q_1 \Phi_2$  (obtenu en rapprochant cette fois  $q_1$  dans le champ créé par  $q_2$ ), on peut écrire :

$$U_I = \frac{1}{2} (q_1 \Phi_2 + q_2 \Phi_1) \quad (2.46)$$

**Remarque :** D'après (2.45), l'énergie d'interaction  $U_I$  est positive si les charges sont de même signe et négative si elles sont de signe contraire.

## Cas de $n$ charges

En reprenant les notations du § 2.4.1, la force  $\vec{F}_k$  représentant l'action des  $n - 1$  charges sur la charge  $k$  (par l'intermédiaire de la loi de **Coulomb**) s'écrit :

$$\vec{F}_k = -q_k \vec{E}(\vec{r}_k) \quad \text{avec} \quad \vec{E}(\vec{r}_k) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_k}(\Phi) \quad \text{et} \quad \Phi = \sum_{i \neq k} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_{ik}}$$

soit :

$$\vec{F}_k = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_k} \left[ \sum_{i \neq k} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_k}{r_{ik}} \right] \quad (2.47)$$

Il est facile de vérifier que la fonction  $U_I$  donnée par :

$$U_I = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (2.48)$$

rempli les conditions requises pour pouvoir être appelée *énergie potentielle d'interaction des  $n$  charges ponctuelles*, c'est-à-dire que  $\vec{F}_k = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_k}(U_I)$ .

**Remarque :** L'énergie d'interaction  $U_I$  peut encore se mettre sous la forme :

$$U_I = \frac{1}{2} \sum_i q_i \Phi_i \quad (2.49)$$

où  $\Phi_i$  est le potentiel créé au point où se trouve la charge  $q_i$  par l'ensemble des autres  $n - 1$  charges.

## Travail d'un opérateur construisant le système

On suppose que l'opérateur construit la distribution précédente en apportant depuis l'infini toutes les charges une à une à leur position finale. Les charges étant supposées immobiles aux instants initiaux et finaux, on déduit de (2.42) donnant  $dW_{ext}$  que le travail  $W$  de l'opérateur est  $W = U_I$  (on utilise également le fait que  $U_I = 0$  lorsque les charges sont infiniment éloignées les unes des autres).

En décomposant le travail nécessaire pour construire cette distribution, on obtient :

$$4\pi\epsilon_0 \times W = \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + q_3 \left[ \frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right] + \dots + q_i \left[ \sum_{j<i} \frac{q_j}{r_{ij}} \right] + \dots + q_n \left[ \sum_{j<n} \frac{q_j}{r_{nj}} \right]$$

soit<sup>10</sup> :

$$W = \sum_i \sum_{j<i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (2.50)$$

L'énergie d'interaction  $U_I$  est parfois appelée *énergie de constitution*.

### 2.4.3 Énergie potentielle d'une distribution continue de charges dans le vide

On considère une distribution continue de charges dans le vide, occupant un volume ( $D$ ), caractérisée en chaque point de ce volume par une densité volumique  $\rho(\vec{r})$  créant le potentiel électrostatique  $\Phi(\vec{r})$ .

Le passage d'une distribution de charges ponctuelles à une distribution continue s'effectue sans problème pour le calcul du champ électrique  $\vec{E}$  et du potentiel électrostatique  $\Phi$ . Ce n'est pas le cas pour l'énergie d'interaction  $U_I$ . En effet, on peut considérer la distribution continue ( $D$ ) comme la moyenne géométrique d'une distribution de charges ponctuelles mais l'expression de l'énergie d'interaction de  $n$  charges ponctuelles n'étant pas linéaire, il n'est pas évident que l'énergie de la distribution continue soit donnée par la moyenne de (2.48). En particulier, si on remplace les  $q_i$  par  $q_i' = \alpha q_i$ , l'énergie d'interaction devient  $U_I' = \alpha^2 U_I$ .

**Remarque :** L'habitude fait qu'on parle plutôt d'*énergie d'interaction*  $U_I$  pour une distribution de charges discrètes et d'*énergie électrostatique*  $U_e$  dans le cas d'une distribution continue. Fondamentalement, rien ne nous oblige à parler ici de  $U_e$  en lieu et place de  $U_I$ , mais on fera comme tout le monde ...

#### Énergie électrostatique ou énergie de constitution

D'après le § 2.4.1, l'existence de  $U_e$  est assurée par le fait que la force  $d\vec{F}$  qui s'exerce sur chaque élément de volume  $dV$  portant la charge  $dq = \rho dV$  s'écrit :

$$d\vec{F} = dq \vec{E} = -\vec{\nabla}[dq\Phi(\vec{r})]$$

On introduit la distribution  $\rho'(\vec{r}) = \lambda \rho(\vec{r})$  où  $\lambda$  est un paramètre (indépendant de  $\vec{r}$ ) variant de 0 à 1. On retrouve la distribution originelle si  $\lambda = 1$ , alors que l'espace est vide de charge si  $\lambda = 0$ . A la nouvelle distribution de charge  $\rho'(\vec{r})$  correspond en chaque point de l'espace le potentiel électrostatique  $\Phi'(\vec{r}) = \lambda \Phi(\vec{r})$ . On va construire la répartition  $\rho(\vec{r})$  en faisant varier  $\lambda$  de 0 à 1.

Lorsque  $\lambda$  varie de  $d\lambda$ , on doit apporter de l'infini dans le volume  $dV$  la charge supplémentaire  $d^2q = d\lambda \rho(\vec{r}) dV$ . En supposant une transformation réversible, le travail  $\delta^2 W$  de l'opérateur qui amène cette charge de l'infini est :

$$\delta^2 W = \lambda \Phi(\vec{r}) d^2q = \lambda d\lambda \Phi(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV \quad (2.51)$$

En sommant les contributions de tous les éléments de volume  $dV$  de la distribution ( $\mathcal{D}$ ), on obtient :

$$\delta W = \lambda d\lambda \iiint_{(D)} \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) dV$$

Pour obtenir le travail total de l'opérateur pour construire la distribution  $\rho(\vec{r})$ , on intègre en faisant varier  $\lambda$  de 0 à 1 :

$$W = \left( \int_0^1 \lambda d\lambda \right) \iiint_{(D)} \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) dV = \frac{1}{2} \iiint_{(D)} \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) dV$$

D'après (2.44), l'énergie électrostatique de la distribution de charges est donc :

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{(D)} \rho(P) \Phi(P) dV \quad (2.52)$$

10. En se souvenant que  $\sum_{i, i \neq j} u_{ij} = 2 \sum_{i, j < i} u_{ij}$ .

Cette énergie est parfois appelée *énergie de constitution* et suppose  $\Phi(\infty) \equiv 0$  car (2.51) le supposait implicitement. L'énergie de constitution  $U_e$  est l'énergie nécessaire pour créer le système en l'absence de tout champ extérieur de manière quasi-statique. Cette énergie correspond au travail qu'un opérateur doit fournir pour amener les charges une à une de l'infini (où on suppose le champ nul) jusqu'à leur position finale.

**Remarque :** On verra plus tard (§ 2.4.4) que l'énergie électrostatique de la distribution de charges  $U_e$  est toujours positive.

### Energie d'interaction de deux distributions

On considère deux distributions de charges, de densités respectives  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , créant les potentiels  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ . La densité totale est  $\rho = \rho_1 + \rho_2$  et le potentiel total est  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$  (d'après la linéarité des équations de l'électrostatique). A la distribution  $\rho$  et au potentiel  $\Phi$  on associe d'après le paragraphe précédent l'énergie électrostatique  $U_e$  :

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \iiint_{(D)} (\rho_1 + \rho_2) (\Phi_1 + \Phi_2) dV \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{(D)} \rho_1 \Phi_1 dV + \frac{1}{2} \iiint_{(D)} \rho_2 \Phi_2 dV + \frac{1}{2} \iiint_{(D)} (\rho_1 \Phi_2 + \rho_2 \Phi_1) dV \end{aligned}$$

Les deux premiers termes sont les énergies électrostatiques de chacune des distributions prises séparément. Le troisième terme représente l'*énergie potentielle d'interaction*  $U_e(1, 2)$  des deux distributions qu'on peut écrire :

$$U_e(1, 2) = \frac{1}{2} \iiint_{(D)} (\rho_1 \Phi_2 + \rho_2 \Phi_1) dV = \iiint_{(D)} \rho_1 \Phi_2 dV = \iiint_{(D)} \rho_2 \Phi_1 dV$$

On veut vérifier par le calcul que ces trois expressions sont bien égales. On en déduit donc que l'énergie potentielle de la distribution de charges  $\rho_1$  dans le champ créé par  $\rho_2$  est égale à l'énergie potentielle de la distribution de charges  $\rho_2$  dans le champ créé par  $\rho_1$ . Cette relation est connue sous le nom d'*identité de Gauss*. L'énergie d'interaction peut être de signe quelconque.

### Remarque : Energie électrostatique et charges ponctuelles

Les expressions de l'énergie électrostatique ci-dessus ont été établies pour des distributions de charges continues. En les appliquant à des charges ponctuelles, on tombe sur une des limites de l'électrostatique. En effet, l'énergie électrostatique d'une sphère de rayon  $R$  portant la charge  $Q$  uniformément répartie en surface s'écrit :

$$U_e = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

Pour considérer l'énergie d'une charge ponctuelle, on peut être tenté de faire tendre  $R$  vers zéro dans l'expression ci-dessus. Or cette expression diverge ! Pour évaluer la distance en dessous de laquelle cette expression n'a plus de sens, on procède généralement ainsi : on attribue à l'électron un rayon fini qui délimite le volume à la surface duquel est uniformément répartie la charge élémentaire  $e$ . L'ordre de grandeur en dessous duquel la théorie électrostatique n'a plus de sens est donné par la distance  $r_e$  à laquelle l'énergie électrostatique est égale à l'énergie de masse  $m_e c^2$ . On en déduit que le *rayon classique de l'électron*  $r_e$  doit valoir :

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \approx 2,818 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

Mais avant d'atteindre cette distance, il existe une autre limite, quantique, puisque la longueur d'onde Compton de l'électron vaut  $\lambda_e = h/m_e c \approx 2,4 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ , ce qui veut dire que la notion de rayon classique de l'électron n'a aucun sens physique !

### 2.4.4 Aspect local de l'énergie électrostatique

Les équations locales de l'électrostatique permettent de donner une expression de l'énergie électrostatique différente de (2.52). On considère pour cela un volume ( $V$ ) englobant la distribution de charges ( $D$ ) dont

tous les points sont supposés à distance finie (cf Figure 2.11). On exclu donc le cas de charges à l'infini. On note  $(S)$  la surface englobant le volume  $(V)$ .

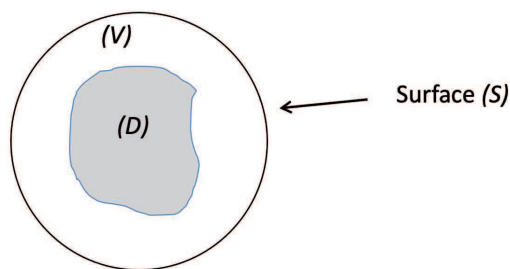


FIGURE 2.11 – Le calcul de la forme locale de l'énergie électrostatique repose sur un volume sphérique  $(V)$  englobant l'intégralité de la distribution  $(D)$  (voir texte).

En utilisant l'équation locale  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$  (valable en tout point du volume  $(V)$  englobant la distribution  $(D)$ ), on pourra écrire :

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}) \Phi dV \quad (2.53)$$

où l'intégrale est prise sur le volume  $(V)$ . En utilisant (A.8) qui s'écrit ici :

$$\vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{E}) = \Phi \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \vec{\nabla}(\Phi) \quad \text{soit} \quad \Phi \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{E}) + E^2$$

on obtient une nouvelle expression de l'énergie électrostatique :

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{E}) dV + \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \epsilon_0 E^2 dV$$

En utilisant le théorème d'**Ostrogradsky** (A.22), on obtient :

$$U_e = \frac{1}{2} \oint_{(S)} \epsilon_0 \Phi \vec{E} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \epsilon_0 E^2 dV \quad (2.54)$$

Cette relation est valable quelle que soit la surface  $(S)$ , tant que le volume  $(V)$  qu'elle délimite englobe la distribution  $\mathcal{D}$ . En prenant comme surface  $(S)$  une sphère de très grand rayon  $R$ , le potentiel  $\Phi$  décroît sur la sphère au moins comme  $1/R$  et le champ électrique au moins comme  $1/R^2$  (ces deux affirmations viennent de l'approximation dipolaire qui sera détaillée au § 2.5). Pour un angle solide  $d\Omega$  donné,  $dS$  tend vers l'infini comme  $R^2 d\Omega$ . L'élément d'intégration dans le 1<sup>er</sup> terme de (2.54) varie donc avec  $R$  comme :

$$\frac{1}{R} \times \frac{1}{R^2} \times R^2 d\Omega = \frac{1}{R} \times d\Omega$$

qui tend vers 0 quand  $R \rightarrow \infty$ . On en déduit donc que l'énergie électrostatique se met sous la forme :

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{Espace} \epsilon_0 E^2 dV \quad (2.55)$$

où l'intégrale est désormais prise sur l'espace entier. Tout se passe comme si l'énergie électrostatique était répartie dans l'espace entier avec la densité volumique :

$$u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \quad (2.56)$$

**Remarque 1 :** La relation (2.55) montre que  $U_e$  est toujours positive. Ceci démontre le résultat annoncé au § 2.4.3.

**Remarque 2 :** La relation (2.55) ne contient aucune référence explicite aux sources du champ  $\vec{E}$ .



---

## 2.5 Dipôles électrostatiques

Par définition, un *dipôle électrostatique* (cf Figure 2.12) est l'ensemble de deux charges opposées séparées par une distance  $d$  très faible devant la distance d'observation.

### 2.5.1 Dipôles et moments dipolaires

#### Moments dipolaires permanents

En utilisant les notations de la Figure 2.12, on introduit le *moment dipolaire électrique*  $\vec{p} = |q| \overrightarrow{NP}$ , ou *moment du dipôle* dont l'unité est le Coulomb.mètre (Cm) et où  $N$  et  $P$  représentent respectivement le barycentre des charges négatives et positives du dipôle.

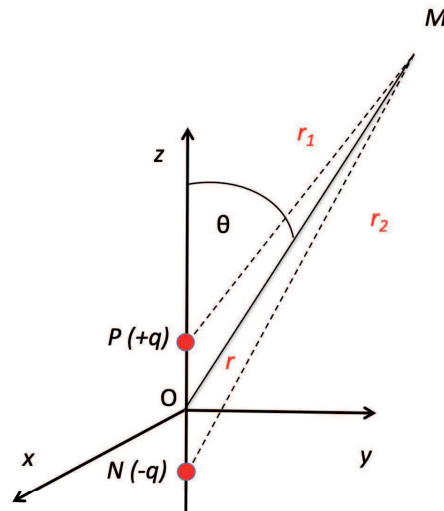


FIGURE 2.12 – Un dipôle électrostatique est l'ensemble de deux charges opposées, séparées par une distance  $NP$  très faible devant la distance d'observation  $OM$ .

**Remarque 1 :** On peut également définir un dipôle électrostatique comme la limite d'un ensemble de deux charges opposées  $+q$  et  $-q$ , placées en deux points  $N$  et  $P$ , lorsque  $NP \rightarrow 0$  tandis que  $p = qNP$  reste constant.

**Remarque 2 :** Les moments dipolaires s'expriment en SI en Cm et usuellement en Debye<sup>11</sup> (D).

Certaines molécules possèdent un moment dipolaire permanent. En effet, on peut classer les molécules en deux catégories (cf Figure 2.13) :

1. Les molécules *apolaires* possèdent un centre de symétrie. Ce sont, soit des molécules diatomiques constituées du même atome ( $H_2$ ,  $N_2$ ,  $O_2$ ), soit des molécules linéaires ( $CO_2$ ), soit des molécules possédant un fort degré de symétrie (tétraédrique ou benzénique, par exemple  $CH_4$  ou  $C_6H_6$ ). Par raison de symétrie, ces molécules ne possèdent pas de moment dipolaire permanent.
2. Les molécules *polaires*, les plus nombreuses, ne possèdent pas de centre de symétrie. Ce sont, soit des molécules diatomiques constituées de deux atomes différents ( $HCl$ ) ou des molécules non linéaires ( $H_2O$ ,  $NH_3$ ), soit toutes les molécules plus complexes. Toutes ces molécules possèdent un moment dipolaire permanent. La table 2.2 donne quelques moments dipolaires permanents de molécules polaires.

---

11. Par définition, 1 D correspond à  $10^{-18}$  unité CGS de moment dipolaire (ie  $10^{-3}/c$ ), soit finalement :

$$1 \text{ D} = 0,33356 \cdot 10^{-29} \text{ Cm} \approx \frac{1}{3} \cdot 10^{-29} \text{ Cm}$$

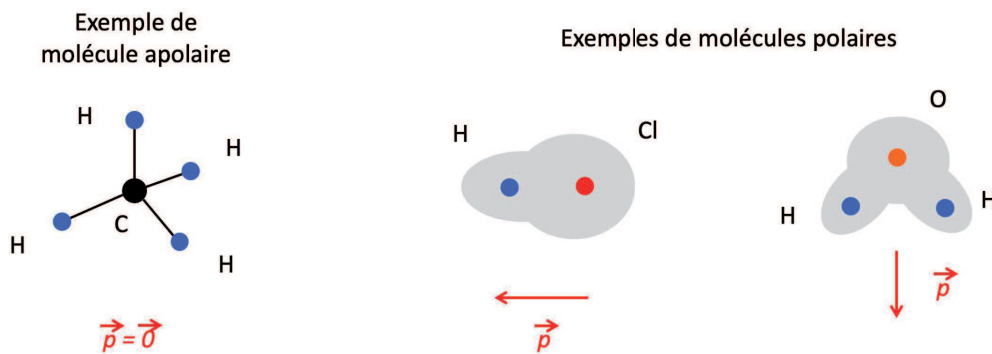


FIGURE 2.13 – Par raison de symétrie, certaines molécules sont apolaires (à gauche), tandis que la taille des nuages électroniques des atomes qui constituent une molécule ou la géométrie expliquent l'apparition d'un moment dipolaire permanent pour les molécules polaires (à droite).

CO	0,110	H <sub>2</sub> S	0,978	SO <sub>2</sub>	1,633	CH <sub>3</sub> Cl	1,896
NO	0,159	HCl	1,109	C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH	1,690	CH <sub>3</sub> CN	3,925
C <sub>7</sub> H <sub>8</sub>	0,375	NH <sub>3</sub>	1,472	H <sub>2</sub> O	1,855	(CH <sub>3</sub> ) <sub>2</sub> SO	3,960

TABLE 2.2 – Moments dipolaires électriques de quelques molécules polaires (en D).

### Moments dipolaires induits

Le principe de **Curie** permet de dire qu'un atome isolé dans son état fondamental aura un moment dipolaire nul puisque ses barycentres  $G^+$  et  $G^-$  des charges positives et négatives sont superposés (cf Figure 2.14). Par contre, l'application d'un champ externe  $\vec{E}$  va principalement décaler  $G^-$  et induire un moment dipolaire, appelé *moment dipolaire (électrique) induit*. Ceci est tout particulièrement vrai pour les gaz nobles (He, Ne, Ar et Kr). Le même phénomène se produit pour toutes les molécules, qu'elles soient polaires ou apolaires. Placées dans un champ  $\vec{E}$ , à l'équilibre, elles pourront développer un *moment dipolaire induit*.



FIGURE 2.14 – Déformation du nuage électronique d'un atome isolé sous l'influence d'un champ  $\vec{E}$ .

Dans tous les cas, ce moment dipolaire induit  $\vec{p}$  est donné par :

$$\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E} \quad (2.57)$$

où  $\alpha$  est la *polarisabilité* de l'atome ou de la molécule et  $\vec{E}$  le champ électrique qui subit l'objet. Pour une molécule polaire, ce moment induit s'ajoute simplement au moment permanent.

On appellera *dipôle rigide* un dipôle dont le moment dipolaire  $\vec{p}$  n'est pas modifié par un champ externe appliqué. Ce type de dipôle modélise bien les molécules polaires (HCl par exemple).

**Remarque :** L'importance de la notion de dipôle vient du fait que sous l'action d'un champ appliqué, certains corps, globalement neutres, peuvent se comporter comme des ensembles de dipôles. De plus, le dipôle apparaît quasiment automatiquement lorsqu'on cherche à calculer le champ et le potentiel d'une distribution de charges à grande distance (§ 2.5.5).

## 2.5.2 Potentiel et champ du dipôle électrostatique

### Potentiel créé à grande distance par un dipôle

Le potentiel en  $M$  est simplement la somme des potentiels créés par les deux charges  $q$  et  $-q$ . En reprenant les notations de la Figure 2.12 et en posant  $d = NP$  :

$$\Phi(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

avec :

$$r_1^2 = PM^2 = (\vec{PO} + \vec{OM})^2 = PO^2 + OM^2 + 2\vec{PO} \cdot \vec{OM} = \frac{d^2}{4} + r^2 - 2 \times \frac{d}{2} \times r \cos(\theta)$$

soit :

$$r_1^2 = r^2 + \frac{d^2}{4} - r d \cos(\theta) = r^2 \left( 1 - \frac{d}{r} \cos(\theta) + \frac{d^2}{4r^2} \right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{d}{2r} \cos(\theta) \right)$$

en négligeant les termes du 2<sup>e</sup> ordre en  $d/r$  puisqu'on se place dans l'hypothèse où  $r \gg d$ . De la même manière, on obtiendrait :

$$\frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{d}{2r} \cos(\theta) \right)$$

en remplaçant  $\theta$  par  $\pi - \theta$  dans l'expression de  $r_1$ . Finalement, il reste  $1/r_1 - 1/r_2 \approx d/r^2 \times \cos(\theta)$  et :

$$\Phi(M) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos(\theta)}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{r^2} \quad \text{avec} \quad \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.58)$$

**Remarque 1** : Un dipôle est uniquement caractérisé par son moment dipolaire électrique  $\vec{p}$ . Son potentiel décroît comme  $1/r^2$ , les termes en  $1/r$  s'annulant à cause de la neutralité électrique de l'ensemble.

**Remarque 2** : D'après (A.4), (2.58) peut également s'écrire :

$$\Phi(M) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (2.59)$$

### Champ créé à grande distance par un dipôle

Par raison de symétrie, le champ  $\vec{E}$  est contenu dans le plan  $NPM$  (cf Figure 2.15). Pour obtenir  $\vec{E}$ , on peut utiliser (2.59) et l'expression (A.36) du gradient en coordonnées cylindriques pour obtenir :

$$\vec{E}(M) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{p}}{r^3} \quad (2.60)$$

En coordonnées sphériques, on obtient l'expression plus courante :

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos(\theta)}{r^3} \quad E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin(\theta)}{r^3} \quad E_\phi = 0 \quad (2.61)$$

En notant  $E_0$  l'amplitude du champ dans la direction  $\theta = 0$ , le champ en un point  $M$  quelconque aura donc pour module :

$$E(M) = \frac{E_0}{2} \sqrt{1 + 3 \cos^2(\theta)} \quad \text{avec} \quad E_0 = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3} \quad (2.62)$$

En un point  $M$  donné, le champ fait avec  $OM$  l'angle  $\theta'$  donné par (cf Figure 2.15) :

$$\tan(\theta') = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2} \tan(\theta) \quad (2.63)$$

**Remarque 1 :** On remarque également que les termes en  $1/r^2$  s'annulent à cause de la neutralité globale de l'ensemble et que le terme dominant est en  $1/r^3$ . Le champ décroît donc plus rapidement que pour une charge ponctuelle.

**Remarque 2 :** Du point de vue de l'homogénéité des formules, la présence de  $1/r^3$  dans (2.60) ou (2.61) n'est pas surprenante car le moment dipolaire  $p$  "contient" une longueur.

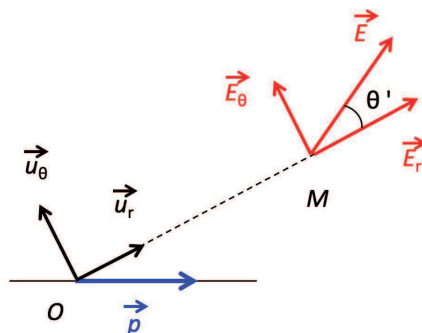


FIGURE 2.15 – Par raison de symétrie, le champ  $\vec{E}$  du dipôle est contenu dans le plan contenant l'axe du dipôle et le point  $M$  d'observation.

### Equipotentielles et lignes de champ du dipôle électrostatique

D'après (2.58), les surfaces équipotentiels au potentiel  $\Phi_0$  sont définies par  $\Phi_0 = Cste$ , soit dans le plan  $(\vec{u}_z, \vec{u}_r)$  :

$$\frac{p \cos(\theta)}{4 \pi \epsilon_0 r^2} = \Phi_0 = Cste \quad \text{ou} \quad r^2 = k \cos(\theta) \quad \text{avec} \quad k = \frac{p}{4 \pi \epsilon_0 \Phi_0} \quad (2.64)$$

La constante  $k$  est positive si  $\cos(\theta) > 0$  (ie  $\theta \in [-\pi/2; \pi/2]$ ) et négative si  $\cos(\theta) < 0$  (ie  $\theta \in [\pi/2; 3\pi/2]$ ). Les équipotentiels sont des surfaces de révolution autour de l'axe du dipôle (cf Figure 2.16). Le plan  $x = 0, y = 0$  correspond au potentiel  $\Phi = 0$ .

L'équation d'une ligne de champ sera  $d\vec{r} \times \vec{E} = \vec{0}$ , c'est-à-dire que localement,  $\vec{E}$  est parallèle aux lignes de champ. Comme  $d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$  et  $\vec{E} = E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta$ , on obtient :

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta} \quad \text{ou} \quad \frac{dr}{r} = \frac{2 \cos(\theta) d\theta}{\sin(\theta)} = \frac{2 d(\sin(\theta))}{\sin(\theta)}$$

en utilisant les expressions (2.61) de  $E_r$  et  $E_\theta$ . En intégrant, on obtient :

$$r = C \times \sin^2(\theta) \quad (2.65)$$

où  $C$  est une constante nécessairement positive. La figure 2.16 représente les lignes de champ et les équipotentiels. En chaque point différent de l'origine, ne passent qu'une surface équipotentielle et une ligne de champ.

**Remarque :** Les lignes de champ semblent revenir sur elles-mêmes au voisinage de l'origine  $O$ , ce qui peut sembler absurde car le champ étant dirigé vers les potentiels décroissants, une ligne de champ ne peut être fermée. L'incohérence est levée si l'on se souvient que près de l'origine, l'approximation  $r \gg d$  n'est plus valable. La zone centrale de la partie droite de la Figure 2.16 est donc contestable (et contestée!).

### Positions principales de Gauss

On appelle *positions principales de Gauss* le lieu des points  $M$  où  $\vec{E}(M)$  est colinéaire à  $\vec{p}$ . Il en existe de deux types différents :

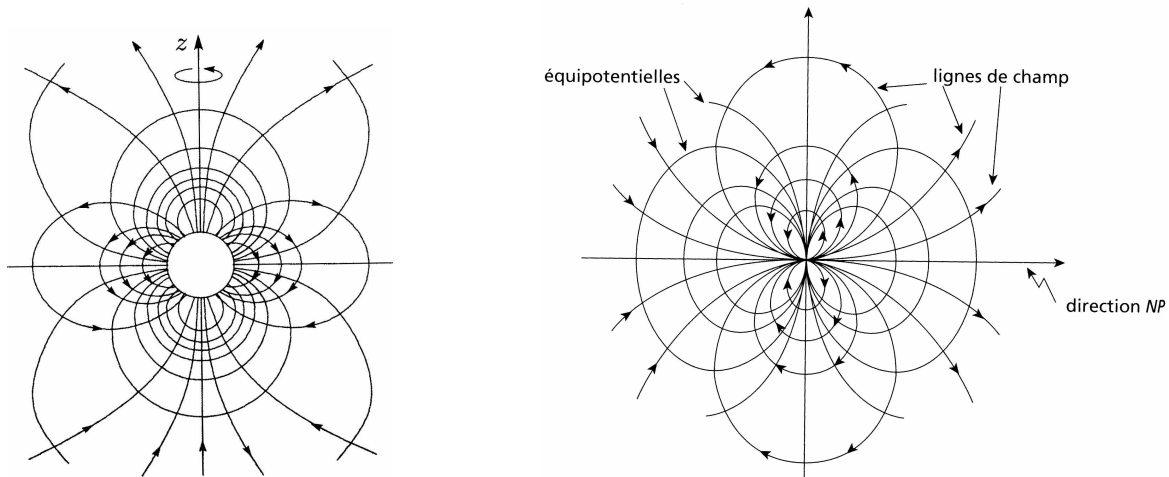


FIGURE 2.16 – Lignes de champ et équipotentiels du dipôle électrostatique. La zone centrale de la figure de gauche a été exclue car cette région ne respecte plus la condition  $d \ll r$  (Figures extraites de [9, page 72] à gauche et [8, page 92] à droite).

1. Les *premières positions principales de Gauss* correspondent à  $E_\theta = 0$ , c'est-à-dire à  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$  (cf Figure 2.17). D'après (2.61), on a alors :

$$\vec{E}(M) = \frac{2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (2.66)$$

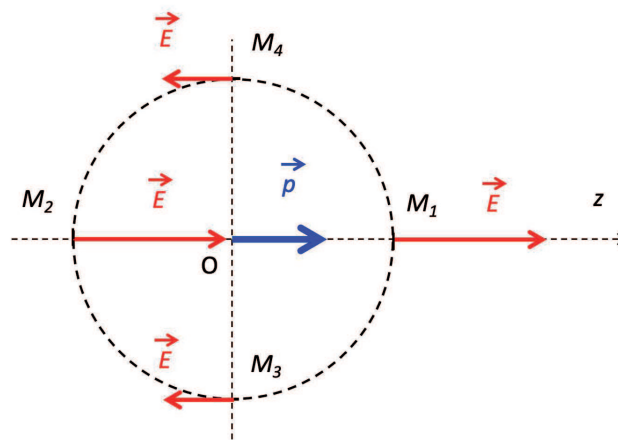


FIGURE 2.17 – Positions principales de **Gauss** pour un dipôle électrique  $\vec{p}$  correspondant à  $\theta = 0$  (position  $M_1$ ),  $\theta = \pi$  (position  $M_2$ ),  $\theta = \pi/2$  (position  $M_3$ ) et  $\theta = 3\pi/2$  (position  $M_4$ ) à  $r$  fixé.

2. Les *deuxièmes positions principales de Gauss* correspondent à  $E_r = 0$ , c'est-à-dire à  $\theta = \pi/2$  ou  $\theta = 3\pi/2$  (cf Figure 2.17). D'après (2.61), on a alors :

$$\vec{E}(M) = \frac{-\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (2.67)$$

Pour chaque valeur de  $r$ , il existe quatre positions principales de **Gauss** (Table 2.3).

### 2.5.3 Action mécanique d'un champ $\vec{E}$ sur un dipôle rigide

On considère un moment dipolaire  $\vec{p}$  placé dans un champ électrique extérieur. Le champ est  $\vec{E}$  en  $N$  où se situe la charge  $-q$ , et  $\vec{E} + d\vec{E}$  en  $P$  où se situe la charge  $+q$ . On suppose le dipôle rigide, c'est-à-dire que le

	Position 1	Position 3	Position 2	Position 4
Angle $\theta$	0	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$
Champ $\vec{E}$	$\vec{E}_0$	$-\vec{E}_0/2$	$\vec{E}_0$	$-\vec{E}_0/2$
Potentiel $\Phi$	$\Phi_0$	0	$-\Phi_0$	0

TABLE 2.3 – Valeurs relative du champ et du potentiel aux quatre positions principales de **Gauss**.

champ  $\vec{E}$  ne peut pas modifier la valeur de  $\vec{p}$ . La charge  $-q$  subit la force  $\vec{f}_N = -q\vec{E}$ , tandis que la charge  $+q$  subit la force  $\vec{f}_P = +q(\vec{E} + d\vec{E}) = -\vec{f}_N + q d\vec{E}$  (cf Figure 2.18).

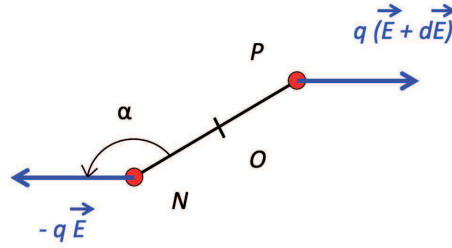


FIGURE 2.18 – Action d'un champ uniforme  $\vec{E}$  sur un dipôle.

Le dipôle est donc soumis à deux forces :

1. Un couple de moment résultant  $\vec{\Gamma} = \vec{f}_N \times \overrightarrow{NP}$ .
2. Une force résultante  $d\vec{f} = \vec{f}_N + \vec{f}_P = q d\vec{E}$ . Si le champ est uniforme, alors la résultante  $d\vec{f}$  sera nulle.

### Calcul du moment résultant

Le moment du couple vaut :

$$\vec{\Gamma} = \vec{f}_N \times \overrightarrow{NP} = q \overrightarrow{NP} \times \vec{E} \quad \text{ou encore} \quad \vec{\Gamma} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (2.68)$$

Dans un champ uniforme (pour lequel la résultante  $d\vec{f}$  est nulle), les positions d'équilibre du dipôle correspondent à  $\vec{p} // \vec{E}$ . Si l'angle  $\alpha$  entre  $\vec{p}$  et  $\vec{E}$  est nul, alors l'équilibre est stable. Il est instable si  $\alpha = \pi$ .

### Calcul de la force résultante

Dans le référentiel  $(O, x, y, z)$ , on note  $(x, y, z)$  les coordonnées de  $N$  et  $(x + dx, y + dy, z + dz)$  celles de  $P$ . Les composantes de  $\vec{p}$  sont donc  $(q dx, q dy, q dz)$ . Comme  $d\vec{E} = \partial\vec{E}/\partial x \times dx + \dots$ , la composante de  $d\vec{f}$  suivant  $Ox$  s'écrit :

$$df_x = q \frac{\partial E_x}{\partial x} dx + q \frac{\partial E_x}{\partial y} dy + q \frac{\partial E_x}{\partial z} dz$$

D'après la définition du potentiel  $\Phi$ , on a :

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

On fait de même pour  $\partial E_x/\partial z$  et on obtient :

$$df_x = q \frac{\partial E_x}{\partial x} dx + q \frac{\partial E_y}{\partial x} dy + q \frac{\partial E_z}{\partial x} dz = \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial x}$$

On procède de même pour  $df_y$  et  $df_z$  pour finalement obtenir :

$$d\vec{f} = \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \vec{u}_x + \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} \vec{u}_y + \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \vec{u}_z \quad (2.69)$$

qu'on note symboliquement :

$$d\vec{f} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \quad (2.70)$$

**Remarque 1 :** Si le champ  $\vec{E}$  est uniforme, la force résultante est nulle, ce qui était évident depuis le début puisque dans ce cas  $d\vec{E} \equiv \vec{0}$ . Un champ uniforme tend donc simplement à orienter un dipôle suivant les lignes de champ.

**Remarque 2 :** A l'échelle d'un dipôle, tout champ est quasiment uniforme. Au 1<sup>er</sup> ordre, l'effet principal d'un champ électrique quelconque sur un dipôle sera uniquement d'orienter ce dipôle dans le sens du champ.

**Remarque 3 :** Dans le cas particulier où le dipôle est parallèle au champ, la force tend à attirer le dipôle vers les champs intenses (si  $\vec{p}$  et  $\vec{E}$  sont orientés dans le même sens) ou vers les champs faibles (si  $\vec{p}$  et  $\vec{E}$  sont orientés dans des sens opposés). Il faut bien remarquer que ceci n'est qu'un cas particulier et que dans le cas général, la force subie par le dipôle n'est pas parallèle au champ  $\vec{E}$ .

**Remarque 4 :** L'expression (2.70) est en fait valable dans tous les cas, que le dipôle soit rigide ou non, et l'opérateur  $(\vec{p} \cdot \vec{\nabla})$ , qu'on a calculé ici en coordonnées cartésiennes, peut s'exprimer dans tous les systèmes de coordonnées.

**Remarque 5 :** En conclusion, on peut remarquer qu'un dipôle est entièrement caractérisé par son moment dipolaire  $\vec{p}$ , aussi bien du point de vue du champ qu'il crée (2.61) que des actions mécaniques auxquelles il est soumis.

## 2.5.4 Energie potentielle d'interaction d'un dipôle dans un champ

### Expression de l'énergie

On considère l'interaction entre un dipôle rigide et un champ externe  $\vec{E}$ . D'après ce qui a été dit précédemment, l'énergie d'interaction du dipôle avec le champ extérieur est égale au travail nécessaire pour amener le dipôle depuis l'infini jusqu'à sa position finale. Les forces que les deux charges du dipôle exercent entre elles ne travaillent pas car la distance entre les deux charges reste fixe. On ne doit donc considérer que le travail des deux forces que le champ appliqué exerce sur les deux charges en  $N$  et  $P$ .

D'après l'étude faite précédemment pour des charges ponctuelles dans un champ externe (2.50), le travail de l'opérateur apportant les charges depuis l'infini est :

$$W = q\Phi(P) - q\Phi(N)$$

et est par définition l'énergie potentielle d'interaction  $U_I$  du dipôle rigide dans le champ externe  $\vec{E}$ . Comme les point  $N$  et  $P$  sont voisins par hypothèse, on aura :

$$\Phi(P) - \Phi(N) \approx (\vec{\nabla}(\Phi)) \cdot \overrightarrow{NP} = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{NP}$$

d'où finalement en reprenant les notations de la Figure 2.18 :

$$U_I = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE \cos \theta \quad (2.71)$$

### Application : action mécanique d'un champ $\vec{E}$ sur un dipôle rigide

On considère un solide rigide subissant un ensemble de forces de résultante  $\vec{R}$  et de moment résultant  $\vec{\Gamma}_O$  calculé en un point  $O$ . On montre en mécanique que le travail  $dW$  de ces forces, associé à un déplacement élémentaire  $d\vec{r}$  et à une rotation élémentaire  $d\theta$  autour d'un axe  $(\Delta)$  de vecteur unitaire  $\vec{u}$  se met sous la forme :

$$dW = \vec{R} \cdot d\vec{r} + \vec{\Gamma}_O \cdot \vec{u} d\theta$$

et qu'un vecteur  $\vec{A}$  quelconque est modifié dans la rotation élémentaire de  $d\vec{A} = \vec{u} \times \vec{A} d\theta$ .

Dans le cas présent, on considère un dipôle effectuant un déplacement élémentaire. D'après (2.44), le travail des actions mécaniques qui s'exercent sur le dipôle s'écrit :

$$dW = -dU_I \quad \text{soit encore} \quad d(\vec{p} \cdot \vec{E}) = \vec{R} \cdot d\vec{r} + \vec{\Gamma}_O \cdot \vec{u} d\theta \quad (2.72)$$

Pour en déduire la résultante  $\vec{R}$  et le moment  $\vec{\Gamma}_O$  calculé par rapport au centre du dipôle, on procède en deux étapes. On imagine tout d'abord une translation du dipôle. On aura donc  $d\theta = 0$  tandis que  $\vec{p}$  reste constant. On déduit de (2.72) que :

$$\vec{R} = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}) \quad \text{avec} \quad \vec{p} = \text{Cste}$$

On pourrait montrer que cette relation est équivalente à (2.70).

On imagine ensuite dans une 2<sup>e</sup> étape une rotation élémentaire  $d\theta \vec{u}$  du dipôle, le point moyen  $O$  restant fixe. D'après ce qu'on a vu précédemment, le moment dipolaire  $\vec{p}$  tourne de  $d\vec{p} = \vec{u} \times \vec{p} d\theta$ . Le bilan (2.72) s'écrit alors :

$$\vec{\Gamma}_O \cdot \vec{u} d\theta = (\vec{p} \times \vec{E}) \cdot \vec{u} d\theta$$

On en déduit que :

$$\vec{\Gamma}_O = \vec{p} \times \vec{E}$$

On a donc retrouvé par des considérations énergétiques les expressions (2.68) et (2.70) traduisant l'action d'un champ sur un dipôle rigide.

### Application : action mécanique d'une charge sur un dipôle

On considère un dipôle de moment  $\vec{p}$  situé en un point  $M$  et une charge  $q$  située en  $O$  (cf Figure 2.19). On peut montrer (voir par exemple [8, page 95]) que la force  $\vec{F}$  s'exerçant sur le dipôle s'écrit :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qp}{r^3} [-2 \cos(\phi) \vec{u}_r + \sin(\phi) \vec{u}_\theta]$$

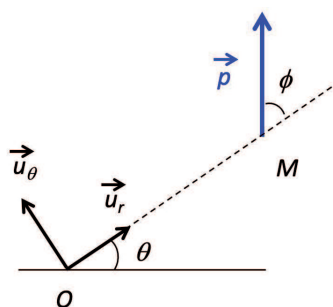


FIGURE 2.19 – Action d'une charge sur un dipôle électrostatique.

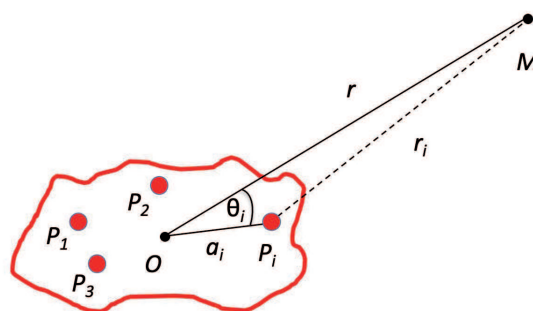


FIGURE 2.20 – L'approximation dipolaire permet d'obtenir l'expression du potentiel à grande distance d'une distribution de charges discrètes (voir texte).

### 2.5.5 Approximation dipolaire

On peut utiliser la même procédure qu'au § 2.5.2 pour traiter le cas d'une distribution de charges discrètes dans le cadre de l'*approximation dipolaire*, sans préjugé a priori sur la charge totale de la distribution.



---

## Potentiel créé par une distribution de charge ponctuelles

On prend les notations de la Figure 2.20. Le potentiel en  $M$  est :

$$\Phi(M) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{A_i M} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{A_i M} = \frac{1}{r} \left( 1 - 2 \frac{a_i}{r} \cos(\theta_i) + \frac{a_i^2}{r^2} \right)^{-1/2} \quad (2.73)$$

car  $A_i M^2 = r^2 - 2 a_i r \cos(\theta_i) + a_i^2$ . En utilisant le développement limité  $(1 + \epsilon)^{-1/2} \approx 1 - \epsilon/2 + 3/8 \times \epsilon^2 + \dots$  pour  $\epsilon \ll 1$ , on peut écrire :

$$\frac{1}{A_i M} \approx \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{a_i^2}{r^2} - \frac{2 a_i}{r} \cos(\theta_i) \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{a_i^4}{r^4} + \frac{4 a_i^2}{r^2} \cos^2(\theta_i) - \frac{4 a_i^3}{r^3} \cos(\theta_i) \right) + \dots \right] \quad (2.74)$$

En ne conservant que les termes au deuxième ordre en  $a/r$ , on obtient :

$$\frac{1}{A_i M} \approx \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{a_i}{r} \cos(\theta_i) + \frac{1}{2} \frac{a_i^2}{r^2} (3 \cos^2(\theta_i) - 1) \right]$$

Le potentiel en  $M$  s'écrit finalement :

$$\Phi(M) = \Phi_0(r) + \Phi_1(r) + \Phi_2(r) + \dots$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi_0(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \sum_i q_i & \text{est la contribution unipolaire} \\ \Phi_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sum_i q_i a_i \cos(\theta_i) & \text{est la contribution dipolaire} \\ \Phi_2(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \sum_i q_i a_i^2 \left( \frac{3}{2} \cos^2(\theta_i) - \frac{1}{2} \right) & \text{est la contribution quadrupolaire} \end{array} \right. \quad (2.75)$$

### Distribution unipolaire

La distribution est dite *unipolaire* (ou *monopolaire* ou *polaire*) lorsque la charge totale de la distribution  $Q = \sum_i q_i$  est non nulle. En plaçant l'origine au barycentre électrique des points  $P_i$  (affectés de leurs charges  $q_i$ ), au 3<sup>e</sup> ordre près, la distribution se comporte alors comme une charge ponctuelle puisqu'alors :

$$\Phi(M) \approx \Phi_0(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (2.76)$$

### Distribution dipolaire

Dans le cas où la charge totale est nulle (le barycentre des charges n'est alors plus défini!),  $\Phi_0(r) = 0$ , et le 1<sup>er</sup> terme du développement du potentiel permet d'écrire :

$$\Phi(M) \approx \Phi_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sum_i q_i a_i \cos(\theta_i) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{P} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{1}{r} \right) \quad \text{avec} \quad \vec{P} = \sum_i q_i \overrightarrow{OP_i} \quad (2.77)$$

où  $\vec{P}$  (qui ne dépend pas du choix de l'origine) est le *moment dipolaire* de la distribution<sup>12</sup>. Si  $\vec{P}$  est non nul, la distribution est dite *dipolaire*.

---

12. Pour des distributions de charge volumique, surfacique ou linéique, le moment dipolaire s'écrit avec des notations évidentes :

$$\vec{P} \equiv \iiint_{(V)} \rho(\vec{r}) \vec{r} dV \quad \vec{P} \equiv \iint_{(S)} \sigma(\vec{r}) \vec{r} dS \quad \vec{P} \equiv \int_{(C)} \lambda(\vec{r}) \vec{r} dl$$

## Distribution quadrupolaire

Si la charge totale  $Q$  et le moment dipolaire  $\vec{\mathcal{P}}$  sont nuls ( $\vec{\mathcal{P}}$  peut par exemple être nul dans le cas d'une symétrie sphérique), le terme suivant dans le développement limité est le terme *quadrupolaire* :

$$\Phi(M) \approx \Phi_2(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \sum_i q_i a_i^2 \left( \frac{3}{2} \cos^2(\theta_i) - \frac{1}{2} \right) \quad (2.78)$$

On pourrait montrer que ce terme est caractérisé dans une base orthonormée par neuf termes de la forme :

$$\mathcal{Q}_{\alpha\beta} = \sum_i q_i x_{i\alpha} x_{i\beta}$$

où  $x_{i\alpha}$  et  $x_{i\beta}$  sont les composantes de  $\vec{OP}_i$  suivant les vecteurs de base  $\vec{u}_\alpha$  et  $\vec{u}_\beta$ . Les termes  $\mathcal{Q}$  constituent les éléments du *tenseur quadrupolaire*.

**Remarque 1 :** La force exercée par une distribution dipolaire sur une charge éloignée n'est en général pas radiale.

**Remarque 2 :** Le terme unipolaire est caractérisé par un tenseur d'ordre 0 (la charge totale  $Q$ ), le terme dipolaire est caractérisé par un tenseur d'ordre 1 (le moment dipolaire  $\vec{\mathcal{P}}$ ), le terme quadrupolaire est caractérisé par un tenseur d'ordre 2 (dont les composantes sont les  $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}$ ), ...

**Remarque 3 :** Il est immédiat de voir (cf Figure 2.21) qu'en plaçant deux dipôles de sens opposé côte-à-côte, on obtient un *quadrupôle*, que deux quadrupôles côte-à-côte forment un *octupôle*, etc ...

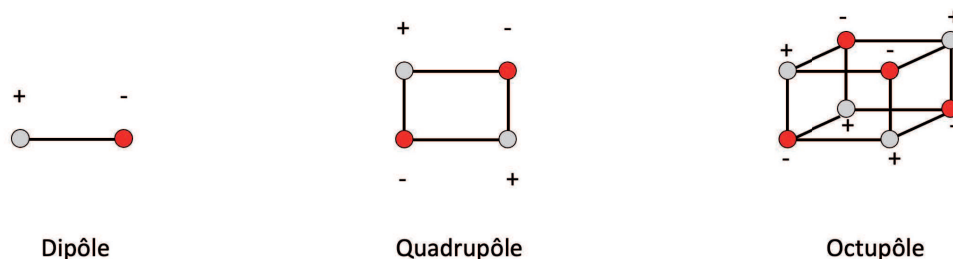


FIGURE 2.21 – Position des charges + et – amenant à grande distance une distribution dipolaire, quadrupolaire ou octupolaire.

**Remarque 4 :** Le champ dipolaire décroît comme  $1/r^3$ . En plaçant deux dipôles côte-à-côte, le champ quadrupolaire ainsi créé va décroître plus rapidement encore, etc.. Ceci explique par exemple pourquoi une goutte d'eau contenant plus de  $10^{18}$  molécules ne crée pas de champ électrique, alors que chaque molécule porte un moment dipolaire! Il y a une exception : lorsque les moments dipolaires s'alignent de manière cohérente dans une direction donnée.

**Remarque 5 :** En mécanique, le barycentre mécanique n'est jamais nul car  $\sum_i m_i \neq 0$ . Le terme unipolaire est alors toujours prépondérant.

# Chapitre 3

## Magnétostatique

### Sommaire

---

3.1	Action du champ magnétique . . . . .	76
3.2	Loi de Biot et Savart . . . . .	79
3.3	Théorème d'Ampère et équations de la magnétostatique . . . . .	82
3.4	Méthodes de calcul en magnétostatique . . . . .	85
3.5	Travail mécanique des forces de Laplace . . . . .	86
3.6	Dipôles magnétiques . . . . .	88

---

### Introduction

En Occident, certains effets magnétiques sont connus depuis l'Antiquité, en particulier l'attraction exercée sur le fer par la *magnétite*<sup>1</sup>. A la même époque, mais de manière indépendante, le magnétisme était également connu en Chine avec l'introduction de la boussole<sup>2</sup>. Le lien avec l'électricité fut établi au début du 19<sup>e</sup> siècle.

Avec nos connaissances actuelles, ces interactions à distance s'interprètent par l'existence d'un champ créé en tout point de l'espace par des charges en mouvement (mouvements orbitaux des électrons qui constituent les atomes des aimants permanents, ou mouvement des électrons libres dans un conducteur). Pour les mêmes raisons qu'en électrostatique (§ 2.1.2), l'action à distance a été progressivement remplacée par une action locale, celle du *champ magnétique*.

On appelle *magnétostatique* l'étude des champs magnétiques constants, créés par des aimants permanents ou par des courants constants. Des charges électriques se déplaçant à vitesse constante, créent des *courants permanents* dont les effets magnétiques, indépendants du temps, entrent dans le cadre de cette étude et seront étudiés dans ce chapitre<sup>3</sup>. On supposera que la structure du conducteur n'a pas d'influence. Les aimants permanents seront étudiés au chapitre 7.

Comme on l'a déjà vu pour les phénomènes dépendant du temps (§ 1.6.3), on peut définir le champ magnétique de plusieurs façons, liées à la force de **Lorentz** ou à l'action sur un fil parcouru par un courant. Le champ magnétique s'exprime en *Tesla* (T)<sup>4</sup>.

La table 3.1 donne quelques ordres de grandeur de champs magnétiques.

---

1. Du nom de la ville de Magnésie, en Asie Mineure, d'où étaient originaires les premiers aimants naturels connus dans l'Antiquité en Occident.

2. Un traité militaire chinois explique en 1044 comment fabriquer une boussole : partir d'une fine feuille de fer taillée en forme de poisson pour qu'elle puisse flotter sur l'eau, puis la porter au rouge dans un feu **en la maintenant dans la direction nord-sud** et la plonger rapidement dans l'eau.

3. Si on voulait être cohérent avec la nomenclature de l'électrostatique, il faudrait parler de *régime magnétostationnaire* et non *magnétostatique*.

4. On utilise également couramment le *Gauss* (G) défini par  $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$ . Attention, l'unité du système MKSA est bien le Tesla !

---

Surface d'une étoile à neutrons		10 <sup>8</sup> T
Dans une bobine supraconductrice de petit volume		10 - 50 T
Dans d'un gros électroaimant		2 T
Proximité d'un petit barreau aimanté		10 <sup>-2</sup> T
Surface de la Terre		2 - 4 · 10 <sup>-5</sup> T
Espace interstellaire		10 <sup>-10</sup> T
Sur Terre, protégé par un excellent blindage magnétique		10 <sup>-14</sup> T

TABLE 3.1 – Quelques valeurs typiques de champs magnétiques, mesurées ou estimées.

## 3.1 Action du champ magnétique

Ce paragraphe résume l'action d'un champ  $\vec{B}$  sur tout type de distribution de charges.

### 3.1.1 Lignes de champ

A l'aide de ce qu'on a vu au § 1.6.3, on peut représenter les champs magnétiques par des lignes de champ, tout comme les champs électriques, en utilisant le même formalisme, c'est-à-dire qu'en tout point,  $\vec{B}$  est tangent à la ligne de champ et que l'espacement entre les lignes de champ traduit la valeur du champ  $\vec{B}$ .

### 3.1.2 Action d'un champ $\vec{B}$ sur une charge ponctuelle

#### Force exercée sur une charge ponctuelle

Une particule de charge  $q$  et de vitesse  $\vec{v}$  soumise à l'action d'un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  subit la *force de Lorentz*<sup>5</sup> :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.1)$$

On en déduit en particulier qu'une particule au repos ne subit pas l'influence d'un champ magnétique. Dans le cas où la particule se déplace dans une région de l'espace où il n'existe pas de champ  $\vec{E}$ , elle subira simplement la *force magnétique* :

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (3.2)$$

Comme la puissance associée à la force magnétique  $\vec{F}_m$  est toujours nulle<sup>6</sup>, la puissance  $\mathcal{P}_L$  associée à la force de **Lorentz** vaut :

$$\mathcal{P}_L = q\vec{E} \cdot \vec{v} \quad (3.3)$$

**Remarque 1 :** On a défini (§ 2.1.2) le champ électrostatique comme le rapport entre la force électrostatique et la charge électrique statique sur laquelle la force s'applique à la limite des charges nulles. On ne peut pas faire de même pour le champ magnétique car on ne connaît pas de charge magnétique libre.

**Remarque 2 :** Comme on l'a déjà vu au § 1.6.3,  $\vec{B}$  dépend de la convention d'orientation de l'espace. C'est un *pseudo-vecteur*, ou *vecteur axial*.

---

5. Vous verrez en relativité que cette expression reste valable en relativité restreinte.

6. Le travail de cette force est toujours nul car :

$$\vec{F}_m \cdot \vec{v} dt = (q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt \equiv 0$$

D'après le théorème de l'énergie cinétique, on en déduit que la force magnétique ne modifie pas l'énergie cinétique d'une charge. En particulier, elle ne peut pas mettre en mouvement une charge initialement au repos. On dit que *le champ magnétique ne travaille pas*.

## Mouvement dans un champ $\vec{B}$ uniforme

On considère une charge  $q < 0$  se déplaçant dans un champ  $\vec{B}$ . On note  $\vec{v}_{//}$  et  $\vec{v}_{\perp}$  les composantes de sa vitesse respectivement parallèle et orthogonale au champ  $\vec{B}$  pris selon  $Oz$  (cf Fig 3.1). On a :

$$m \frac{d(\vec{v}_{//} + \vec{v}_{\perp})}{dt} = q(\vec{v}_{//} + \vec{v}_{\perp}) \times B \vec{u}_z$$

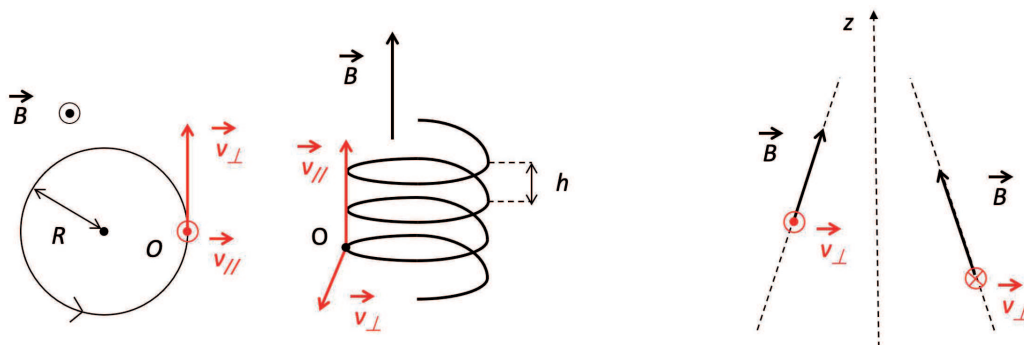


FIGURE 3.1 – Mouvement d'une charge  $q < 0$  dans un champ  $\vec{B}$  uniforme (à gauche) et non uniforme (à droite).

Comme  $\vec{v}_{//} \times \vec{u}_z \equiv \vec{0}$ , on obtient deux équations découplées :

$$\frac{d\vec{v}_{//}}{dt} = \vec{0} \quad \text{et} \quad m \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = q \vec{v}_{\perp} \times B \vec{u}_z \quad (3.4)$$

La 1<sup>re</sup> équation montre que  $\vec{v}_{//}$  reste constant. Comme la force magnétique ne travaille pas, on a donc  $v = \sqrt{v_{//}^2 + v_{\perp}^2} = \text{cste}$ , ce qui implique que  $v_{\perp}$  reste également constant. La 2<sup>e</sup> équation permet d'écrire l'accélération transverse  $\vec{a}_{\perp}$  sous la forme :

$$\vec{a}_{\perp} = \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = \vec{\omega}_c \times \vec{v}_{\perp} \quad \text{avec} \quad \vec{\omega}_c = -\frac{qB}{m} \vec{u}_z \quad (3.5)$$

où  $\omega_c$  est la *pulsation cyclotron*. Le mouvement dans le plan transverse est un mouvement circulaire uniforme, de rayon  $R = v_{\perp}/\omega_c = m v_{\perp}/(|q|B)$ . La combinaison des deux mouvements est un mouvement hélicoïdal de pas  $h$ . Comme la période  $T_c$  vaut  $T_c = 2\pi/\omega_c$ , le pas  $h$  s'écrit  $h = v_{//} T_c = v_{//} \times (2\pi m)/(|q|B)$ .

## Mouvement dans un champ $\vec{B}$ non uniforme

On considère désormais un champ  $\vec{B}$  à symétrie de révolution autour de l'axe ( $Oz$ ) (cf Fig 3.1) dont les lignes de champ se resserrent. La force magnétique  $\vec{F}_m$  comprend une composante parallèle à  $\vec{B}$  qui s'oppose au mouvement longitudinal de la charge  $q$ . La diminution constante de  $\vec{v}_{//}$  jusqu'à son annulation provoque une réflexion de la charge à l'extrémité du cône formé par les lignes de champ.

## Combinaison d'un champ $\vec{B}$ et d'un champ $\vec{E}$

La combinaison d'un champ  $\vec{E}$  avec un champ magnétique  $\vec{B}$  entraînera la superposition d'une dérive due au champ  $\vec{E}$  au mouvement dû à  $\vec{B}$ .

### 3.1.3 Action d'un champ $\vec{B}$ sur un courant

#### Cas d'une distribution volumique de courant

On suppose que le milieu conducteur ne perturbe pas le champ  $\vec{B}$  qui agit sur les porteurs de charges du milieu. On note  $dV$  un volume mésoscopique autour d'un point  $M$ . Dans ce volume, une particule de charge

$q$  et de vitesse  $\vec{v}_i$  est soumise à la force  $q \vec{v}_i \times \vec{B}$ . L'ensemble des porteurs de charges est donc soumis à la force :

$$d\vec{F} = \sum_i \left( (n_i dV) q \vec{v}_i \times \vec{B} \right) = q \left( \sum_i n_i \vec{v}_i \right) \times \vec{B} dV = \vec{J} \times \vec{B} dV$$

puisque la densité volumique de courants totale s'écrit  $\vec{J} = q \sum_i n_i \vec{v}_i$ . On en déduit la *densité volumique de force* magnétique  $\vec{F}_v$  :

$$\vec{F}_v = \frac{d\vec{F}}{dV} = \vec{J} \times \vec{B} \quad (3.6)$$

**Remarque :** Si on adjoint un champ  $\vec{E}$  au champ  $\vec{B}$ , la densité volumique de force devient  $\vec{F}_v = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$  où  $\rho$  et  $\vec{J}$  sont les densités volumiques totales de charge et de courant. Dans ce cas, la puissance élémentaire  $d\mathcal{P}_L$  de la force de **Lorentz** s'écrit :

$$d\mathcal{P}_L = \rho \vec{E} \cdot \vec{v} dV = \vec{J} \cdot \vec{E} dV \quad (3.7)$$

### Cas d'une distribution surfacique de courant

Un élément de surface  $dS$  de densité surfacique de courant  $\vec{J}_s$  est soumis à la force  $d\vec{F} = dq \vec{v} \times \vec{B} = \vec{J}_s \times \vec{B} dS$ . La *densité surfacique de force*  $\vec{F}_s$  (telle que  $d\vec{F} = \vec{F}_s dS$ ) est donc :

$$\vec{F}_s = \vec{J}_s \times \vec{B} \quad (3.8)$$

### Cas d'une distribution linéique de courant

Un élément de longueur  $dl$  parcouru par un courant  $I$  est soumis à la force, dite *force de Laplace* :

$$d\vec{F} = dq \vec{v} \times \vec{B} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (3.9)$$

Cette relation est connue sous le nom de *loi de Laplace*. Un champ magnétique va donc exercer une action mécanique sur un conducteur filiforme (cf Figure 3.2).

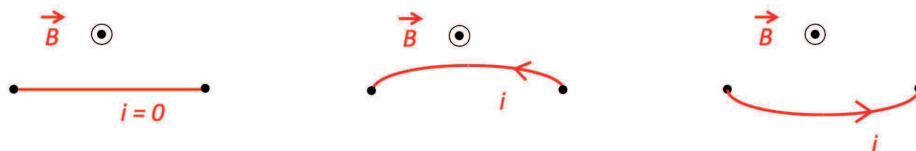


FIGURE 3.2 – Un fil dans un champ magnétique est soumis à une force décrite par la loi de **Laplace**.

### Effet Hall

Des électrons de conduction dans un conducteur métallique sont déviés par un champ magnétique et provoquent l'apparition d'une tension dans la direction orthogonale au champ. C'est l'*effet Hall*, décrit en Illustration C.2.2.

**Remarque 1 :** Comme en électrostatique (§ 2.1.2), du fait que les fonctions qu'on utilise sont généralement continues à dérivées continues, on transforme souvent des équations obtenues pour des distributions dues à des charges ponctuelles, en des équations utilisant des densités linéiques, surfaciques ou volumiques, à l'aide de la "recette" suivante :

$$\sum_{i=1}^n ( ) q_i \vec{v}_i \iff \int_{Ligne} ( ) \vec{I} dl \iff \iint_{Surface} ( ) \vec{K} dn \iff \iiint_{Volume} ( ) \vec{J} dV$$

### Remarque 2 : Différence entre les forces de Laplace et de Lorentz

1. Les forces de **Laplace** (macroscopique) et de **Lorentz** (microscopique) traitent toutes les deux de l'action d'un champ  $\vec{B}$  sur une particule chargée en mouvement. Mais il ne faut pas les confondre. La différence vient de la prise en compte des charges immobiles du matériau (ions du réseau cristallin par exemple) qui permettent de transmettre la force de **Lorentz** subie par les charges mobiles à l'ensemble du matériau. En effet, le champ  $\vec{B}$  produit un effet **Hall** dans le matériau. Pour les porteurs de charge mobiles du matériau, la force de **Lorentz** totale est alors nulle (la somme des contributions électriques et magnétiques s'annule), alors que les porteurs de charge immobiles ne ressentent que la partie électrique de la force de **Lorentz**. La résultante macroscopique de cette force est la force de **Laplace**.
2. Le travail de la composante magnétique de la force de **Lorentz** est toujours nul, car elle est perpendiculaire au déplacement de l'électron, et seule la composante électrique travaille. Le travail de la force de **Laplace** n'est jamais nul car le matériau se déplace dans le sens de la force.

## 3.2 Loi de Biot et Savart

### 3.2.1 Circuit filiforme parcouru par un courant constant

En 1820, **Oersted** observe qu'un courant électrique dans un fil dévie l'aiguille d'une boussole placée à proximité (Figure 3.2.1). Cette expérience prouve sans ambiguïté le lien entre le courant électrique et le champ magnétique. C'est la première fois qu'on met en évidence une force qui n'est pas suivant la droite joignant les deux corps en interaction. Quelques mois après, **Biot** et **Savart** établissent expérimentalement que le champ créé en un point  $M$  par un fil rectiligne très long parcouru par un courant  $I$  à une distance  $r$  du fil est orthoradial, proportionnel à l'intensité  $I$  et inversement proportionnel à la distance  $r$  du point au fil (cf Figure 3.2.1), soit :

$$\vec{B}(M) = C_{ste} \times \frac{I}{r} \vec{u}_\theta \quad (3.10)$$

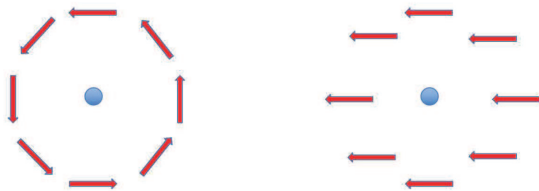


FIGURE 3.3 – Un courant passant au centre d'un ensemble de boussoles modifie la direction qu'elles indiquent (à gauche) par rapport à la situation sans courant dans le fil (à droite).

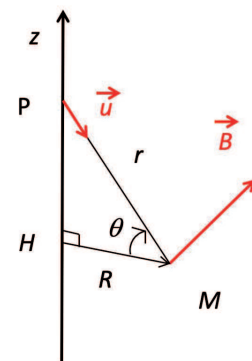


FIGURE 3.4 – Notations utilisées pour l'expression de la loi de **Biot** et **Savart** (voir texte).

**Laplace** essaye alors d'interpréter ce résultat de manière identique au problème du champ  $\vec{E}$  créé par un fil portant une densité linéique de charges  $\lambda$  pour lequel on avait obtenu (§ 2.1.2) :

$$\vec{E}_{lin} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda d\ell}{r^2} \vec{u} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

Pour cela, il faut remplacer l'élément scalaire de charge  $\lambda d\ell$  par l'élément vectoriel  $I \vec{d\ell}$  et obtenir un vecteur orthoradial (selon  $\vec{u}_\theta$ ). La solution la plus simple est un produit vectoriel. En utilisant les bonnes constantes

(dues au choix des unités), il propose :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{\ell} \times \vec{u}}{r^2} \quad (3.11)$$

où la constante  $\mu_0$  est la *perméabilité magnétique du vide* et vaut  $4\pi \cdot 10^{-7}$  N/A<sup>2</sup> ou H/m dans le système international. Cette loi, décrivant correctement le champ d'un fil infini, est ensuite étendue au cas général. La preuve de sa validité réside dans le fait qu'elle n'a jamais été mise en défaut.. On retiendra donc l'expression de la *loi de Biot et Savart*<sup>7</sup> :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C)} \frac{I d\vec{\ell} \times \vec{u}}{r^2} \quad (3.12)$$

qui relie l'induction magnétique  $\vec{B}$  aux courants parcourant un conducteur de géométrie quelconque.

**Remarque 1 :** Cette expression de  $\vec{B}$  correspond bien à un vecteur axial à cause de la présence du produit vectoriel  $d\vec{\ell} \times \vec{u}$ .

**Remarque 2 :** La loi de **Biot et Savart** ne dépend que du courant qui circule et est valable quelque soit la vitesse des particules qui créent le courant. Cette vitesse est très faible dans un conducteur métallique (de l'ordre de quelques cm/s), mais peut être voisine de  $c$  dans un faisceau de protons de plusieurs TeV, qu'on peut assimiler à un courant. Dans tous les cas, le champ mesuré est en accord avec la loi de **Biot et Savart**. Il est remarquable que cette loi phénoménologique soit valable sur plus de 10 ordres de grandeur !

**Remarque 3 :** Il faut faire attention à ne pas donner de forme différentielle de cette loi : un élément de courant isolé ne peut exister en magnétostatique (au contraire de l'électrostatique où on peut imaginer une charge ponctuelle isolée) car il transporterait en permanence des charges d'un bout à l'autre du circuit, ce qui n'est pas compatible avec une densité volumique de charge constante. Suite à la forme de la loi de **Biot et Savart**, on est tenté de dire que le champ  $d\vec{B}$  créé par une portion infinitésimale de circuit  $d\vec{\ell}$  est de la forme :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \times \vec{u}}{r^2} \quad \text{et que} \quad \vec{B}(M) = \oint d\vec{B}(M) \quad (3.13)$$

Attention, même si on trouve ceci dans de nombreux ouvrages (par exemple [12, page 185]), c'est faux ! Rien ne prouve que la contribution effective de chaque élément de courant soit donné par (3.13)<sup>8</sup>. **La loi de Biot et Savart est une loi intégrale** et toute écriture d'une quantité infinitésimale  $dB$  doit uniquement être considérée comme un artifice de calcul.

## 3.2.2 Forces d'interaction entre courants permanents

### Interaction entre circuits filiformes

La loi de **Biot et Savart** permet de calculer le champ créé en un point  $M_2$  par un circuit  $(C_1)$  parcouru par le courant  $I_1$  (cf Figure 3.5) :

$$\vec{B}(M_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C_1)} I_1 \frac{d\vec{\ell}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \quad \text{avec} \quad \vec{r}_{12} = \overrightarrow{M_1 M_2}$$

Un élément  $d\vec{\ell}_2$  du circuit  $(C_2)$  est donc soumis à la force de **Laplace** :

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 d\vec{\ell}_2 \times \left( \oint_{(C_1)} d\vec{\ell}_1 \times \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right)$$

7. Le nom de *loi de Biot et Savart* a été proposé par **Laplace**.

8. De même, on ne peut pas déduire que  $f(x) = g(x)$  sur l'intervalle  $[a, b]$  si on a :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$$



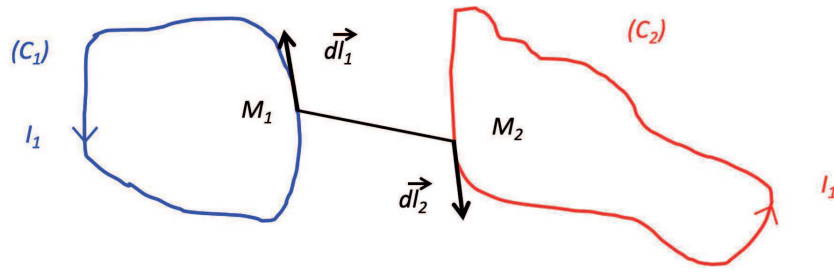


FIGURE 3.5 – L'interaction entre deux circuits filiformes suit la loi de l'action et de la réaction (voir texte).

soit :

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{(C_1)} \oint_{(C_2)} d\vec{\ell}_2 \times \left( d\vec{\ell}_1 \times \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) \quad (3.14)$$

en intégrant sur le circuit  $(C_2)$ . Un calcul simple (voir par exemple [8, page 193]) conduit à :

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{(C_1)} \oint_{(C_2)} (d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2) \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \quad (3.15)$$

En permutant les indices, on obtient l'expression  $\vec{F}_{21}$  de la force exercée sur le circuit  $(C_1)$  par le circuit  $(C_2)$ . Comme  $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$ , on a finalement :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (3.16)$$

Ce résultat montre que les forces totales s'exerçant entre deux circuits parcourus par des courants constants obéissent au principe de l'action et de la réaction.

**Remarque :** Cette loi est une loi intégrale et n'est pas valable si on considère des portions de circuit (découle du caractère intégral de la loi de **Biot** et **Savart**).

### Interaction entre deux courants parallèles

On considère deux fils parallèles, parcourus par des courants  $I_1$  et  $I_2$ . Le conducteur  $(C_1)$  crée en tout point du conducteur  $(C_2)$  un champ magnétique perpendiculaire au plan défini par les deux conducteurs et de module  $B = \mu_0 I_1 / (2\pi d)$ . Sur une portion de longueur  $\ell$  du conducteur  $(C_2)$ , il exerce une force  $\vec{F}$  telle que :

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2 \ell}{d} \vec{u} \quad (3.17)$$

Cette force est attractive si  $I_1$  et  $I_2$  sont de même sens, répulsive dans le cas contraire.

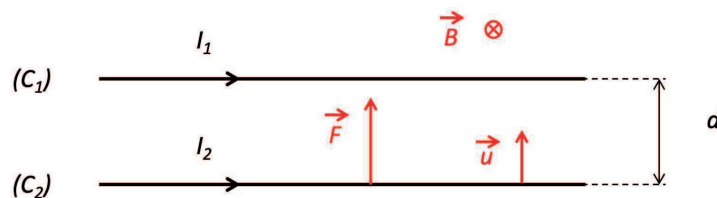


FIGURE 3.6 – La force s'exerçant entre deux conducteurs parcourus par des courants est attractive si les courants sont de même sens et répulsive dans le cas contraire.

### Remarque 1 : Définition de l'ampère

De 1948 à 2019, la définition de l'ampère est basée sur (3.17) : l'ampère est alors l'intensité d'un courant constant qui, maintenue dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, infinis et espacés de un mètre, produit

entre ces conducteurs une force de  $2,0 \cdot 10^{-7}$  N/m, ce qui revient à fixer la valeur de  $\mu_0$ . En 1981, la valeur de  $c$  sert de définition au mètre. La permittivité du vide  $\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$  est donc également fixée.

En 2019, une nouvelle définition est adoptée : l'ampère est alors défini en partant de la valeur numérique fixée de la charge élémentaire,  $e$  (égale à  $1,602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}$  C), puisque  $1\text{ C} \equiv 1\text{ As}$ .

### Remarque 2 : Magnétostatique et charges isolées

La magnétostatique étudie les champs induits par des courants permanents. Une tentative d'extension de la magnétostatique aux charges isolées est abordée en Complément D.4.

### 3.2.3 Densité volumique de courants constants

Dans le cas d'une densité volumique de courant  $\vec{J}$ , la loi de **Biot** et **Savart** (3.12) devient :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V)} \vec{J}(P) \times \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} d^3P \quad (3.18)$$

### 3.2.4 Lignes de champ

On peut représenter les champs magnétiques par des lignes de champ, tout comme les champs électriques, en utilisant le même formalisme : en tout point,  $\vec{B}$  est tangent à la ligne de champ et que l'espacement entre les lignes de champ traduit la valeur du champ  $\vec{B}$ .

Par exemples, les lignes du champ magnétiques d'un fil rectiligne de grande dimension sont des cercles concentriques, centrés sur l'axe du fil (cf Figure 3.7).

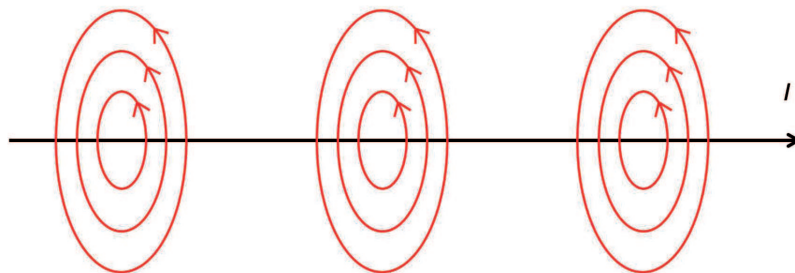


FIGURE 3.7 – Lignes du champ magnétique  $\vec{B}$  créé par un fil rectiligne parcouru par un courant  $I$ .

Quelques applications de la magnétostatique sont donnée en Illustration C.2.

## 3.3 Théorème d'Ampère et équations de la magnétostatique

### 3.3.1 Flux du champ magnétique

On peut réécrire (3.18) en utilisant (A.19). On obtient immédiatement :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left( \iiint_{(V)} \frac{\vec{J}(P)}{PM} d^3P \right) \quad (3.19)$$

puisque  $\vec{\nabla}_M(1/PM) = -\overrightarrow{PM}/PM^3$  d'après (A.19) et que la dérivation s'effectue par rapport à  $M$ . On en déduit que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.20)$$

La loi de **Biot** et **Savart** entraîne donc  $(M\Phi)!$  La forme intégrée de cette équation est :

$$\oint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = 0 \quad (3.21)$$

indique que le flux de  $\vec{B}$  à travers une surface fermée est toujours nul ( $\vec{B}$  est à flux conservatif)

**Remarque :** Il n'existe pas de monopôle magnétique<sup>9</sup>. En fait, on n'a jamais pu mettre en évidence expérimentalement l'existence des monopôles magnétiques. En 1931, **Dirac** a montré que l'existence d'un seul monopôle magnétique dans l'univers expliquerait (selon lui!) la nature discrète de la charge électrique<sup>10</sup>.

### 3.3.2 Théorème d'Ampère

En utilisant (3.19), on peut écrire  $\vec{\nabla} \times \vec{B}$  sous la forme :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{C}) - \frac{\mu_0}{4\pi} \Delta \vec{C} \quad \text{avec} \quad \vec{C} = \iiint_{(V)} \frac{\vec{J}(P)}{PM} d^3P \quad (3.22)$$

Le 1<sup>er</sup> terme de cette équation s'écrit :

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{C}) = \vec{\nabla} \left( \iiint_{(V)} \vec{J}(P) \cdot \vec{\nabla}_M \left( \frac{1}{PM} \right) d^3P \right) = - \vec{\nabla} \left( \iiint_{(V)} \vec{J}(P) \cdot \vec{\nabla}_P \left( \frac{1}{PM} \right) d^3P \right)$$

où la 1<sup>re</sup> égalité vient du fait que la dérivation s'effectue par rapport à  $M$  (d'où l'écriture  $\vec{\nabla}_M$ ) et la 2<sup>e</sup> vient de (A.19). Le 2<sup>e</sup> terme de (3.22) s'écrit quant à lui :

$$\Delta \vec{C} = \iiint_{(V)} \vec{J}(P) \Delta_M \left( \frac{1}{PM} \right) d^3P$$

où l'égalité vient également du fait que la dérivation s'effectue par rapport à  $M$ . Comme on admettra de plus que :

$$\Delta \left( \frac{1}{PM} \right) = -4\pi \delta(\vec{PM})$$

on écrira finalement (3.22) sous la forme :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(M) = - \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \left( \iiint_{(V)} \vec{J}(P) \cdot \vec{\nabla}_P \left( \frac{1}{PM} \right) d^3P \right) + \mu_0 \vec{J}(M)$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \left( \iiint_{(V)} \frac{\vec{\nabla}_P \cdot \vec{J}(P)}{PM} d^3P \right) + \mu_0 \vec{J}(M)$$

Or, pour les phénomènes stationnaires, on a toujours  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \equiv 0$ . On en déduit que :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (3.23)$$

On retrouve la *forme locale du théorème d'Ampère*. Le courant total enlacé  $I_{enlacé}$  par le circuit étant l'intégrale sur  $(\Sigma)$  de la densité de courant  $\vec{J}$ , en utilisant le théorème de **Stokes** (A.23), on obtient également la forme intégrale :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(\Sigma)} \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{enlacé} \quad (3.24)$$

Cette relation exprimant la circulation de  $\vec{B}$  sur toute surface  $(\Sigma)$  s'appuyant sur un contour fermé  $(C)$  quelconque est la *forme intégrale du théorème d'Ampère*.

**Remarque 1 :** Le théorème d'Ampère permet de déterminer le champ  $\vec{B}$  si l'intégrale de (3.24) est calculable, c'est-à-dire dans la pratique si le système présente un degré de symétrie suffisant.

9. Ceci avait déjà été pressenti par **Gilbert** vers 1600 à partir du fait qu'un aimant permanent qui se brise redonne deux aimants aux propriétés magnétiques identiques.

10. Si vous êtes intéressés, voir [11, pages 286 à 294] pour une discussion de très haut niveau.

---

**Remarque 2 :** Le théorème d'**Ampère** n'est rigoureusement valable que pour les phénomènes indépendants du temps. On l'appliquera également dans l'ARQS puisque  $\vec{J}$  est à flux conservatif.

**Remarque 3 :** La magnétostatique peut s'étudier de manière générale en considérant qu'il s'agit de l'étude d'un champ à rotationnel donné et à divergence nulle.

### 3.3.3 Potentiel vecteur - Jauge de Coulomb

D'après (A.15), la conservation du flux magnétique exprimée par (3.20) entraîne qu'il existe un champ de vecteur  $\vec{A}$  tel que :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3.25)$$

Cette relation sert de définition au *potentiel vecteur*  $\vec{A}$ . En appelant  $(C)$  un contour quelconque fermé et orienté et  $(\Sigma)$  une surface ouverte s'appuyant sur  $(C)$  et orientée dans le même sens (cf Figure 3.8), on déduit d'après (A.23) que :

$$\oint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{(C)} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \quad (3.26)$$

Ce flux ne dépend pas de la surface  $(\Sigma)$  mais uniquement du contour  $(C)$ .

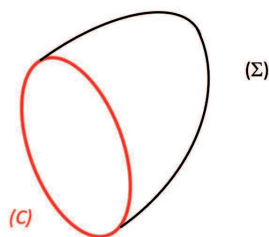


FIGURE 3.8 – Le flux de  $\vec{B}$  à travers une surface ouverte  $(\Sigma)$  s'appuyant sur un contour  $(C)$  ne dépend que de la circulation du potentiel vecteur  $\vec{A}$  sur le contour.

Comme en électrodynamique (§ 1.3.2), en considérant un champ scalaire  $\lambda(M)$ , le rotationnel du champ vectoriel associé  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}(\lambda)$  s'écrit  $\vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$  d'après (A.16). On en déduit que le potentiel vecteur  $\vec{A}$  dont dérive  $\vec{B}$  est défini à un gradient près. On admettra qu'il est possible de définir le potentiel vecteur à une constante près par la *condition de jauge* :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (3.27)$$

Cette jauge, particulièrement utilisée en magnétostatique, s'appelle la *jauge de Coulomb*. Dans cette jauge, (3.25) permet d'écrire une relation analogue à l'équation de **Poisson** (2.23) de l'électrostatique :

$$\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{J} = \vec{0} \quad (3.28)$$

**Remarque 1 :** Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  est un vrai vecteur (ou vecteur polaire). En effet, par changement du sens dans le trièdre de référence,  $\vec{B}$  et  $\vec{\nabla}$  changent de signe, donc  $\vec{A}$  reste invariant.

**Remarque 2 :** On voit d'après (3.25) et (3.26) que l'unité de  $\vec{A}$  est le Tesla-mètre (Tm) ou Weber/m (Wb/m).

### 3.3.4 Expressions intégrées de $\vec{A}$ et $\vec{B}$

#### Cas général

En imposant de plus de manière arbitraire que  $\vec{A} = \vec{0}$  à l'infini, on peut montrer qu'en jauge de **Coulomb**, la résolution de l'équation de **Poisson** (3.28) conduit à :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{J}(P)}{PM} d^3P \quad (3.29)$$

où l'intégrale est effectuée sur la distribution volumique de courant décrite par le point courant  $P$ . On peut alors donner une expression intégrée pour le champ magnétique  $\vec{B}$  :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{J}(P) \times \overrightarrow{PM}}{PM^3} d^3P \quad (3.30)$$

On peut remarquer que cette relation n'est autre que (3.18), qui avait été déduite directement de la loi de **Biot** et **Savart**.

#### Cas d'un circuit filiforme

Lorsque la distribution de courant est filiforme, de section négligeable  $s$ , on peut négliger les variations de  $\vec{J}$  sur  $s$ . En appelant  $I$  le courant qui parcourt le fil ( $I d\vec{\ell} = \vec{j} s d\ell$ ), les expressions du potentiel vecteur (3.29) et du champ magnétique (3.30) créés par le circuit deviennent :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C)} \frac{I(P)}{PM} d\vec{\ell} \quad \text{et} \quad \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C)} I(P) \frac{d\vec{\ell} \times \overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad (3.31)$$

On retrouve bien l'expression (3.12) de la loi de **Biot** et **Savart** pour un circuit filiforme.

### 3.3.5 Potentiel scalaire magnétique

En dehors des sources du champ  $\vec{B}$ , on a  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{0}$ . D'après (A.16), on en déduit qu'il doit exister une fonction  $\Phi_m$  telle que  $\vec{B} = -\vec{\nabla}(\Phi_m)$ , où  $\Phi_m$  est par définition le *potentiel scalaire magnétique*.

Le potentiel scalaire magnétique sera utilisé ultérieurement et sert souvent à présenter des problèmes d'une façon similaire à des problèmes d'électrostatique.

## 3.4 Méthodes de calcul en magnétostatique

Les méthodes de calcul en magnétostatique sont basées sur ce qui vient d'être énoncé. Il faut noter que dans certains cas, une analogie avec l'électrostatique permet parfois de résoudre certains problèmes. On suppose qu'on connaît la densité volumique de charges  $\vec{J}(M)$  en tout point  $M$  de l'espace :

1. Formulation différentielle en champ :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

2. Formulation différentielle en potentiel :

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad \text{puis} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

où le calcul s'effectue en jauge de **Coulomb** ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ ).

3. Formulation intégrée en champ :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \quad \text{ou} \quad \oiint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

où  $(C)$  est un contour fermé et  $(\Sigma)$  une surface ouverte s'appuyant sur  $(C)$ .

4. Calcul direct par l'intégrale vectorielle :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{J}(P) \times \overrightarrow{PM}}{PM^3} d^3P \quad (3.32)$$

où le calcul s'effectue en jauge de **Coulomb** et se restreint à la zone contenant la distribution  $(D)$ .

5. Calcul indirect par l'intégrale vectorielle :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{J}(P)}{PM} d^3P \quad \text{puis} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3.33)$$

où le calcul s'effectue en jauge de **Coulomb** et se restreint à la zone contenant la distribution  $(D)$ .

6. Calcul indirect à l'aide du potentiel scalaire :

En dehors des zones de courant, on verra au § 3.6.2 qu'on peut utiliser :

$$\Delta\Phi_m = 0 \quad \text{puis} \quad \vec{B} = -\vec{\nabla}(\Phi_m)$$

### 3.5 Travail mécanique des forces de Laplace

On a vu que la force exercée par un champ  $\vec{B}$  sur un conducteur métallique filiforme était la *force de Laplace* (3.9). Cette force s'exerce sur les porteurs de charges du conducteur et est transmise à ce dernier par l'intermédiaire de sa structure cristalline. On notera bien que le champ  $\vec{B}$  qui intervient dans (3.9) est le champ total qui s'exerce sur l'élément de longueur  $d\vec{l}$ .

Si on déplace une portion de conducteur dans un champ  $\vec{B}$ , il existe un travail mécanique  $\tau_D$  associé aux forces de **Laplace**. Ceci ne contredit en rien le fait que le travail mécanique total agissant sur un porteur de charge est globalement nul. Pour maintenir le conducteur en équilibre par des forces opposées, il faut fournir un travail de déplacement  $-\tau_D$ .

#### 3.5.1 Travail mécanique et flux coupé

##### Déplacement d'un cadre rectangulaire

Pour fixer les esprits, on considère tout d'abord le circuit filiforme rectangulaire  $ABCD$  de la Figure 3.9 parcouru par le courant permanent  $I$ . Il se déplace dans un champ magnétique inhomogène et perpendiculaire au circuit, et on suppose de plus que ce champ est uniforme et égal à  $\vec{B}$  sur  $AB$ , et qu'il est nul sur  $CD$ .

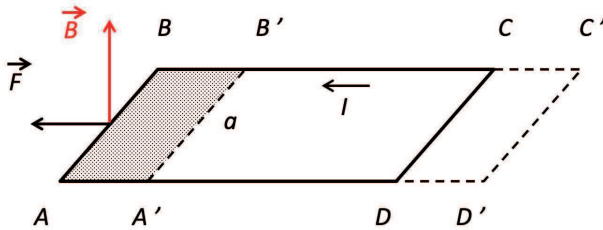


FIGURE 3.9 – Déplacement d'un cadre rectangulaire conducteur et flux coupé.

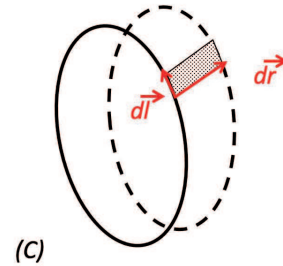


FIGURE 3.10 – Surface balayée lors du déplacement élémentaire  $d\vec{r}$  d'un circuit filiforme quelconque.

Si on translate le cadre de  $AA'$ , parallèlement à  $BC$  et  $AD$ , les forces de **Laplace**  $\vec{F}_L$  qui s'exercent sur ce circuit se résument uniquement à celles qui s'exercent sur le tronçon  $AB$  ( $\vec{F}_L = I \overrightarrow{AB} \times \vec{B}$ ). Le travail  $\tau_D$  des forces de **Laplace** qui s'exercent sur le cadre s'écrit :

$$\tau_D = \vec{F}_L \cdot \overrightarrow{AA'} = I(\overrightarrow{AB} \times \vec{B}) \cdot \overrightarrow{AA'} = I a l B$$

en posant  $AB = a$  et  $AA' = l$ . Le produit  $\Phi_C = alB$  est le flux de  $\vec{B}$  à travers la surface balayée  $al$ . On l'appelle le *flux coupé* par le tronçon  $AB$  lors de son déplacement.

### Déplacement d'un circuit filiforme quelconque

Pour traiter le cas général, on considère un circuit filiforme orienté ( $C$ ), parcouru par un courant permanent  $I$ , soumis à un champ  $\vec{B}$  (cf Figure 3.10). On fait subir un déplacement élémentaire  $d\vec{r}$  au circuit (avec éventuellement une déformation de ce dernier). Au cours de ce déplacement, le travail élémentaire de la force de **Laplace** qui s'exerce sur le tronçon  $d\vec{\ell}$  s'écrit :

$$d^2\tau_D = d\vec{F}_L \cdot d\vec{r} = I(d\vec{\ell} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = I\vec{B} \cdot (d\vec{r} \times d\vec{\ell})$$

où la dernière égalité vient de l'application de (A.14). Le produit  $d\vec{r} \times d\vec{\ell}$  est un vecteur surface dont la norme est la surface engendrée par  $d\vec{\ell}$  lors de son déplacement  $d\vec{r}$ . Son produit scalaire par  $\vec{B}$  est le flux de  $\vec{B}$  à travers cette surface. On pose par définition que le *flux coupé* par  $d\vec{\ell}$  lors de son déplacement  $d\vec{r}$  est :

$$d^2\Phi_c = \vec{B} \cdot (d\vec{r} \times d\vec{\ell}) \quad (3.34)$$

En intégrant, on obtient le travail  $\tau_D$  des forces de **Laplace** sur tout le circuit :

$$\tau_D = I\Phi_c \quad (3.35)$$

où  $\Phi_c$  est le flux coupé par le circuit ( $C$ ) au cours de son déplacement.

**Remarque 1 :** Les flux coupés sont des quantités algébriques, puisqu'ils dépendent de  $d\vec{r} \times d\vec{\ell}$ .

**Remarque 2 :** Il est important de noter que (3.35) ne suppose rien sur  $I$  ni sur  $\vec{B}$ .

### 3.5.2 Théorème de Maxwell

On considère un circuit orienté rigide qu'on déplace d'une position ( $C_1$ ) à une position ( $C_2$ ) (cf Figure 3.11). On note ( $S_c$ ) la surface qu'il engendre lors de son déplacement. On considère également deux surfaces fermées ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) s'appuyant respectivement sur ( $C_1$ ) et ( $C_2$ ). On note  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  et  $\Phi_c$  les flux du champ  $\vec{B}$  à travers les surfaces ( $C_1$ ), ( $C_2$ ) et ( $S_c$ ) respectivement.

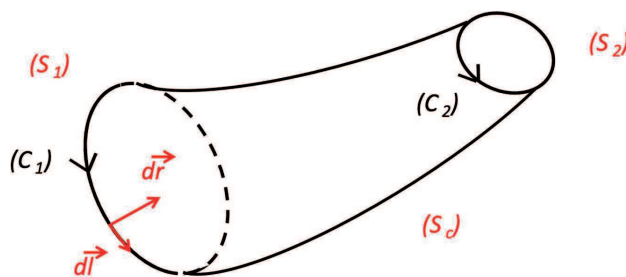


FIGURE 3.11 – Le flux coupé par le circuit ( $C$ ) au cours de son déplacement est égal à la variation du flux de  $\vec{B}$  sur le circuit (voir texte).

Le flux de  $\vec{B}$  à travers la surface fermée ( $C_1$ ) + ( $C_2$ ) + ( $S_c$ ) est nul, donc :

$$\oint_{(S_1)+(S_2)+(S_c)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

D'après l'orientation des circuits, on a :

$$\oint_{(S_1)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\Phi_1 \quad \oint_{(S_2)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi_2 \quad \oint_{(S_c)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\Phi_c$$

On en déduit finalement que :

$$\Phi_c = \Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 \quad (3.36)$$

où  $\Delta\Phi$  est la variation du flux de  $\vec{B}$  à travers le contour ( $C$ ). Pour un déplacement élémentaire, la relation (3.36) devient  $d\Phi_c = d\Phi$ . Le travail des forces de **Laplace** s'écrit alors  $d\tau_D = I d\Phi$  ou en intégrant

$$\tau_D = I \Delta\Phi \quad (3.37)$$

Cette relation est connue sous le nom de *théorème de Maxwell*, valable pour les circuits rigides effectuant un déplacement fini dans un champ  $\vec{B}$  uniforme et constant.

**Remarque :** Au cours du déplacement ou de la déformation du circuit ( $C$ ), il va normalement apparaître une force électromotrice d'induction (voir chapitre 4), et le courant  $I$  devra varier donc  $\vec{B}$  ne pourra pas rester constant (sauf à placer un générateur dans le circuit pour s'opposer à cette force électromotrice). Dans la pratique, ce point va fortement limiter les applications de (3.37).

### 3.5.3 Energie potentielle d'un circuit rigide dans un champ $\vec{B}$ et règle du flux maximal

On suppose que le circuit est rigide et bien sûr que le champ  $\vec{B}$  ne dépend pas du temps. La variation  $\Delta\Phi$  du flux ne dépend alors que des positions initiales et finales du circuit ( $C$ ), donc le travail  $\tau_D$  est indépendant du chemin suivi. On peut donc définir l'énergie potentielle d'interaction  $U_I$  du circuit dans le champ  $\vec{B}$  par  $\tau_D = -\Delta U_I$ , soit :

$$U_I = -I\Phi \quad (3.38)$$

Si on relâche le circuit, il se mettra en mouvement sous l'effet des forces de **Laplace** qui fourniront alors un travail  $\tau_D > 0$ . Comme  $d\tau_D = I d\Phi = -d(-I\Phi)$ , le mouvement a tendance à augmenter le flux qui le traverse (*règle du flux maximal*) et un extremum de  $\Phi$  correspondra à une position d'équilibre.

**Remarque :** Les relations (3.37) et (3.38) ne supposent pas que le circuit est indéformable, mais elles ne permettent d'accéder qu'au champ externe appliqué  $\vec{B}_e$ . Or pour un circuit déformable, le travail du champ magnétique propre  $\vec{B}_p$  (créé par le circuit lui-même) n'est en général pas nul puisqu'il s'agit de forces internes au système. Ceci limite fortement l'utilisation de (3.37) et (3.38) pour les circuits déformables.

## 3.6 Dipôles magnétiques

### 3.6.1 Moments dipolaires magnétiques et dipôles magnétiques

#### Moment magnétique

La résultante  $\vec{R}$  des forces qui s'exercent sur une boucle de courant ( $\mathcal{C}$ ) parcourue par le courant  $I$  est :

$$\vec{R} = \oint_{(\mathcal{C})} I d\vec{r} \times \vec{B} = I \left( \oint_{(\mathcal{C})} d\vec{r} \right) \times \vec{B} = \vec{0}$$

Le moment  $\vec{\Gamma}$  du couple qui s'exerce sur le circuit, calculé à l'origine, vaut :

$$\vec{\Gamma} = \oint_{(\mathcal{C})} \vec{r} \times (I d\vec{r} \times \vec{B}) = I \oint_{(\mathcal{C})} (\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{r} - I \oint_{(\mathcal{C})} (\vec{r} \cdot d\vec{r}) \vec{B}$$

La 2<sup>e</sup> intégrale s'annule car comme  $\vec{B}$  est constant, on intègre  $r^2/2$  sur un contour fermé, ce qui vaut zéro. En utilisant (A.26), on obtient :

$$\vec{\Gamma} = I \iint_{(\Sigma)} [d\vec{S} \times \vec{\nabla} (\vec{r} \cdot \vec{B})]$$



Comme  $\vec{r} \cdot \vec{B} = x B_x + y B_y + z B_z$ , on a  $\vec{\nabla} (\vec{r} \cdot \vec{B}) = \vec{B}$ . D'où :

$$\vec{\Gamma} = I \left( \iint_{(\Sigma)} d\vec{S} \right) \times \vec{B} = I \vec{S} \times \vec{B}$$

où  $\vec{S}$  est le vecteur surface (orienté) associé au contour fermé. On définit le *moment magnétique dipolaire*  $\vec{M}$  du circuit filiforme fermé ( $C$ ) parcouru par un courant  $I$  par :

$$\vec{M} = I \vec{S} \quad (3.39)$$

Le couple qui s'exerce sur le circuit s'écrit donc :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \times \vec{B} \quad (3.40)$$

En notant  $O$  une origine arbitraire et  $P$  un point courant sur le circuit (figure 3.12), on pourrait montrer que  $\vec{S}$  peut s'écrire de manière générale :

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_{(C)} \vec{OP} \times d\vec{\ell} \quad (3.41)$$

La définition (3.39) du moment dipolaire magnétique peut donc se réécrire sous la forme :

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \oint_{(C)} \vec{OP} \times I d\vec{\ell} \quad (3.42)$$

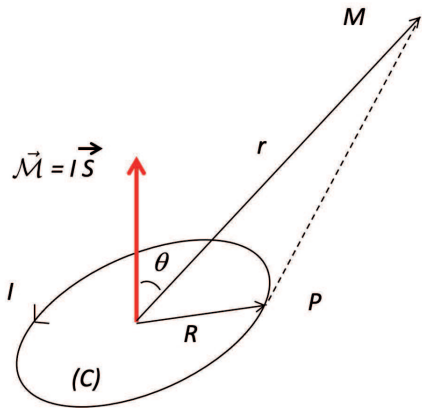


FIGURE 3.12 – Dipôle magnétique  $\vec{M}$  associé à un contour fermé ( $C$ ). On considère un point  $M$  à grande distance de la spire de courant.

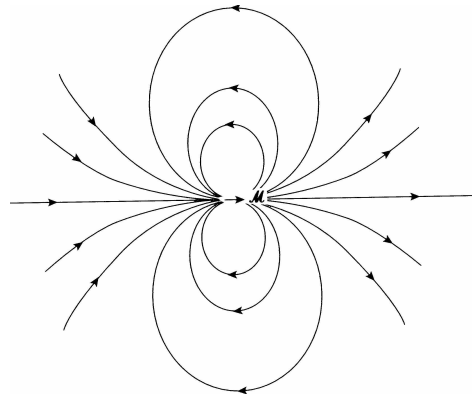


FIGURE 3.13 – Lignes de champ à grande distance du dipôle magnétique (figure extraite de [8, page 213]).

En remplaçant  $I d\vec{r}$  par  $\vec{J} dV$ , on peut en déduire la définition du moment dipolaire magnétique  $\vec{M}$  dans le cas d'une distribution volumique de courants permanents :

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \vec{OP} \times \vec{J}(P) dV \quad (3.43)$$

où l'intégrale est prise sur tout l'espace ( $V$ ) où  $\vec{J}(P) \neq \vec{0}$ .

Si on considère le moment magnétique par rapport à un autre point  $O'$ , les deux intégrales diffèrent de :

$$\frac{1}{2} \iiint_{(V)} \vec{OO'} \times \vec{J}(P) dV = \frac{1}{2} \vec{OO'} \times \left( \iiint_{(V)} \vec{J}(P) dV \right) = \vec{0}$$

car  $\iiint \vec{J} dV = \vec{0}$  pour une distribution volumique de courants localisés<sup>11</sup>. On en déduit que la définition (3.43) du moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  ne dépend pas de l'origine  $O$ .

## Dipôle magnétique

Un *dipôle magnétique* est par définition une boucle de courant de petite dimension, dont on étudie les effets à grande distance (par rapport aux dimensions de la boucle). Son importance théorique est considérable pour un grand nombre de raisons :

- Un circuit localisé se comporte comme un dipôle magnétique pour tous les effets à grande distance.
- On n'a jamais pu mettre en évidence des charges magnétiques, qui seraient le pendant des charges électriques. Les sources ultimes du magnétisme de la matière sont les dipôles magnétiques correspondant aux petites boucles de courant dues aux électrons orbitant autour des noyaux.
- Les particules élémentaires, habituellement considérées comme des points matériels (électron, proton, neutron), portent en général un moment magnétique. Le champ magnétique créé par ces particules est celui d'un dipôle magnétique ponctuel.
- Enfin, le modèle du dipôle magnétique sert de base à la description du champ magnétique terrestre (voir le Complément C.3).

La table 3.2 donne quelques ordres de grandeur pour les moments dipolaires magnétiques.

Moment magnétique terrestre	8,0 10 <sup>22</sup> J/T
Petit barreau aimanté	5 J/T
Electron	9,3 10 <sup>-24</sup> J/T
Proton	1,4 10 <sup>-26</sup> J/T

TABLE 3.2 – Quelques valeurs typiques de moment dipolaires magnétiques.

## 3.6.2 Potentiel et champ du dipôle magnétique

### Potentiel vecteur

On considère une spire de rayon  $a$ , située dans le plan  $Oxy$ , et on se placera en un point  $M$  à grande distance devant la dimension de la boucle de courant (cf Figure 3.12). D'après (3.31), pour un circuit filiforme, le potentiel-vecteur en  $M$  est donné par :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{(C)} \frac{d\vec{\ell}}{PM} \quad (3.44)$$

En utilisant (A.26), on peut écrire :

$$\oint_{(C)} \frac{d\vec{\ell}}{PM} = - \iint_{(\Sigma)} \vec{\nabla}_P \left( \frac{1}{PM} \right) \times d\vec{S}$$

Comme  $\vec{OM} = r \vec{u}_r$ , on a au 1<sup>er</sup> ordre :

$$\vec{\nabla}_P \left( \frac{1}{PM} \right) \approx \frac{\vec{u}_r}{r^2} \quad \text{et} \quad \oint_{(C)} \frac{d\vec{\ell}}{PM} = - \frac{\vec{u}_r}{r^2} \times \iint_{(\Sigma)} d\vec{S} = \vec{S} \times \frac{\vec{u}_r}{r^2}$$

Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  de la spire de courant est donc, au 1<sup>er</sup> ordre :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{\vec{\mathcal{M}} \times \vec{u}_r}{r^2} \right) \quad (3.45)$$

11. C'est évident si on se souvient que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$  à cause de l'équation de continuité exprimée en magnétostatique. On applique ensuite le théorème d'Ostrogradsky (A.22) pour obtenir  $\iiint \vec{J} dV = \vec{0}$ .

Cette relation montre que la distribution de courant est entièrement caractérisée à grande distance par son moment magnétique. Par superposition de boucles de courant, la validité de cette expression peut s'étendre à un dipôle magnétique constitués de courants volumiques.

En coordonnées sphériques, on a :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \sin(\theta)}{r^2} \vec{u}_\phi \quad (3.46)$$

### Champ magnétique

Le champ magnétique à grande distance s'obtient par  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ . On obtient après calculs l'expression suivante :

$$\vec{B}(M) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{\mathcal{M}}}{r^3} \quad (3.47)$$

Cette expression approchée peut également se mettre sous la forme :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( -\frac{\vec{\mathcal{M}}}{r^3} + \frac{3(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \left( \frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = -\vec{\nabla}(\Phi_M)$$

où  $\Phi_M$  est le potentiel scalaire magnétique (§ 3.3.5) produit en  $M$  par le dipôle magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  situé à l'origine du repère :

$$\Phi_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (3.48)$$

Si l'approximation (3.47) est suffisante, on peut calculer  $\vec{B}$  à l'aide du potentiel scalaire magnétique (3.48).

En coordonnées polaires, on a :

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M} \cos \theta}{r^3} \quad \text{et} \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \sin \theta}{r^3} \quad (3.49)$$

Cette expression montre que le champ à grande distance de tout circuit localisé décroît comme  $1/r^3$ . Le champ  $\vec{B}$  créé par un dipôle magnétique dérive du potentiel scalaire magnétique  $\Phi_m$  qu'on peut mettre sous la forme (3.48).

### Discussion sur les lignes de champ

L'expression (3.47) est analogue à l'expression (2.60) du champ électrique créé par un dipôle électrostatique de moment dipolaire  $\vec{p}$ , moyennant les transpositions  $1/\epsilon_0 \rightarrow \mu_0$  et  $\vec{p} \rightarrow \vec{\mathcal{M}}$ . On en déduit donc que, loin du dipôle, la topographie des lignes de champ du dipôle magnétique (figure 3.49) doit être identique<sup>12</sup> à celle des lignes de champ du dipôle électrostatique (figure 2.16).

Néanmoins, au voisinage des sources, les lignes de champs sont différentes (figure 3.14) car les relations qui existent entre les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  et leurs sources  $\rho$  et  $\vec{J}$  sont très différentes :

Electrostatique	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$
Magnétostatique	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

12.  $\vec{B}$  et  $\vec{\mathcal{M}}$  sont des vecteurs axiaux. Les lignes de champ de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont identiques loin des sources car le plan perpendiculaire au moment dipolaire en  $O$  est plan de symétrie pour le moment magnétique, mais plan d'antisymétrie pour le moment électrique.

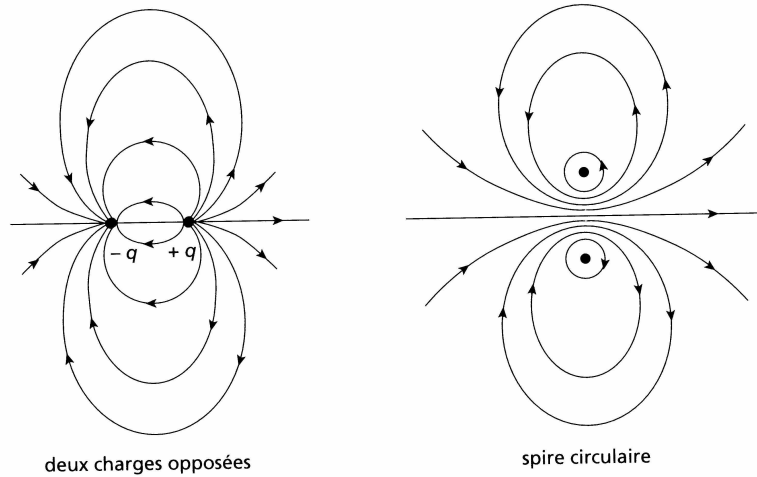


FIGURE 3.14 – Lignes de champ du dipôle électrostatique (gauche) et du dipôle magnétique (droite) au voisinage des sources (figure extraite de [8, page 213]).

### Positions principales de Gauss

De manière identique au cas de l'électrostatique, on appelle *positions principales de Gauss* le lieu des points  $M$  où  $\vec{B}(M)$  est colinéaire à  $\vec{\mathcal{M}}$ . Il en existe de deux types différents :

1. Les *premières positions principales de Gauss* correspondent à  $B_\theta = 0$ , c'est-à-dire à  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$  (Figure 3.15). D'après (3.49), on a alors :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \vec{\mathcal{M}}}{2\pi r^3} \quad (3.50)$$

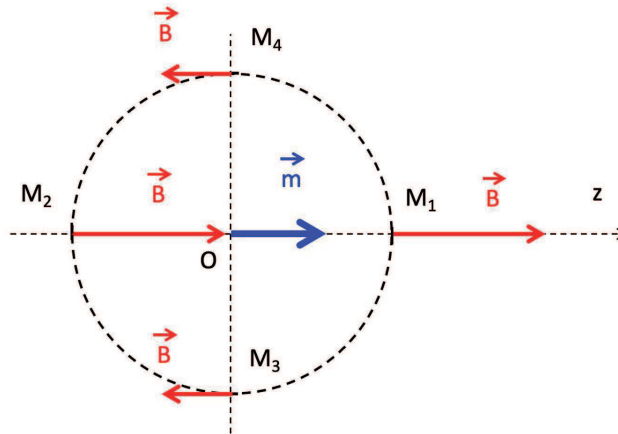


FIGURE 3.15 – Positions principales de Gauss pour un dipôle magnétique  $\vec{m}$  orienté selon  $(Oz)$  correspondant à  $\theta = 0$  (position  $M_1$ ),  $\theta = \pi$  (position  $M_2$ ),  $\theta = \pi/2$  (position  $M_3$ ) et  $\theta = 3\pi/2$  (position  $M_4$ ) à  $r$  fixé.

2. Les *deuxièmes positions principales de Gauss* correspondent à  $B_r = 0$ , c'est-à-dire à  $\theta = \pi/2$  ou  $\theta = 3\pi/2$  (Figure 3.15). D'après (3.49), on a alors :

$$\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 \vec{\mathcal{M}}}{4\pi r^3} \quad (3.51)$$

Pour chaque valeur de  $r$ , il existe quatre positions principales de Gauss (Table 3.3). On peut noter la correspondance avec le cas de l'électrostatique (Table 2.3 et Figure 2.17).

	Position 1	Position 3	Position 2	Position 4
Angle $\theta$	0	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$
Champ $\vec{B}$	$\vec{B}_0$	$-\vec{B}_0/2$	$\vec{B}_0$	$-\vec{B}_0/2$

TABLE 3.3 – Valeurs relative du champ aux quatre positions principales de **Gauss**.

### 3.6.3 Action mécanique d'un champ sur un dipôle magnétique

On considère une boucle de courant de surface  $S$ , plongée dans un champ magnétique  $\vec{B}$  et parcourue par un courant  $i$ . On note  $\vec{M} = i\vec{S}$  le moment magnétique de la spire.

#### Cas d'un champ uniforme

Pour un déplacement élémentaire au cours duquel le circuit ( $C$ ) ne se déforme pas, le travail des forces de **Laplace** est  $\delta W = I \Phi_c$  où  $\Phi_c(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$  est une fonction des coordonnées cartésiennes d'un point  $M$  de ( $C$ ) et  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  les angles qui repèrent les rotations de ( $C$ ).

En notant  $\vec{R}$  la résultante des forces de **Laplace** qui s'appliquent sur le circuit, si on considère une translation élémentaire  $d\vec{r} = dx \vec{u}_x$ , on a :

$$\delta W = \vec{R} \cdot d\vec{r} = R_x dx = i d\Phi_c = i \frac{\partial \Phi_c}{\partial x} dx$$

On en déduit donc de manière symétrique que :

$$R_x = i \frac{\partial \Phi_c}{\partial x} \quad R_y = i \frac{\partial \Phi_c}{\partial y} \quad R_z = i \frac{\partial \Phi_c}{\partial z} \quad (3.52)$$

En notant  $\vec{m}$  le moment résultant des forces magnétiques, on a de même, en considérant cette fois une rotation élémentaire autour de  $Ox$  :

$$\delta W = \vec{m} \cdot (d\alpha \vec{u}_x) = m_x d\alpha = i d\Phi_c = i \frac{\partial \Phi_c}{\partial \alpha} d\alpha$$

d'où les expressions :

$$m_x = i \frac{\partial \Phi_c}{\partial \alpha} \quad m_y = i \frac{\partial \Phi_c}{\partial \beta} \quad m_z = i \frac{\partial \Phi_c}{\partial \gamma} \quad (3.53)$$

Le flux qui traverse la spire est :

$$\Phi_c = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B} \cdot \iint d\vec{S} = \vec{B} \cdot \vec{S} = B S \cos(\theta) \quad (3.54)$$

Comme  $\Phi_c$  est invariant pour toute translation de ( $C$ ), on a  $\vec{R} = \vec{0}$  : les forces appliquées à ( $C$ ) se résument à un couple de moment  $\vec{\Gamma}$ .

D'après (3.54),  $\Phi_c$  est également invariant pour toute rotation autour de  $\vec{B}$  ou de  $\vec{S}$ . Le moment  $\vec{\Gamma}$  doit donc être colinéaire au vecteur unitaire  $\vec{u} = \vec{B} \times \vec{S} / \|\vec{B} \times \vec{S}\|$ .

Si on considère une rotation de  $d\theta$  autour de  $\vec{u}$ , on aura :

$$\delta W = i d\Phi_c = i d(B S \cos(\theta)) = -i B S \sin(\theta) d\theta \quad \text{d'où} \quad \vec{\Gamma} = -i B S \sin(\theta) \vec{u}$$

On en déduit donc que :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \times \vec{B} \quad (3.55)$$

L'action du champ sur le circuit se résume à un couple de moment  $\vec{\Gamma}$  qui tend à orienter le moment magnétique selon les lignes de champ.

**Remarque :** On peut noter que pour établir (3.52) et (3.53), on a supposé que  $\vec{B}$  était uniforme mais le courant  $i$  ne l'est pas forcément.

---

### Cas d'un champ quelconque

Comme  $\Phi_c = \vec{B} \cdot \vec{S}$ , on déduit l'expression de  $R_x$  de (3.52) :

$$R_x = i \frac{\partial(\vec{B} \cdot \vec{S})}{\partial x}$$

Pour une translation élémentaire de  $d\vec{r}$  du dipôle,  $\vec{S}$  reste invariant. On a donc :

$$R_x = i \vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \quad \text{soit} \quad R_x = \vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x}$$

On procède de même pour  $R_y$  et  $R_z$ . On obtient finalement :

$$\vec{R} = \vec{\nabla}(\vec{M} \cdot \vec{B}) \quad (3.56)$$

puisque  $\vec{M}$  est constant. L'expression du couple  $\vec{\Gamma}$  reste inchangée par rapport au cas (3.55) du champ homogène.

**Remarque :** Comme en électrostatique où le moment dipolaire caractérisait complètement le dipôle (§ 2.5.3), une boucle de courant est entièrement caractérisée par son moment magnétique  $\vec{M}$ .

### 3.6.4 Energie potentielle d'interaction d'un dipôle dans un champ

Avec un raisonnement identique au cas du dipôle électrostatique (§ 2.5.4), on montre que l'énergie potentielle d'interaction d'un dipôle magnétique  $\vec{M}$  avec le champ magnétique appliqué  $\vec{B}_a$  supposé uniforme sur le dipôle s'écrit :

$$U_I = -\vec{M} \cdot \vec{B}_a \quad (3.57)$$

# Chapitre 4

## Induction électromagnétique

### Sommaire

---

4.1	Force électromagnétique d'induction . . . . .	95
4.2	Théorie de l'induction électromagnétique . . . . .	96
4.3	Auto-induction et induction mutuelle . . . . .	104
4.4	Energie magnétique . . . . .	107
4.5	Les courants de Foucault . . . . .	111

---

### Introduction

Suite aux travaux ayant débouchés sur la loi de **Biot** et **Savart**, on savait que les courants permanents produisaient des champs magnétiques. C'est en cherchant à mettre en évidence expérimentalement, mais sans succès, une réciproque à ce phénomène, que **Faraday** a découvert en 1831 l'effet de la variation du flux de  $\vec{B}$  à travers un circuit : l'induction électromagnétique.

L'explication formelle de l'induction électromagnétique nécessite la relativité restreinte<sup>1</sup>. On utilisera la théorie classique ici, jusqu'à en montrer ses limites dans l'explication du phénomène.

### 4.1 Force électromagnétique d'induction

On considère un circuit fermé ( $C_1$ ) parcouru par un courant  $I_1$  et un circuit ( $C_2$ ) ne comprenant qu'un galvanomètre (cf Figure 4.1). L'expérience montre qu'un courant induit apparaît dans ( $C_2$ ) dès qu'on modifie le courant dans ( $C_1$ ), ou la position relative de ( $C_1$ ) et ( $C_2$ ), ou les deux à la fois, c'est-à-dire lorsqu'on modifie dans le temps le flux de  $\vec{B}$  à travers le circuit. On interprète cette expérience par le fait que les porteurs de charges de ( $C_2$ ) sont mis en mouvement sous l'action de *forces motrices*  $f_m$  dont la circulation est non nulle :

$$e = \frac{1}{q} \oint_{(C_2)} \vec{f}_m \cdot d\vec{\ell}$$

La variation du flux  $\Phi$  du champ à travers ( $C_1$ ) entraîne l'apparition d'un courant induit dans ( $C_2$ ).

On considère une courbe fermée orientée ( $C$ ) et une charge  $q$  soumise à un champ de forces  $\vec{F}_m(r, t)$  proportionnel à  $q$ . La *force électromotrice*  $e(t)$  est par définition :

$$e(t) = \frac{1}{q} \oint_{(C)} \vec{F}_m(r, t) \cdot d\vec{\ell} \tag{4.1}$$

---

1. L'article d'**Einstein** de 1905 *Sur l'électrodynamique des corps en mouvement* qui introduit la relativité restreinte commence par une discussion sur le mouvement relatif d'un conducteur et d'un aimant et fournit la première description théorique complète de l'induction électromagnétique.

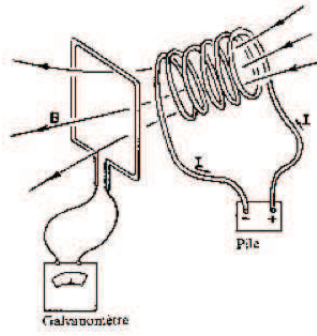


FIGURE 4.1 – Une bobine parcourue par un courant produit un courant dans une seconde bobine si la première est déplacée ou si son courant varie (Figure extraite de [4, tome I, page 274]).

Une étude expérimentale a amené **Faraday** à énoncer ce qui est connu sous le nom de *loi de Faraday* :

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (4.2)$$

**Remarque 1** : Le signe  $-$  dans la *loi de Faraday* (4.2) est la traduction de la *loi de Lenz*.

**Remarque 2** : Sous forme intégrale, les observations de **Faraday** s'écrivent :

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left[ \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \right] \quad (4.3)$$

qui stipule que la force électromotrice induite est reliée à la dérivée totale du flux du champ magnétique. Le trajet  $(C)$  est un chemin fermé de l'espace, sans qu'il coïncide obligatoirement avec un circuit électrique : comme la composante tangentielle de  $\vec{E}$  est continue d'après (1.84), la relation (4.3) est également valide au voisinage du conducteur : c'est une relation très générale entre  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .

**Remarque 3** : La mesure de  $e$  peut s'effectuer en circuit ouvert. On mesure alors une différence de potentiel entre deux points du circuit.

**Remarque 4** : Une autre façon de mettre en évidence la loi de **Lenz** est donnée par la figure 4.2 où le champ  $\vec{B}$  est cette fois fournit par un aimant permanent. Le sens du courant induit ne dépend que du mouvement relatif du conducteur et de l'aimant.

## 4.2 Théorie de l'induction électromagnétique

Selon ce qu'on a vu au § 4.1, une théorie de l'induction électromagnétique devrait expliquer les phénomènes liés à la variation du champ  $\vec{B}$  sur un circuit fixe et au déplacement d'un circuit dans un champ constant.

### 4.2.1 Tension aux bornes d'un tronçon de circuit filiforme

On considère un circuit filiforme, de conductivité  $\gamma$ , représenté par le contour orienté  $(C)$ , qui se déplace ou qui se déforme dans le référentiel  $(\mathcal{R})$  et on note  $\vec{v}(M, t)$  la vitesse dans  $(\mathcal{R})$  de l'élément de conducteur centré sur  $M$ .

On suppose qu'il existe en  $M$  à l'instant  $t$  un champ électromagnétique représenté par  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ . La densité de courant  $\vec{J}$  en  $M$  à l'instant  $t$  est  $\vec{J} = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  d'après (D.28). D'après la définition (1.12) du potentiel-vecteur, on a :

$$\vec{J} = \gamma \left( -\vec{\nabla}(\Phi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (4.4)$$



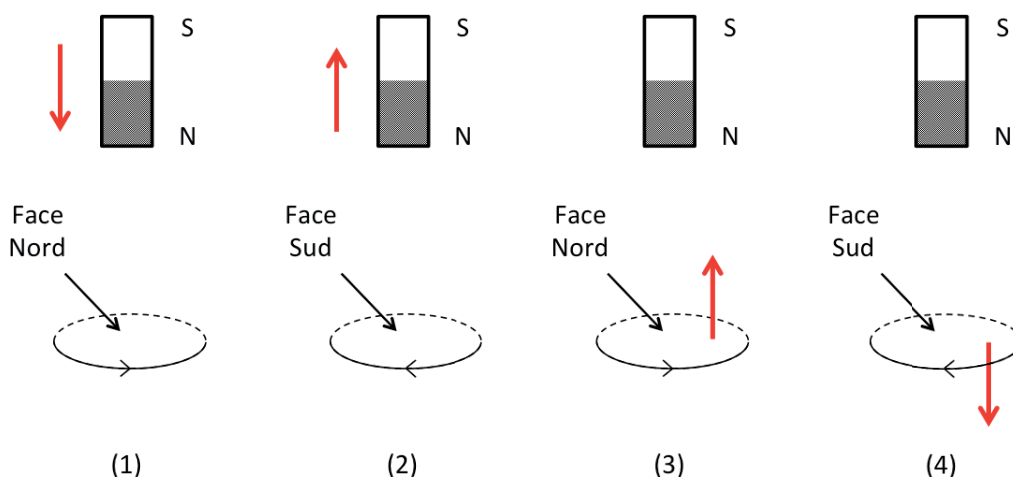


FIGURE 4.2 – Le sens du courant induit ne dépend que du mouvement relatif du conducteur et de l'aimant. La flèche rouge indique le sens de déplacement de l'aimant ou du conducteur.

On définit le *champ électromoteur*<sup>2</sup>  $\vec{E}_m$  en  $M$  à l'instant  $t$  par :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times \vec{B} \quad (4.5)$$

et la *force électromotrice induite*  $e_{AB}$  par la circulation de  $\vec{E}_m$  sur le tronçon  $AB$  à chaque instant  $t$  :

$$e_{AB} = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} \quad (4.6)$$

A l'aide de ces deux définitions, l'intégration entre  $A$  et  $B$  de (4.4) au même instant  $t$  s'écrit :

$$\int_A^B \frac{1}{\gamma} \vec{J} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B -\vec{\nabla}(\Phi) \cdot d\vec{\ell} + e_{AB} = \Phi(A) - \Phi(B) + e_{AB}$$

En se plaçant dans l'ARQS et en appelant  $s$  la section du fil au point  $M$ , on a  $\vec{J} \cdot d\vec{\ell} = i dl/s$  où l'intensité  $i$  est algébrique ( $i > 0$  si  $\vec{J}$  et  $d\vec{\ell}$  sont dans le même sens). On peut donc écrire que :

$$\int_A^B \frac{1}{\gamma} \vec{J} \cdot d\vec{\ell} = i R_{AB}$$

où  $R_{AB}$  est la *résistance* du circuit entre  $A$  et  $B$ . Finalement, à chaque instant  $t$ , la loi fondamentale de l'induction électromagnétique s'écrit :

$$\Phi(A) - \Phi(B) = i R_{AB} - e_{AB} \quad (4.7)$$

Selon les constatations expérimentales décrites précédemment, il y a deux cas différents à étudier, correspondant aux variations relatives du conducteur et du champ  $\vec{B}$ .

**Remarque 1 :** On peut remarquer que dans le cas général des régimes variables, la force électromotrice  $e_{AB}$  donc également  $\Phi(A) - \Phi(B)$  dépendent de la jauge retenue par l'intermédiaire de  $\vec{A}$ . Par contre, la somme  $\Phi(A) - \Phi(B) + e_{AB}$  est indépendante de la jauge et a une signification physique propre.

**Remarque 2 :** C'est la raison pour laquelle certains auteurs contestent la notion de champ électromoteur car il dépend de la jauge. Néanmoins, dans le cadre de l'ARQS,  $\Phi$  et  $\vec{A}$  prolongent les expressions valables en régime permanent,  $\Phi(A) - \Phi(B)$  apparaissant comme l'extension naturelle de la différence de potentiel en régime statique. De toute façon, d'un point de vue pratique, la notion même de force électromotrice n'a d'intérêt que dans le cadre de l'ARQS..

2. La notion de *champ électromoteur* est essentiellement utilisée en France, mais peu à l'étranger.

## 4.2.2 Circuit fixe dans un champ variable

Physiquement, des porteurs de charge, initialement immobiles, sont mis en mouvement dans le conducteur immobile (supposé homogène et à température uniforme). Rien ne permet de relier l'existence de cette force électromotrice au conducteur, et tout indique qu'elle provient exclusivement du champ  $\vec{B}$  et de ses variations<sup>3</sup>. Le cas du circuit fixe dans un champ variable est appelé *cas de Neumann*.

### Calcul de la force électromotrice d'induction

On a dans ce cas  $\vec{v} = \vec{0}$  et  $\partial\vec{A}/\partial t \neq 0$ . On déduit de (4.6) que  $e_{AB}$  s'écrit :

$$e_{AB} = \int_A^B -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell}$$

Dans le cadre de l'ARQS, si on considère le circuit entier, on aura :

$$e = \oint -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \left( \oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \right)$$

d'après (A.29). En notant  $\Phi(t)$  le flux de  $\vec{B}$  à travers le circuit à l'instant  $t$ , on a  $\Phi(t) = \oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$ . On en déduit la *relation de Faraday* :

$$e = -\frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (4.8)$$

où  $e$  s'exprime en volts,  $\Phi$  en webers et  $t$  en secondes.

### Relation de Maxwell-Faraday

Suivant la force de **Lorentz**, la force motrice  $\vec{f}_m$  qui agit sur une particule chargée au repos doit être associée à un champ électrique  $\vec{E}_i$  tel que  $\vec{f}_m = q\vec{E}_i$  et dont l'intégrale sur le circuit complet est la force électromotrice  $e$ . A la différence du champ électrostatique (2.11), la circulation de ce champ  $\vec{E}_i$  le long d'un contour fermé n'est pas nulle puisque :

$$e = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi(t)}{dt} \neq 0 \quad (4.9)$$

On appelle ce champ électrique le *champ électrique induit*. Or d'après (A.23), on peut écrire :

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(\Sigma)} (\vec{\nabla} \times \vec{E}_i) \cdot d\vec{S}$$

où  $(\Sigma)$  est une surface qui s'appuie sur le contour  $(C)$ . A l'aide de §A.2.4, on a de plus :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \iint_{(\Sigma)} \vec{B}_i \cdot d\vec{S} \right) = \iint_{(\Sigma)} \frac{\partial\vec{B}_i}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Finalement, (4.9) s'écrit :

$$\iint_{(\Sigma)} \left( \vec{\nabla} \times \vec{E}_i + \frac{\partial\vec{B}_i}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = 0$$

Cette relation étant valable quelque soit la surface  $(\Sigma)$ , on en déduit l'équation locale :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_i = -\frac{\partial\vec{B}_i}{\partial t}$$

3. La force électromotrice ne dépend que de la forme du circuit et non du matériau qui le compose. Celui-ci ne sert qu'à guider les porteurs de charge. En fait, la théorie de l'induction électromagnétique est indépendante du support matériel. Ceci a été confirmé par l'expérience un siècle après **Faraday** par l'action d'un champ induit sur des particules chargées (voir le Complément C.4.3).

Ce champ induit se superpose au champ électrostatique  $\vec{E}_S$  créé par les distributions de charges (qui lui vérifie  $\vec{\nabla} \times \vec{E}_S \equiv \vec{0}$  et  $\vec{B}_i = \vec{0}$ ). Le champ électrique total  $\vec{E} = \vec{E}_S + \vec{E}_i$  et le champ magnétique total  $\vec{B} = \vec{B}_S + \vec{B}_i$  obéissent donc à la loi de **Maxwell-Faraday** :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.10)$$

Le champ  $\vec{E}$  est bien évalué dans le référentiel où  $d\vec{l}$  est au repos, puisque c'est le champ qui mettrait en mouvement les électrons si on avait un circuit électrique à cet endroit.

**Remarque 1** : On a toujours  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ . A l'aide de (4.10), on en déduit immédiatement que :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}(\Phi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Pour des champs indépendants du temps,  $\Phi$  s'identifie avec le potentiel électrostatique. Il est alors tentant d'identifier le terme  $-\partial \vec{A}/\partial t$  avec le champ induit  $\vec{E}_i$  pour les phénomènes qui dépendent du temps. Attention, la séparation du champ  $\vec{E}$  en deux termes, dont l'un est à circulation nulle, est arbitraire et n'a pas de sens physique. Seule la somme des deux termes a un sens physique. Comme on l'a vu précédemment, on ne peut faire cette séparation que dans le cas des états quasi stationnaires. Le champ  $-\partial \vec{A}/\partial t$  est alors appelé *champ de Neumann*.

**Remarque 2** : La relation (4.10) n'est autre qu'une des quatre équations de **Maxwell**. Si au contraire on postule les équations de **Maxwell**, on peut refaire ce calcul de manière inverse pour retrouver la loi de **Faraday** pour un circuit fixe dans un champ magnétique variable.

**Remarque 3** : Une expérience simple permet de visualiser l'existence du courant induit. On utilise pour cela un anneau conducteur (Cu ou Al) posé sur un électroaimant tel qu'indiqué Figure 4.3. En reliant la bobine à un générateur alternatif, on observe que l'anneau saute en l'air : les courants qui le parcourent s'opposent à la variation du flux du champ magnétique qui le traverse. Ceci prouve que ce sont des courants car une petite coupure dans l'anneau l'empêche de sauter en l'air<sup>4</sup>.

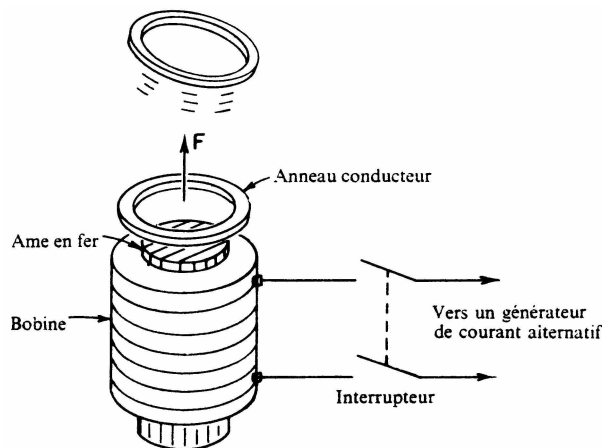


FIGURE 4.3 – Un anneau conducteur est repoussé par un électroaimant à courant variable (figure extraite de [4, tome I, page 278]).

### 4.2.3 Circuit mobile dans un champ constant

Dans ce cas, physiquement, les porteurs de charge du circuit subissent l'influence de la composante magnétique de la force de **Lorentz**. Le cas du circuit mobile dans un champ constant est appelé *cas de Lorentz*.

4. Cette expérience est la variante moderne des expériences originelles que **Faraday** faisait avec des aiguilles et des fils qu'il fabriquait lui-même..

---

## Calcul de la force électromotrice d'induction

On a dans ce cas  $\vec{v} \neq \vec{0}$  et  $\partial \vec{A} / \partial t = \vec{0}$ . On déduit de (4.6) que  $e_{AB}$  et  $e$  s'écrivent :

$$e_{AB} = \int_A^B (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} \quad \text{et} \quad e = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

On considère une portion  $AB$  de conducteur, rigide, déplacée à la vitesse  $\vec{u}$  dans le référentiel ( $\mathcal{R}$ ) où règne un champ  $\vec{B}$  constant. Une charge libre du conducteur se déplacera à la vitesse  $\vec{v}_a$  par rapport à ( $\mathcal{R}$ ). On a  $\vec{v}_a = \vec{u} + \vec{v}_0$  où  $\vec{v}_0$  est la vitesse de la charge par rapport au conducteur<sup>5</sup>. Cette charge libre sera soumise à la force motrice  $\vec{f}_m = q(\vec{u} + \vec{v}_0) \times \vec{B}$  dont la circulation est reliée à la force électromotrice  $e_{AB}$  :

$$e_{AB} = \frac{1}{q} \int_A^B \vec{f}_m \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} + \int_A^B (\vec{v}_0 \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

Dans cette équation, le 2<sup>e</sup> terme est nul car il s'agit d'un produit mixte dont deux termes ( $\vec{v}_0$  et  $d\vec{\ell}$ ) sont parallèles. Finalement, on peut écrire :

$$e_{AB} = \frac{1}{dt} \int_A^B ((\vec{u} dt) \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

Comme le conducteur a été déplacé de  $dr = u dt$  pendant  $dt$ , on peut écrire :

$$((\vec{u} dt) \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = (d\vec{r} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = - (d\vec{r} \times d\vec{\ell}) \cdot \vec{B}$$

où la 2<sup>e</sup> égalité vient des propriétés (A.14) du produit mixte. Finalement, on aura :

$$e_{AB} = - \frac{1}{dt} \int_A^B (d\vec{r} \times d\vec{\ell}) \cdot \vec{B} \quad (4.11)$$

Le produit mixte dans l'intégrale représente le flux de  $\vec{B}$  à travers l'élément de surface  $d\vec{r} \times d\vec{\ell}$ . C'est la surface balayée par l'élément de longueur  $d\vec{\ell}$  du circuit pendant l'intervalle  $dt$ , c'est-à-dire le flux coupé par le circuit pendant  $dt$ .

Dans le cas d'un circuit ouvert, la force motrice  $\vec{f}_m$  déplace les porteurs de charge jusqu'à ce qu'elle soit équilibrée par le champ électrostatique que ces charges déplacées créent. La différence de potentiel aux extrémités du circuit est la force électromotrice induite.

Dans le cas d'un circuit fermé, un courant induit se forme dans le conducteur. Le flux coupé par le circuit est la variation du flux de  $\vec{B}$  à travers le circuit, soit d'après (3.34) :

$$d\Phi = \int_{(C)} (d\vec{r} \times d\vec{\ell}) \cdot \vec{B} \quad (4.12)$$

On obtient alors (à nouveau) la *loi de Faraday* :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (4.13)$$

**Remarque :** On peut noter l'analogie formelle entre les relations (4.8) et (4.13).

## Relation de Maxwell-Faraday

Comme dans le cas du circuit fixe dans un champ variable, on retombe sans difficulté sur l'expression de (MF) donnée par (4.10).

---

5. En prenant la loi de composition classique des vitesses, on se place implicitement dans le cas des vitesses faibles devant la vitesse  $c$  de la lumière dans le vide.

## 4.2.4 Deux interprétations différentes de l'induction : lien avec la relativité

Traditionnellement, on ne traite pas le cas général des circuits en mouvement quelconque dans un champ quelconque, avant de se pencher sur une interprétation de l'induction électromagnétique, qu'on peut interpréter de deux façons différentes :

1. En champ variable, les porteurs de charge du conducteur subissent l'influence d'un champ électrique induit.
2. En champ constant, les porteurs de charges subissent l'influence de la composante magnétique de la force de **Lorentz**.

La loi de **Faraday** semble ainsi être le seul exemple en physique où deux phénomènes complètement différents a priori se traduisent pas la même loi. En fait, il n'en est rien. Ces deux phénomènes ont une interprétation commune. Pour comprendre ceci, il faut maîtriser le § D.2. On considère (cf Figure 4.4) le cas d'un fil déplacé à la vitesse  $\vec{u}$  dans un champ. Il sera au repos dans ( $\mathcal{R}'$ ) et en mouvement dans ( $\mathcal{R}$ ). Les calculs précédents ont été effectués en considérant les forces  $\vec{u} \times \vec{B}$  qui s'appliquent sur chaque porteur de charge au même instant. Or deux cas différents sont à considérer :

1. Dans le référentiel ( $\mathcal{R}'$ ) en translation par rapport au référentiel ( $\mathcal{R}$ ) du laboratoire, le circuit est immobile, c'est-à-dire que la force électromotrice  $e'(t')$  mesure la force qui s'exerce sur les porteurs de charge à l'instant  $t'$ . Le conducteur baigne dans le champ électrique  $\vec{E}'$ . Comme il est au repos, la densité superficielle de charge s'ajuste pour annuler le champ total à l'intérieur.
2. Dans le référentiel ( $\mathcal{R}$ ), le circuit n'est plus immobile. La relativité nous enseigne que **la simultanéité est alors perdue**. La force électromotrice  $e(t)$  ne peut pas mesurer exactement la force qui s'exerce sur les porteurs de charge à l'instant  $t$ . La force de **Lorentz** qui s'applique sur les porteurs de charge les déplace. Un champ électrique  $\vec{E}_S$  apparaît et s'oppose à  $\vec{u} \times \vec{B}$ .

L'action du champ électromagnétique sur un conducteur ne s'explique donc pas de la même façon selon que le conducteur est en mouvement ou au repos.

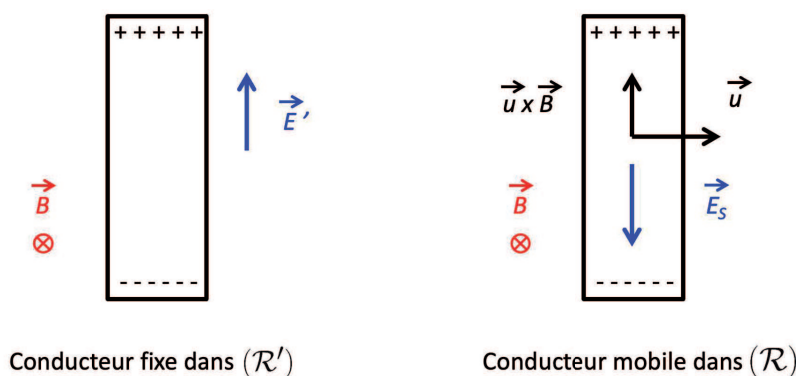


FIGURE 4.4 – L'action du champ électromagnétique sur un conducteur ne s'explique pas de la même façon selon que le conducteur est au repos ou en mouvement (voir texte).

**Remarque 1 :** En fait, l'électrodynamique relativiste montrerait que les effets de l'induction électromagnétique ne sont donnés par la loi de **Faraday** qu'au 1<sup>er</sup> ordre en  $u/c$  et que les effets de pertes de simultanéité sont du 2<sup>e</sup> ordre en  $u/c$ . La loi de **Faraday** n'est pas une loi exacte de l'électromagnétisme, au même titre que les équations de **Maxwell**. Elle n'est valable que dans la limite des basses vitesses d'entraînement, mais ce sera le cas pour toutes les applications courantes ! Sans quoi, on aurait eu besoin de la relativité (générale) pour expliquer le fonctionnement d'une dynamo..

**Remarque 2 :** On a regroupé en Illustration C.4 quelques exemples d'application de la loi de **Faraday**.

## 4.2.5 Cas général : circuit quelconque dans un champ quelconque

Dans le cas général, une variation du flux magnétique à travers un circuit est due à la superposition des deux effets étudiés dans les deux paragraphes précédents. On doit prendre en compte la variation totale du flux à travers le circuit, due d'une part au fait que  $\vec{B}$  est variable dans le temps, et d'autre part au déplacement (ou à la déformation) du circuit.

La loi de **Faraday** s'applique au courant mesuré dans le conducteur au travers duquel le flux de  $\vec{B}$  varie, quelque soit la cause de cette variation. Elle concerne le champ  $\vec{E}'$  sur le circuit, évalué dans le référentiel dans lequel le circuit est au repos (cas de **Neumann**). On peut écrire la loi de **Faraday** pour un circuit dans le cas le plus général sous la forme :

$$\oint_{(C)} \vec{E}' \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

où cette fois-ci le flux  $\Phi$  vérifie :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \iint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right] \quad (4.14)$$

alors que la surface  $(\Sigma)$  est en mouvement à la vitesse  $\vec{u}$  par rapport aux sources du champ magnétique. On peut monter à l'aide d'un calcul un peu pénible (voir le Complément D.5) que dans ce cas, on doit utiliser les *dérivées totales* et écrire :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \iint_{(\Sigma)} \frac{D\vec{B}}{Dt} \cdot d\vec{S} = \iint_{(\Sigma)} \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{u}) \right] \cdot d\vec{S} \quad (4.15)$$

On a donc :

$$\oint_{(C)} \vec{E}' \cdot d\vec{\ell} = - \iint_{(\Sigma)} \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{u}) \right] \cdot d\vec{S}$$

Comme ceci est valable pour toutes les surfaces  $(\Sigma)$ , on en déduit, à l'aide du théorème de **Stokes** (A.23) :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E}' - \vec{u} \times \vec{B}) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

D'après la loi de composition classique des champs (D.24), le champ  $\vec{E}' - \vec{u} \times \vec{B}$  est celui que mesurerait un observateur immobile par rapport au champ  $\vec{B}$ . Pour obtenir le champ électrique  $\vec{E}$  que mesure un observateur immobile, il faut soustraire à  $E'$  (mesuré par l'observateur en mouvement), le *champ effectif*  $\vec{u} \times \vec{B}$ . On obtient finalement pour un observateur stationnaire :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.16)$$

En comparant (4.10) et (4.16), on conclut que la forme locale de la loi de **Faraday** est indépendante du mouvement du conducteur dans le champ  $\vec{B}$ .

## 4.2.6 Limites dans l'utilisation de la loi de Faraday

Ce paragraphe regroupe quelques exemples classiques (dus à **Faraday** en particulier) selon lesquels la loi de **Faraday** serait mise en défaut. En fait, ces exemples ne font que préciser les règles d'application de cette loi. De manière générale, elle ne peut s'appliquer que sur des **circuits** sur lesquels le **matériau** du circuit reste identique. Quand ce matériau varie, il faut revenir aux deux lois fondamentales :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (4.17)$$

Ayant ceci en tête, on peut expliquer toutes les *réfutations* de ce paragraphe (qui n'en sont donc pas)..

## Système où le flux ne varie pas, alors qu'il existe une force électromotrice

La Figure 4.5 donne un exemple de système où le flux du champ  $\vec{B}$  ne varie pas, alors même qu'on mesure une force électromotrice. Quand le *disque de Faraday*<sup>6</sup> ou la roue de **Barlow** tournent, le circuit (c'est-à-dire la région de l'espace où se trouvent les courants) ne bouge pas. En régime stationnaire, le flux à travers le circuit ne varie donc pas. Et pourtant, on observe un courant dans le circuit.

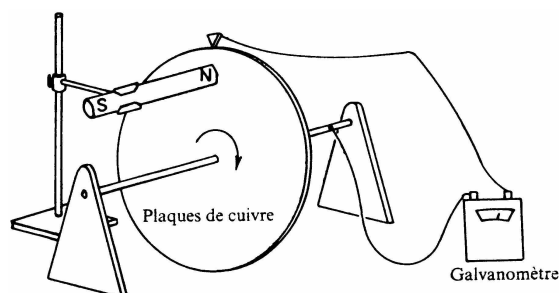


FIGURE 4.5 – Le disque de **Faraday** est un système où l'on mesure une force électromotrice alors que le flux du champ  $\vec{B}$  ne varie pas (figure extraite de [4, tome I, page 290]).

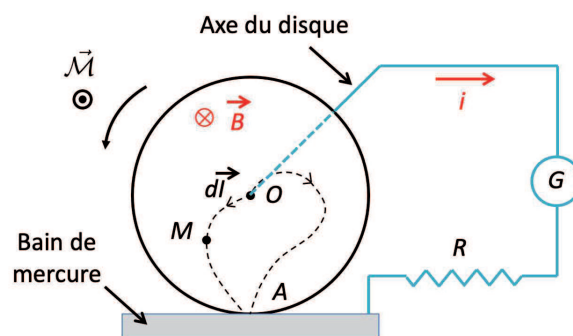


FIGURE 4.6 – Une roue de **Barlow** mobile dans un champ  $\vec{B}$  uniforme crée un courant dans le circuit (voir texte)

Plus qualitativement, en reprenant les notations de la Figure 4.6, on considère la roue de centre  $O$  et de rayon  $a$  lancée à la vitesse angulaire  $\omega$ , dans un champ  $\vec{B}$  uniforme et permanent.

En un point  $M$  tel que  $\vec{OM} = \vec{r}$ , le champ électromoteur vaut (cas de **Lorentz**)  $\vec{E}_m = \vec{v} \times \vec{B}$ . Comme  $\vec{r} \perp \vec{B}$ , on a  $\vec{E}_m = (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{B} = (\vec{\omega} \cdot \vec{B}) \vec{r} = \omega B \vec{r}$ . La force électromotrice induite le long d'une ligne de courant entre  $O$  et  $A$  est donc :

$$e = \int_O^A \vec{E}_m \cdot d\vec{r} = \omega B \int_O^A \vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{\omega B a^2}{2} \quad (4.18)$$

On mesure donc une force électromotrice alors que le flux du champ magnétique ne varie pas dans le circuit puisque celui-ci occupe toujours la même position  $OA$  dans l'espace. Le résultat ne dépend pas de la ligne de courant choisie. En notant  $R$  la résistance du circuit, l'intensité du courant de charge vaut  $i = \omega B a^2 / (2R)$ .

## Système où le flux varie, alors qu'il n'existe pas de force électromotrice

La Figure 4.7 donne un exemple assez académique de système où le flux du champ  $\vec{B}$  varie, alors même qu'on ne mesure pas de force électromotrice. Ce système est constitué de deux plaques métalliques à bord arrondis, placées dans un champ  $\vec{B}$  uniforme. Chaque plaque est reliée aux bornes d'un galvanomètre. En faisant basculer les plaques d'un petit angle, le point de contact passe de  $P$  à  $P'$ . Le flux magnétique entre les états initiaux et finaux varie considérablement puisque la surface entre les lignes pointillées peut être très grande. Par contre, le balancement entre  $P$  et  $P'$  peut être rendu très lent, ce qui empêche l'apparition d'une force électromotrice.

## Systèmes avec commutation

On donne maintenant une dernière erreur classique, venant d'une mauvaise compréhension de la règle du flux. La Figure 4.8 représente un système constitué d'un enroulement de spires dans un champ  $\vec{B}$  constant, fermé par un curseur mobile. Lorsqu'on déplace le curseur, le nombre de spires constituant le circuit varie

6. On appelle généralement *roue de Barlow* le dispositif de la Figure C.8 où le disque conducteur plonge dans un bain de mercure et *disque de Faraday* le dispositif dérivé (perfectionné par **Faraday**) de la Figure 4.5 où le courant quitte le disque par un contact métallique glissant sur sa tranche.

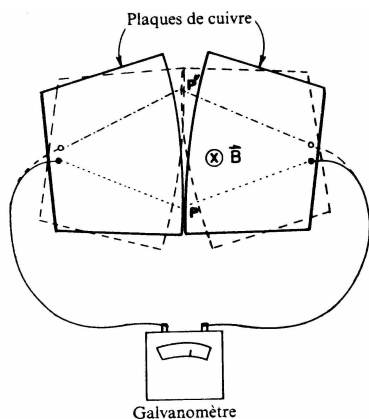


FIGURE 4.7 – Ce dispositif est un système où le flux du champ magnétique varie sans qu'on mesure de force électromotrice (figure extraite de [4, tome I, page 290]).

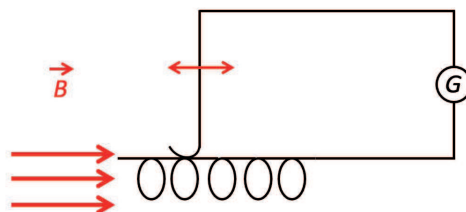


FIGURE 4.8 – Le circuit constitué d'un enroulement de spires dans un champ  $\vec{B}$ , fermé par un curseur mobile, n'est le siège d'aucun courant induit.

donc le flux de  $\vec{B}$  à travers le circuit varie également. Expérimentalement, on ne mesure pourtant aucun courant induit lorsqu'on déplace le curseur.

Ce résultat peut paraître surprenant, mais en y réfléchissant bien, on remarque que :

- Il n'y a pas de champ de **Neumann**, car le champ  $\vec{B}$  ne varie pas.
- Il n'y a pas de déplacement du circuit, car les spires restent immobiles (seul le curseur se déplace).

Il est donc cohérent de ne pas mesurer de force électromotrice aux bornes du circuit !

### 4.3 Auto-induction et induction mutuelle

Dans ce paragraphe, on applique les lois de l'induction électromagnétique au cas particulier d'un circuit filiforme unique (*auto-induction*) ou de plusieurs circuits en interaction (*inductance mutuelle*).

#### 4.3.1 Inductance propre d'un circuit filiforme

Par définition, le *champ propre* d'un circuit est le champ dont ce circuit est la source, et le *flux magnétique propre* d'un circuit est le flux de son champ propre ("envoyé par le circuit à travers lui-même").

On considère un circuit orienté ( $C$ ) parcouru par un courant  $i(t)$  (cf Figure 4.9). Comme le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par ce circuit est proportionnel au courant  $i(t)$  (d'après la loi de **Biot** et **Savart**) et que le flux propre est  $\Phi_P = \iiint \vec{B} \cdot d\vec{S}$ , on voit que le flux propre est proportionnel à  $i(t)$ . On pose par définition :

$$\Phi_P = L i \tag{4.19}$$

où le coefficient  $L$  est appelé *inductance propre* ou *coefficient d'auto-induction* du circuit, ou *self-induction*, ou *self*. Il s'exprime en Henry (H).

**Remarque 1 :** Le coefficient d'auto-induction  $L$  ne dépend que des caractéristiques géométriques du circuit ( $C$ ).

**Remarque 2 :** On peut montrer que le coefficient d'auto-induction  $L$  est toujours positif.



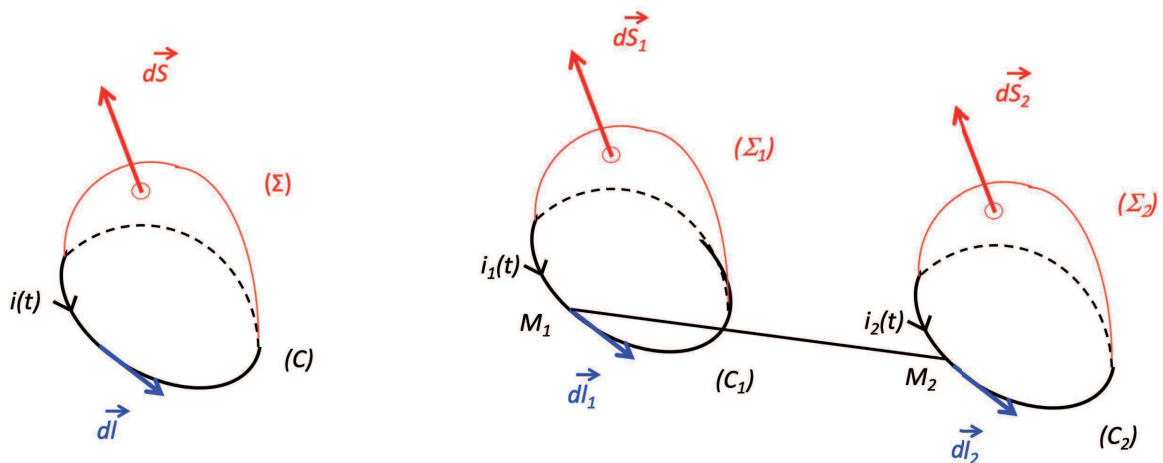


FIGURE 4.9 – Un circuit  $(C)$  parcouru par le courant  $i(t)$  crée un champ propre (voir texte).

FIGURE 4.10 – Interaction entre deux circuits parcourus respectivement par  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$ .

### 4.3.2 Inductance mutuelle de plusieurs circuits filiformes

#### Inductance mutuelle de deux circuits

La loi de **Faraday** s'applique au courant mesuré dans le conducteur au travers duquel le flux de  $\vec{B}$  varie, quelque soit la cause de cette variation. On considère deux circuits filiformes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  parcourus respectivement par des courants  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  et produisant des champs magnétiques  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$  (cf Figure 4.10).

En utilisant l'expression (3.31) du potentiel vecteur d'un circuit filiforme, on montre immédiatement que le flux magnétique  $\Phi_{12}$  envoyé par le circuit  $(C_1)$  à travers le circuit  $(C_2)$  s'écrit avec des notations évidentes :

$$\Phi_{12} = \iint_{(\Sigma_2)} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \oint_{(C_2)} \vec{A}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1(t) \oint_{(C_2)} \left( \oint_{(C_1)} \frac{d\vec{\ell}_1}{r_{12}} \right) \cdot d\vec{\ell}_2 \quad (4.20)$$

soit finalement, en intervertissant les intégrales qui portent sur des variables indépendantes :

$$\Phi_{12} = M_{21} i_1 \quad \text{avec} \quad M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C_1)} \oint_{(C_2)} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{r_{12}} \quad (4.21)$$

Cette expression donnant le *coefficient d'induction mutuelle*  $M_{21}$  (ou *inductance mutuelle*) des deux circuits est appelée *formule de Neumann*. L'inductance se mesure en Henry (H).

**Remarque 1 :** L'inductance mutuelle de deux circuits ne dépend que de leurs formes et de leurs positions relatives. C'est une grandeur purement géométrique. Son signe dépend des orientations des courants sur les circuits. Si on change le sens du courant sur un des deux circuits, l'inductance mutuelle change de signe.

**Remarque 2 :** La symétrie de la formule de **Neumann** (4.21) montre qu'en inversant les indices on obtient :

$$M_{12} = M_{21} = M \quad (4.22)$$

**Remarque 3 :** On ne peut pas calculer le coefficient d'auto-induction (4.19) à l'aide de la formule de **Neumann** (4.21) car cette expression diverge pour  $r_{12} \rightarrow 0$ . Il faut alors abandonner l'approximation du circuit filiforme et calculer le flux en décomposant le circuit en tubes de courant élémentaires parcourus chacun par le courant  $di$ . Ces calculs sont généralement pénibles et pas toujours faisable.

---

**Remarque 4 :** Comme le potentiel vecteur  $\vec{A}$  ne diverge pas à la traversée d'une nappe de courant (seul le champ  $\vec{B}$  y subit une discontinuité), on peut calculer le coefficient d'auto-induction dans les cas où il existe une densité surfacique de courant.

### Flux magnétique total dans le cas de deux circuits

Le flux magnétique total  $\Phi_1$  passant à travers le circuit (1) est la somme de l'effet des circuits (1) et (2), soit :

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$$

### Généralisation à $n$ circuits : matrice inductance

On peut généraliser ceci à un ensemble de  $n$  circuits. En considérant un circuit ( $C_i$ ), les flux dus à tous les autres circuits ( $C_j$ ) (avec  $i \neq j$ ) à travers le circuit ( $C_i$ ) s'additionnent et flux total  $\Phi_i$  à travers le circuit ( $C_i$ ) est donné par la somme des flux dus aux autres circuits et de son flux propre :

$$\Phi_i = L_i i_i + \sum_{j \neq i} M_{ij} i_j = \sum_j [M]_{ij} i_j \quad (4.23)$$

où  $M_{ij}$  est le coefficient d'induction mutuelle entre les circuits ( $C_i$ ) et ( $C_j$ ). L'ensemble des coefficients  $M_{ij}$  définit la *matrice inductance*  $[M]$ .

**Remarque 1 :** La matrice inductance  $[M]$  est symétrique et ses coefficients diagonaux  $M_{ii}$  sont positifs (ce sont les inductances propres ( $M_{ii} = L_i$ )).

**Remarque 2 :** Chaque coefficient  $M_{ij}$  de la matrice inductance  $[M]$  ne dépend que des circuits ( $C_i$ ) et ( $C_j$ ). En électrostatique, les coefficients  $C_{ij}$  dépendent au contraire de tous les conducteurs.

### Cas particulier de deux circuits couplés

Si on ne considère que deux circuits, la matrice inductance s'écrit simplement :

$$[M] = \begin{pmatrix} L_1 & M_{12} \\ M_{21} & L_2 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

On peut introduire le *coefficient de couplage magnétique*  $k$  défini par :

$$k = \frac{|M_{12}|}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (4.25)$$

On peut montrer que  $0 \leq k \leq 1$ . Le couplage sera dit *serré* si  $k \approx 1$  et *lâche* si  $k \approx 0$ . Pour un couplage *idéal* ( $k \equiv 1$ ), toutes les lignes de champ créées par le circuit ( $C_1$ ) traversent le circuit ( $C_2$ ), et réciproquement. C'est cette condition que l'on essaye de réaliser pour un transformateur.

## 4.3.3 Auto-induction et induction entre circuits couplés

### Auto-induction

D'après l'expression du coefficient d'auto-induction (4.19), une force électromotrice induite d'auto-induction  $e(t)$  apparaît lorsque le courant  $i(t)$  dans un circuit varie, puisque le flux du champ  $\vec{B}$  va varier :

$$e(t) = -L \frac{di}{dt} \quad (4.26)$$

Cette force électromotrice s'oppose à la variation du courant  $i$ . Elle interdit toute discontinuité dans l'intensité, et oppose une certaine inertie au courant.

## Induction entre circuits couplés

Pour des circuits fixes, une variation de courant dans l'un des circuits entraîne une variation de flux de  $\vec{B}$  à travers tous les circuits (lui compris), donc une force électromotrice induite dans chaque circuit, due au couplage entre les circuits. De la linéarité de tous les processus, on peut déduire que la force électromotrice induite dans le circuit ( $C_i$ ) se met sous la forme :

$$e_i(t) = - \frac{d\Phi_i}{dt} = - \sum_j M_{ij} \frac{di_j}{dt} \quad (4.27)$$

En notant  $E_i$  la somme de toutes les autres forces électromotrices du circuit ( $C_i$ ) ( $e_i$  non comprise) et  $R_i$  la résistance totale du circuit ( $C_i$ ), la loi des mailles s'écrira finalement sur chaque circuit ( $C_i$ ) :

$$E_i - \sum_j M_{ij} \frac{di_j}{dt} - R_i i_i = 0 \quad (4.28)$$

Ce système de  $n$  équations couplées régit l'évolution des courants dans les conducteurs.

**Remarque :** Si le circuit ( $C_i$ ) est mobile, son déplacement entrainera une variation du flux magnétique (puisque les  $M_{i \neq j}$  varient). Les forces électromotrices correspondantes sont alors à inclure dans  $E_i$ .

## 4.4 Energie magnétique

### 4.4.1 Energie emmagasinée par des circuits filiformes

#### Cas d'un seul circuit

On considère un seul circuit rigide et fixe (cf Figure 4.11). En fermant l'interrupteur, la force électromotrice du générateur et la force électromotrice d'auto-induction s'additionnent. La loi d'**Ohm** généralisée s'écrit :

$$e_0 - L \frac{di}{dt} = R i \quad \text{soit} \quad i(t) = \frac{e_0}{R} \left( 1 - \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \right) \quad (4.29)$$

Le courant dans le circuit croît jusqu'à sa valeur finale  $I = e_0/R$ .

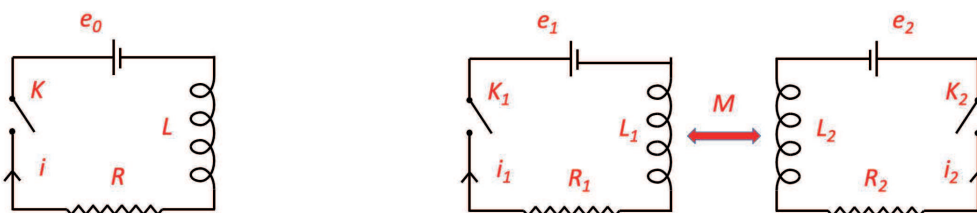


FIGURE 4.11 – L'énergie magnétique stockée dans un ou plusieurs circuits fait apparaître les inductances et les mutuelles (voir texte).

L'énergie totale  $dW$  fournie par la force électromotrice  $e(t)$  pendant l'intervalle  $dt$  s'écrit :

$$dW = e(t) i(t) dt = R i^2 dt + L i di \quad (4.30)$$

où le 1<sup>er</sup> terme traduit le dégagement de chaleur par effet **Joule** dans le circuit et 2<sup>e</sup> terme l'effet d'auto-induction. Cet effet est différent selon le signe de la variation du courant  $di$  :

- Lors de l'établissement du courant ( $di > 0$ ),  $L i di$  représente l'énergie nécessaire pour modifier le champ magnétique associé au circuit. L'énergie magnétique totale  $U_m$  associée à ce processus est :

$$U_m = \int_0^\infty L i \frac{di}{dt} dt = \int_0^I L i di = \frac{1}{2} L I^2 \quad (4.31)$$

$U_m$  est l'énergie potentielle associée aux forces d'induction qui s'exercent sur le circuit.

- Lors de la coupure du courant ( $di < 0$ ), on obtient :

$$0 = L \frac{di}{dt} + Ri \quad \text{soit} \quad i(t) = I \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \quad (4.32)$$

On dissipe alors par effet **Joule** l'énergie  $w$  :

$$w = \int_0^\infty Ri^2 dt = - \int_0^\infty Li \frac{di}{dt} dt = - \int_I^0 Li di = \frac{1}{2} LI^2 \quad (4.33)$$

L'énergie  $U_m$  qui avait été initialement stockée dans le circuit, est donc récupérable, par exemple sous forme de travail si la résistance était remplacée par un moteur. C'est l'*énergie magnétique* stockée dans le circuit.

**Remarque :** Lorsque le courant varie dans le circuit, la force électromotrice d'auto-induction travaille et fournit aux porteurs de charge durant  $dt$  l'énergie  $\mathcal{E}$  :

$$d\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt} i dt = -L i di \quad \text{soit} \quad d\mathcal{E} = -dU_m$$

car ce travail dérive de l'énergie potentielle  $U_m = 1/2 \times L i^2$ .

### Cas de deux circuits

On considère deux circuits rigides, fixes et couplés (cf Figure 4.11). On peut écrire avec des notations évidentes :

$$\begin{cases} e_1 - \frac{d\Phi_1}{dt} = R_1 i_1 & \text{avec } \Phi_1(t) = L_1 i_1(t) + M i_2(t) \\ e_2 - \frac{d\Phi_2}{dt} = R_2 i_2 & \text{avec } \Phi_2(t) = L_2 i_2(t) + M i_1(t) \end{cases}$$

où  $L_1$  et  $L_2$  sont constantes (car les circuits sont rigides), ainsi que  $M$  (car les circuits sont fixes). On en déduit le bilan énergétique :

$$e_1 i_1 + e_2 i_2 = \frac{d\Phi_1}{dt} i_1 + \frac{d\Phi_2}{dt} i_2 + R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 \quad (4.34)$$

Une partie de la puissance fournie par le générateur est dissipée par effet **Joule**. Une autre partie sert à créer les forces électromotrices qui s'opposent aux variations du courant. Cette dernière puissance correspond au travail  $\delta W_G$  :

$$\delta W_G = i_1 d\Phi_1 + i_2 d\Phi_2 \quad (4.35)$$

Ce résultat général ne suppose rien du lien entre les courants et les flux.

On va maintenant se mettre dans le cas particulier où ce lien est linéaire :

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \quad \text{et} \quad \Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1 \quad (4.36)$$

En supposant que  $M$ ,  $L_1$  et  $L_2$  sont constants, (4.35) devient :

$$\delta W_G = L_1 i_1 di_1 + L_2 i_2 di_2 + M (i_1 di_2 + i_2 di_1) \quad (4.37)$$

Comme cette expression est une différentielle exacte par rapport aux variables  $i_1$  et  $i_2$  ( $\delta W_G = dU_m$ ), on en déduit que :

$$U_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \quad (4.38)$$

Le bilan énergétique (4.34) devient alors :

$$e_1 i_1 + e_2 i_2 = \frac{dU_m}{dt} + R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 \quad (4.39)$$

La puissance fournie par les générateurs sert à augmenter  $U_m$ , tout en créant de l'effet **Joule**. En l'absence de courant,  $U_m = 0$ . C'est l'énergie magnétique stockée dans le circuit.

On peut également écrire l'énergie magnétique  $U_m$  sous la forme :

$$U_m = \frac{1}{2} (i_1 \Phi_1 + i_2 \Phi_2) \quad (4.40)$$

**Remarque :** Lorsque les courants varient, les forces électromotrices d'induction travaillent et fournissent aux porteurs de charge durant  $dt$  :

$$d\mathcal{E} = -i_1 \frac{d\Phi_1}{dt} dt - i_2 \frac{d\Phi_2}{dt} dt = -i_1 d\Phi_1 - i_2 d\Phi_2 \quad \text{soit} \quad d\mathcal{E} = -dU_m$$

$U_m$  apparaît comme l'énergie potentielle associée aux forces d'induction électromagnétique.

### Généralisation

En généralisant, on montrerait que :

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_k i_k \Phi_k \quad (4.41)$$

$U_m$  est le travail effectué contre les forces dues à l'induction qui s'exercent sur les porteurs de charges.

## 4.4.2 Energie emmagasinée par des distributions volumiques de courant

### Travail du champ électrique induit

On considère une densité volumique de courant  $\vec{J}$  localisée dans l'espace. Les porteurs de charge sont soumis à la force de **Lorentz**  $\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  mais la puissance qu'ils reçoivent est uniquement due au champ  $\vec{E}$ . D'après (1.12), la puissance totale reçue est donc :

$$\iiint_{\text{Espace}} \vec{J} \cdot \vec{E} dV = - \iiint_{\text{Espace}} \vec{J} \cdot \vec{\nabla}(\Phi) dV - \iiint_{\text{Espace}} \vec{J} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dV \quad (4.42)$$

D'après (A.8), on peut écrire  $\vec{J} \cdot \vec{\nabla}(\Phi) = \vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{J}) - \Phi \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{J})$  car  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$  puisque qu'on se situe dans l'ARQS. En utilisant (A.22), la 1<sup>re</sup> intégrale de (4.42) s'écrit donc :

$$\iiint_{\text{Espace}} \vec{J} \cdot \vec{\nabla}(\Phi) dV = \oint_{(S)} \Phi \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

où on suppose que la surface ( $S$ ) englobe toute la distribution de courant (c'est faisable pour une distribution localisée). Sur ( $S$ ), on a exactement  $\vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$ , donc l'intégrale est nulle. Le travail effectué pendant  $dt$  est donc :

$$d\mathcal{T} = - \iiint_{\text{Espace}} \vec{J} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dV$$

**Remarque :** Cette expression ne préjuge en rien du lien entre  $\vec{J}$  et  $\vec{A}$ . On verra au chapitre 7 qu'elle est également valable pour les milieux magnétiques.

### Energie magnétique et énergie totale

On considère un solénoïde circulaire de longueur  $\ell$ , constitué de  $N$  spires de rayon  $a$ , parcouru par un courant d'intensité  $i(t) = I_m \cos(\omega t)$ . Dans l'ARQS, il crée à l'intérieur un champ  $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z = B_m \cos(\omega t) \vec{u}_z$ . On supposera que sur la longueur  $\ell$ , le champ à l'intérieur du solénoïde est uniforme et vaut  $B_0 = \mu_0 N i / \ell$ .

La contribution magnétique à l'énergie stockée dans le solénoïde est :

$$\mathcal{E}_m = \iiint_{(V)} \frac{B_0^2}{2\mu_0} dV = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \times \pi a^2 \ell = \frac{1}{2} L i^2 \quad \text{où} \quad L = \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{\ell}$$

est l'inductance du solénoïde.

En intégrant  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$  sur un contour circulaire ( $C$ ) de rayon  $\rho$ , centré sur l'axe du solénoïde, on peut écrire :

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \left( \iint_{(\Sigma)} \vec{B}_0 \cdot \vec{u}_z d\vec{S} \right) \quad \text{soit} \quad 2\pi\rho E(\rho) = -\pi\rho^2 \frac{dB_0}{dt}$$

On en déduit le champ  $\vec{E}$  à l'intérieur du solénoïde :

$$\vec{E}(\rho) = -\frac{\rho}{2} \frac{dB_0}{dt} \vec{u}_\phi$$

La contribution électrique à l'énergie stockée dans le solénoïde est :

$$\mathcal{E}_e = \iiint_{(V)} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV = \int_0^a \frac{\epsilon_0}{2} \times \frac{\rho^2}{4} \left( \frac{dB_0}{dt} \right)^2 \times \ell 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi a^4 \ell}{16\mu_0 c^2} \left( \frac{dB_0}{dt} \right)^2$$

En prenant les moyennes temporelles, on obtient finalement après calcul :

$$\frac{\langle \mathcal{E}_e \rangle_t}{\langle \mathcal{E}_m \rangle_t} = \frac{a^2 \omega^2}{8c^2} \ll 1 \quad \text{car} \quad \omega \ll \frac{c}{a}$$

À l'intérieur du solénoïde, l'énergie électromagnétique est quasi intégralement due au champ  $\vec{B}$ , la contribution du champ  $\vec{E}$  étant négligeable.

On généralisera ce résultat dans l'ARQS : l'énergie stockée sera uniquement due au champ  $\vec{B}$ . La contribution due au champ  $\vec{E}$  sera systématiquement négligée.

### Energie magnétique en fonction de $\vec{J}$ et $\vec{A}$

Dans l'ARQS, l'énergie magnétique  $U_m$  s'écrit donc :

$$U_m = \iiint_{(Espace)} \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \iiint_{(Espace)} \frac{\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})}{2\mu_0} dV$$

En utilisant (A.9), on peut écrire que  $\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$ . À l'aide de (A.22), il reste finalement :

$$U_m = \oint_{(S)} \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{2\mu_0} \cdot d\vec{S} + \iiint_{(Espace)} \frac{\vec{J} \cdot \vec{A}}{2} dV$$

La surface d'intégration de la 1<sup>re</sup> intégrale, sur une sphère de rayon  $R$ , varie comme  $R^2$ , tandis que  $\vec{A}$  varie au moins comme  $1/R^2$  et  $\vec{B}$  au moins comme  $1/R^3$  à cause du développement dipolaire. Cette intégrale s'annule puisque la 2<sup>e</sup> est évaluée sur l'espace tout entier :

$$U_m = \iiint_{(Espace)} \frac{\vec{J} \cdot \vec{A}}{2} dV$$

Dans la pratique, cette intégration sur l'espace entier est purement formelle, vu qu'en dehors de la zone où se trouvent les courants,  $\vec{J} = \vec{0}$

**Remarque :** Cette forme de l'énergie magnétique  $U_m$  n'est valable que dans l'ARQS et sous sa forme intégrale. Le terme  $\vec{J} \cdot \vec{A}/2$  ne doit surtout pas être interprété comme une densité volumique.

## 4.5 Les courants de Foucault

Dans un conducteur filiforme, le trajet du courant induit est géométriquement bien défini. Ce n'est plus le cas dans un conducteur volumique, où les courants induits circulent dans la masse du conducteur. On les appelle les *courants de Foucault*. Si le conducteur est réel et présente une conductivité finie, les courants de **Foucault** seront amortis car l'énergie qu'ils reçoivent sera en partie dissipée par effet **Joule**. Si au contraire les courants de **Foucault** sont recherchés, ils doivent être entretenus dans un conducteur réel par une force électromotrice, ce qui s'obtient en faisant varier un champ magnétique sur le conducteur ou en déplaçant le conducteur dans un champ fixe.

Plus qualitativement, on considère un matériau conducteur, placé dans un champ magnétique extérieur appliqué  $\vec{B}_a(t)$  supposé uniforme sur tout le volume du conducteur de conductivité  $\gamma$ . Il apparaît en régime variable un champ électrique induit  $\vec{E}$  et des courants induits de densité volumique  $\vec{J}$  tels que :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}_a}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{J} = \gamma \vec{E} \quad (4.43)$$

### 4.5.1 Cas d'un champ induit petit devant le champ appliqué

On suppose en 1<sup>re</sup> approximation que le champ magnétique  $\vec{B}$  local reste identique au champ extérieur appliqué  $\vec{B}_a$  (fixant la direction  $Oz$ ), c'est-à-dire que  $\vec{B}(t) = \vec{B}_a(t) \vec{u}_z$ . En prenant les notations de la Figure 4.12, et notamment les coordonnées cylindriques  $(\rho, \phi, z)$ , le courant induit  $\vec{J}(t)$  s'écrit :

$$\vec{J}(t) = \gamma E(\rho, t) \vec{u}_\phi \quad (4.44)$$

Ceci montre que les lignes de courant sont des cercles concentriques ( $\mathcal{C}$ ), centrés sur l'axe  $Oz$ , dans des plans  $z = Cste$ .

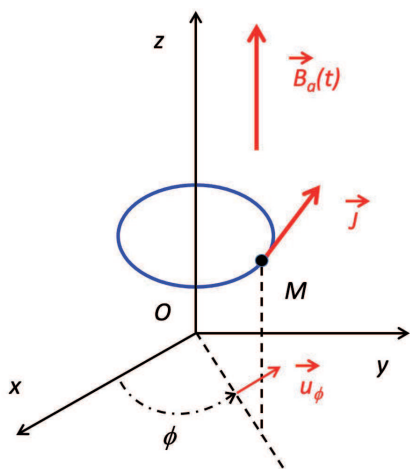


FIGURE 4.12 – Le courant induit  $\vec{J}$  est orthogonal au champ  $\vec{B}_a$  appliqué, dirigé selon ( $Oz$ ).

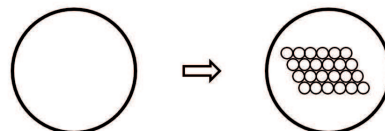


FIGURE 4.13 – En divisant la section d'un conducteur par  $n$ , on diminue les pertes dues aux courants de **Foucault** par  $n^2$  (voir texte).

On intègre (MF) sur le cercle ( $\mathcal{C}$ ) de rayon  $\rho < a$ , où  $a$  est une dimension caractéristique du conducteur :

$$e = \oint_{(\mathcal{C})} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{(\Sigma)} \vec{B}_a \cdot \vec{e}_z dS$$

où la surface ( $\Sigma$ ) est la surface plane qui s'appuie sur le cercle ( $\mathcal{C}$ ). Comme  $B_a(t)$  est uniforme, on en déduit que :  $E \times 2\pi\rho = -\pi\rho^2 \times dB_a/dt$ , soit :

$$\vec{E}(\rho) = -\frac{\rho}{2} \frac{dB_a}{dt} \vec{u}_\phi \quad \text{et} \quad \vec{J}(\rho) = -\frac{\gamma\rho}{2} \frac{dB_a}{dt} \vec{u}_\phi \quad (4.45)$$

Les courants de **Foucault** sont d'autant plus intenses qu'on se situe à la périphérie du conducteur de rayon  $a$ . De plus, en prenant une variation sinusoïdale pour  $\vec{B}_a(t)$  de la forme  $B_0 \sin(\omega t) \vec{u}_z$ , on obtient le courant à la distance  $\rho$  de l'axe :

$$\vec{J}(\rho) = \frac{\gamma \omega \rho}{2} B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_\phi \quad (4.46)$$

qui montre que les courants induits augmentent avec la fréquence. La puissance volumique dissipée dans le conducteur par effet **Joule** sera de la forme  $d\mathcal{P}/dV = \vec{E} \cdot \vec{J} = J^2/\gamma$ . En intégrant sur le volume  $V = \pi a^2 h$  d'une portion de conducteur de longueur  $h$ , on obtient :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\gamma} \iiint_{(V)} J^2 dV = \frac{\pi}{8} \gamma \omega^2 a^4 h B_0^2 \sin^2(\omega t)$$

La puissance volumique moyenne est donc :

$$\left\langle \frac{\mathcal{P}}{V} \right\rangle = \frac{\gamma \omega^2}{16} B_0^2 a^2 \quad (4.47)$$

On en déduit que la puissance dissipée est d'autant plus élevée que  $\omega$  est élevée et que le conducteur est massif ( $a$  grand).

**Remarque 1 :** On diminue la puissance dissipée par les courants de **Foucault** en divisant (dans la direction orthogonale au champ  $\vec{B}$ ) les conducteurs en feuilles ou fibres séparées par un isolant (cf Figure 4.13). D'après (4.47), en remplaçant le conducteur de rayon  $a$  par des fibres de rayon  $a/n$  et en conservant la surface totale de conduction  $\pi a^2$ , les pertes moyennes par unité de volume sont divisées par  $n^2$ . On utilise ceci dans les noyaux des bobines et dans les transformateurs où des tôles feuilletées parallèlement au champ magnétique réduisent l'influence des courants de **Foucault**.

**Remarque 2 :** De manière opposée, on augmente la fréquence du champ  $\vec{B}$  lorsqu'on veut obtenir un échauffement important du conducteur. C'est par exemple le cas dans un *four à induction* où le matériau conducteur est chauffé alors que le creuset qui le contient reste froid.

## 4.5.2 Cas général

On a supposé jusqu'à présent que le champ magnétique  $\vec{B}$  restait uniforme dans le conducteur. En fait, de manière plus réaliste, on doit considérer que le courant induit noté maintenant  $\vec{J}_1$  crée un champ  $\vec{B}_1$  qui se superpose au champ externe appliqué  $\vec{B}_a$ . Le théorème d'**Ampère** permet alors d'écrire :

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{B}_a + \vec{B}_1}{\mu_0} \right) = \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{B}_1}{\mu_0} \right) = \vec{J}_1 \quad \text{car} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}_a = \vec{0} \quad (4.48)$$

Pour fixer les idées, on cherche à évaluer la variation de  $\vec{B}$  due à la densité  $\vec{J}_1$ . Pour cela, on intègre (4.48) à l'instant  $t$  sur un contour rectangulaire, de côtés  $h$  et  $\rho$ . Il n'y a à considérer que la composante selon  $\vec{u}_\phi$  :

$$\frac{B_1(0, t) - B_1(\rho, t)}{\mu_0} h = \frac{\gamma \omega B_0 \cos(\omega t)}{2} \int_0^\rho u du$$

d'où :

$$\vec{B}_1(\rho, t) = \left( B_1(0, t) - \frac{\rho^2}{2\delta^2} B_0 \cos(\omega t) \right) \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

Comme  $\vec{B}_1$  est nul à l'extérieur du cylindre et que  $\vec{B}$  est continu, il reste après application des conditions aux limites en  $\rho = a$  :

$$\vec{B}_1(\rho, t) = B_0 \left( \cos(\omega t) + \frac{a^2 - \rho^2}{2\delta^2} \cos(\omega t) \right) \vec{u}_z$$

L'écart maximal à l'uniformité sera obtenu pour  $\rho \approx 0$  et  $\cos(\omega t) \approx 0$ . Il vaut :

$$\frac{\Delta B}{B_0} = \frac{a^2}{2\delta^2}$$



Pour du cuivre à 50 Hz, sachant que  $\gamma_{Cu} = 5,8 \cdot 10^7$  S/m, on obtient  $\delta \approx 9,4$  mm. Pour un rayon de 1 cm, cet écart atteint 55%.

La relation (4.48) devient donc caduque dès que le régime devient rapidement variable (ie  $\delta$  faible). Dans ce cas, il n'est plus possible de négliger la modification de  $\vec{J}_1$  due à  $\vec{B}_1$ . On doit alors considérer le courant  $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ , où  $\vec{J}_2$  satisfait la loi de **Faraday** :

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{J}_2}{\gamma} \right) + \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \vec{0}$$

La densité volumique  $\vec{J}_2$  produit à son tour une modification du champ magnétique  $\vec{B}_2$  qui, d'après le théorème d'**Ampère**, vaut :

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{B}_2}{\mu_0} \right) = \vec{J}_2$$

En poursuivant ce raisonnement, on voit que  $\vec{B}$  et  $\vec{J}$  se mettent sous la forme de développements en série :

$$\vec{B} = \vec{B}_a + \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_{n-1} + \dots \quad \text{et} \quad \vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 + \dots + \vec{J}_n + \dots \quad (4.49)$$

avec :

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{B}_n}{\mu_0} \right) = \vec{J}_n \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{J}_{n+1}}{\gamma} \right) + \frac{\partial \vec{B}_n}{\partial t} = \vec{0} \quad (4.50)$$

**Remarque 1** : Les termes du développement sont d'ordre de plus en plus élevé en fréquence. La différence d'ordre dans les termes en  $\vec{B}$  et  $\vec{J}$  vient de la loi de **Faraday**.

**Remarque 2** : Lorsque la fréquence est très élevée, il est souvent plus simple de résoudre numériquement les équations globales auxquelles satisfont les champs totaux  $\vec{B}_{tot}$  et  $\vec{J}_{tot}$ , soit :

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{B}_{tot}}{\mu_0} \right) = \vec{J}_{tot} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{J}_{tot}}{\gamma} \right) + \frac{\partial \vec{B}_{tot}}{\partial t} = \vec{0} \quad (4.51)$$

lorsque l'ARQS reste valable.



# Annexe C

## Illustrations des Chapitres 1 à 4

### Sommaire

---

C.1 Exemples de l'action d'un champ électrique . . . . .	115
C.2 Exemples de l'action d'un champ magnétique . . . . .	119
C.3 Champ magnétique terrestre . . . . .	126
C.4 Exemples d'application de l'induction électromagnétique . . . . .	127

---

### Introduction

Cette annexe donne quelques exemples simples d'illustration des chapitres 1 à 4.

### C.1 Exemples de l'action d'un champ électrique

#### C.1.1 Détermination expérimentale de la loi de Coulomb

On utilise une balance de **Coulomb** telle que décrite sur la figure C.1. Deux sphères conductrices identiques  $A$  et  $B$ , supposées ponctuelles, sont placées respectivement sur un point fixe ( $B$ ) et sur une tige isolante ( $A$ ). L'ensemble est maintenu horizontal à l'aide d'un contrepois  $C$  et est suspendu à un fil de torsion.

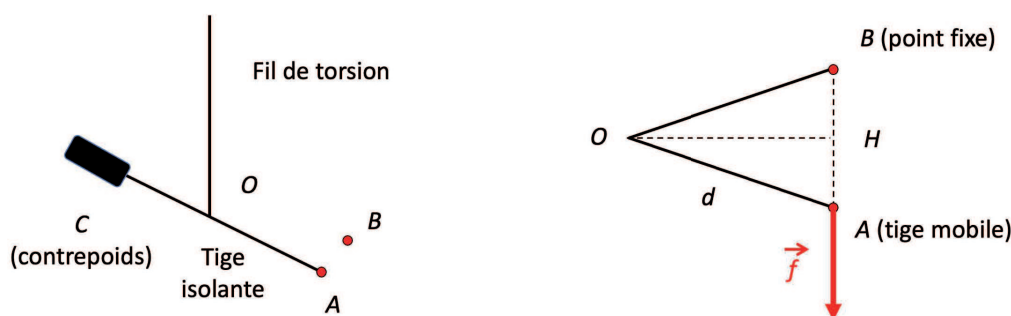


FIGURE C.1 – Schéma de principe de la *balance de torsion de Coulomb* (à gauche) et vue du dessus (à droite).

On met en contact  $A$  et  $B$  et on les électrise. Comme par hypothèse  $A$  et  $B$  sont identiques, elles portent la même charge  $q$  et se repoussent. La tige  $T$  se trouve alors en équilibre correspondant à la torsion  $\alpha$  et au couple  $C\alpha$ .

La boule  $A$  est soumise à la force  $f = 1/4 \pi \epsilon_0 \times q^2/AB^2$ . En prenant les notations de la figure C.1, on a :

$$AB = 2d \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{soit} \quad f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4d^2 \sin^2(\alpha/2)}$$

Le moment  $\mathcal{M}$  de la force  $\vec{f}$  par rapport à l'axe de rotation situé en  $O$  est  $\vec{f} \cdot \overrightarrow{OH}$  soit :

$$\mathcal{M} = f d \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d} \frac{\cos(\alpha/2)}{\sin^2(\alpha/2)}$$

A l'équilibre, ce moment est équilibré par le moment  $C\alpha$  du couple de torsion  $\mathcal{M}$ , soit :

$$C\alpha = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d} \frac{\cos(\alpha/2)}{\sin^2(\alpha/2)} \quad (\text{C.1})$$

En tournant l'ensemble d'un angle  $\beta$  pour rapprocher  $A$  de  $B$  par exemple, l'angle d'équilibre  $\alpha$  prend une nouvelle valeur  $\alpha'$ . On a cette fois :

$$C(\alpha' + \beta) = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d} \frac{\cos(\alpha'/2)}{\sin^2(\alpha'/2)} \quad (\text{C.2})$$

En faisant le rapport entre (C.1) et (C.2), on obtient finalement :

$$\frac{\alpha' + \beta}{\alpha} = \frac{\tan(\alpha/2) \sin(\alpha/2)}{\tan(\alpha'/2) \sin(\alpha'/2)}$$

On mesure la variation  $\alpha' = f(\beta)$  en répétant l'expérience pour diverses valeurs de  $\beta$ . Cette mesure (peu précise) a permis à **Coulomb** de déterminer la forme de sa loi.

### C.1.2 Forces à grande distance dans un gaz

On regroupe sous le terme de *forces de van der Waals* les forces intermoléculaires attractives qui s'exercent sur les molécules d'un gaz<sup>1</sup>. La loi régissant ces forces n'est évidemment pas la loi de **Coulomb** puisque la charge électrique totale d'une molécule est nulle. Ces forces sont de trois types différents et correspondent toutes à des interactions électrostatiques entre dipôles. Ces dipôles peuvent être *permanents* ou *induits*.

#### Effet d'orientation - Force de Keesom

Cet effet résulte de l'interaction entre dipôles permanents des molécules polaires telles que HCl, NH<sub>3</sub> et H<sub>2</sub>O. L'énergie d'interaction entre deux dipôles est fonction de leur orientation relative. A cause de l'agitation thermique, toutes les orientations sont possibles, mais elles ne sont pas équiprobables. **Keesom** a calculé l'énergie moyenne d'interaction  $E_K$  à la température  $T$  dont on déduit la *force de Keesom*  $f_K$  :

$$f_K = C_K \frac{p^4}{T} \frac{1}{r^7} \quad (\text{C.3})$$

où  $p$  est le moment dipolaire permanent des molécules,  $r$  la distance entre les molécules et  $C_K$  une constante.

1. On peut représenter en première approximation le comportement d'un gaz réel par une équation empirique, l'équation de **van der Waals** :

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right) (V - nb) = nRT$$

On montre en thermodynamique que le terme en  $a/V^2$  traduit l'interaction moyenne à grande distance entre toutes les molécules.

---

## Effet d'induction - Force de Debye

Cet effet, calculé par **Debye**, résulte de l'interaction entre des dipôles permanents et des dipôles induits. On considère une molécule  $A$  de moment dipolaire permanent  $\vec{p}_A$  et une molécule  $B$  placée dans le champ électrique  $\vec{E}$  créé par la molécule  $A$ . La molécule  $B$  acquiert le moment induit  $\vec{p}_B = \alpha \vec{E}$ , où  $\alpha$  représente la polarisabilité de la molécule  $B$ . L'interaction entre  $\vec{p}_A$  et  $\vec{p}_B$  se traduit par une énergie  $E_D$  dont on dérive la *force de Debye*  $f_D$  :

$$f_D = C_D \alpha p_A^2 \frac{1}{r^7} \quad (\text{C.4})$$

où  $C_D$  est une constante caractéristique de l'interaction.

## Effet de dispersion - Force de London

Cet effet (découvert par **London**) concerne toutes les molécules, polaires ou non. A un instant donné, toute molécule  $A$  peut avoir une répartition dissymétrique de son nuage électronique. Chaque molécule possède donc un *moment dipolaire instantané* qui va provoquer par influence la polarisation d'une molécule voisine  $A'$ . Le moment dipolaire de chaque molécule est proportionnel à la polarisabilité de la molécule, de sorte que l'énergie d'interaction  $E_L$  est proportionnelle au produit des polarisabilités<sup>2</sup>. On en déduit la *force de London* :

$$f_L = C_L \frac{\alpha \alpha'}{r^7} \quad (\text{C.5})$$

où  $C_L$  est une constante caractéristique de l'interaction.

## Effet global - Force de van der Waals

L'effet global de ces trois forces (dont la dépendance avec la distance intermoléculaire est à chaque fois en  $1/r^7$ ) est la force de **van der Waals** dont on peut dire qu'elle dérive d'un potentiel en  $-1/r^6$ . Ceci explique pourquoi la force de **van der Waals** est à très courte portée et qu'elle est négligeable dans les milieux dilués. L'énergie de **van der Waals** est simplement la somme des énergies de **Keesom**, **Debye** et **London**. La table C.1 donne quelques valeurs numériques typiques d'énergies d'interaction. On y observe, et ceci peut être généralisé, que l'effet de la force de **Debye** est toujours négligeable et que l'effet de la force de **London** est prépondérant dans le cas des molécules non polaires ou faiblement polaires.

	$E_K$	$E_D$	$E_L$	$E_{vdw}$
Ar	0	0	0,486	0,486
CO	$\approx 0$	$\approx 0$	0,5	0,5
HCl	0,189	0,057	0,962	1,208
NH <sub>3</sub>	0,761	0,089	0,842	1,691
H <sub>2</sub> O	2,079	0,110	0,514	2,703

TABLE C.1 – Energies de **Keesom**, **Debye**, **London** et **van der Waals** pour quelques molécules en J/mol (valeurs extraites de G. Dévoré, *Cours de Chimie*, Vuibert, Paris, 1984).

---

2. On peut noter qu'intrinsèquement, cette notion d'influence instantanée est incorrecte. Il faudrait faire apparaître une influence retardée, prenant en compte la distance entre les molécules. Voir à ce sujet pour (beaucoup) plus de détails le problème de physique de l'Agrégation de 2005.

---

### C.1.3 Quelques applications variées de l'électrostatique

#### Photocopie

Le document à reproduire est éclairé à travers une vitre. A l'aide d'un jeu de lentilles, on forme l'image du document sur un tambour au sélénium qui a été préalablement chargé. Le sélénium est un semi-conducteur qui perd sa charge électrique lorsqu'on l'expose à la lumière. Les parties claires du document à photocopier réfléchissent la lumière par diffusion. Celle-ci va décharger le sélénium, ce que ne feront pas les parties sombres qui ne vont pas transmettre de lumière diffusée.

Une poudre de graphite chargée positivement, le *toner*, est ensuite déposée sur le tambour. Elle adhère aux parties qui sont restées chargées électriquement. Le papier vierge est alors mis en contact avec le tambour et une différence de potentiel avec celui-ci assure le transfert du graphite sur le papier. La feuille passe ensuite dans un four qui fixe le graphite sur le papier.

#### Pulvérisation agricole

Un ensemble de buses montées sur un tracteur projette une poudre destinée à être déposée sur les végétaux. Ces buses sont portées à un potentiel de 200 kV qui jouent le rôle d'une électrode ionisante : les grains de poudre se projettent vers les végétaux et recouvrent les deux faces des feuilles car les lignes du champ électrostatique rejoignent les deux cotés des feuilles. Tout jardinier amateur sait que c'est sur la face interne des feuilles que se concentrent la majorité des problèmes (pucerons, champignons, etc.). Avec un tel procédé, cette face est facilement accessible.

#### Reproduction des fleurs

Certains végétaux ont la réputation de se reproduire grâce aux abeilles. Schématiquement, le procédé est toujours le même :

1. En se déplaçant dans l'air, une abeille peut perdre des électrons par frottement et se charger positivement (quelques dizaines de fC au maximum).
2. Certaines fleurs (dites *mâles*) ont leurs anthères<sup>3</sup> isolées électriquement. Si une abeille survole une telle anthère, le champ électrique (typiquement 10 V/cm) attire quelques grains de pollen qui s'attachent à l'abeille.
3. D'autres fleurs de cette même espèce (dites *femelles*) ont leurs stigmates<sup>4</sup> reliées à la terre. En survolant les stigmates d'une autre fleur, le pollen quitte l'abeille et fertilise la fleur.

Les abeilles participent ainsi à la reproduction de certaines espèces de fleurs, mais sans en être informées !

#### Déplacement du gecko

Le gecko est un petit lézard de quelques grammes qui peut se déplacer sur tous types de surface, aussi bien verticales qu'horizontales (mais par en dessous!). Chacune de ses pattes est constituée de milliers de structures carrées de 200 nm de large. Ces structures permettent d'adhérer aux surfaces grâce à des forces inter-moléculaires de type **van der Waals**. Un gecko de 50 g est ainsi capable de supporter une traction de 20 N (c'est-à-dire porter une masse de 20 kg, soit 400 fois la sienne).

En se basant sur ce principe, l'ESA a tenté de construire un robot, *Abigaille*, qui pourrait se déplacer en apesanteur sur les parois extérieures de l'ISS. Pour l'instant, il semble que les résultats ne soient pas probants.

---

3. Anthères : partie terminale de l'étamine contenant le pistil.

4. Stigmates : partie du pistil qui reçoit le pollen.

## C.2 Exemples de l'action d'un champ magnétique

### C.2.1 Action d'un champ $\vec{B}$ sur une charge ponctuelle

#### Visualisation de traces dans une chambre à bulles

La Figure C.2 représente les traces de particules chargées dans une chambre à bulles<sup>5</sup>. La chambre est remplie d'hydrogène liquide et placée dans un champ magnétique intense (typiquement 1 T). Une particule neutre - puisqu'elle ne laisse pas de trace - entre dans la chambre (flèche du haut) et heurte l'électron d'un atome d'hydrogène, auquel elle communique une grande impulsion (flèche du bas). Au cours de la réaction, une paire électron-positron de basse énergie est créée (pour la conservation de la charge, ne pas oublier l'ion!). Ces deux particules spiralent dans le champ  $\vec{B}$  jusqu'à ce que leur vitesse soit inférieure au seuil de détection dans la chambre.

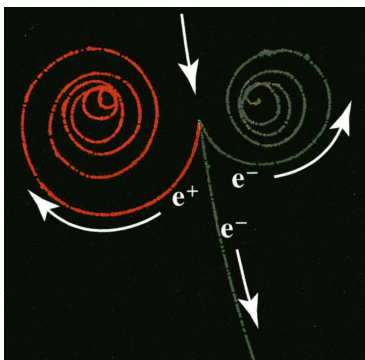


FIGURE C.2 – Une particule incidente non chargée (en haut) donne naissance à un électron et un positron en heurtant l'électron d'un atome d'hydrogène. Dans un champ  $\vec{B}$  uniforme, on visualise les trois traces de particules chargées (Figure extraite de [12, page 158]).

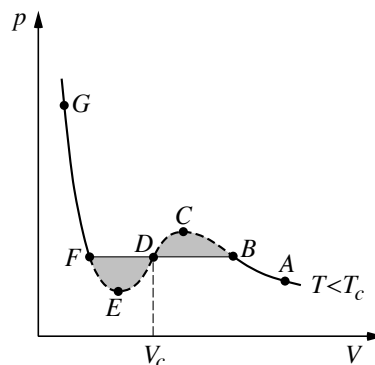


FIGURE C.3 – Diagramme de Watt pour une isotherme calculée selon l'équation de **van der Waals** (pour  $T < T_c$ ). Les états correspondants à  $FE$  correspondent à du liquide surchauffé. La perturbation induite dans le milieu par des particules chargées y fait apparaître des bulles de long de la trajectoire des particules.

**Remarque :** Les chambres à bulles ont été utilisées en physique des hautes énergies jusque vers 1980. Elles sont remplacées de nos jours par d'autres types de détecteurs, notamment des *chambres à fils*.

#### Mesure de $m/q$ à l'aide d'un spectromètre

On peut déduire de la force de **Lorentz** une méthode pour mesurer la masse des particules chargées, ou plus précisément leur rapport masse/charge. Par exemple, la Figure C.4 schématise un *spectromètre de masse* permettant d'étudier des ions positifs (pour des ions négatifs, il suffit d'inverser le sens des champs). Un ion positif est courbé dans une zone où règne un champ  $\vec{B}$  constant. En reprenant les notations de la Figure C.4, chaque ion de masse  $m$  et de charge  $q$  est accéléré par la différence de potentiel  $U$  entre la chambre d'ionisation et la chambre d'analyse (en supposant que sa vitesse de sortie de la chambre d'ionisation est négligeable). On a donc  $v = \sqrt{2qU/m}$ . Il pénètre ensuite dans la chambre d'analyse où il subit un champ  $\vec{B} = B\vec{u}_z$ . Il

5. Le principe d'une *chambre à bulles* (1952) repose sur le fait qu'on peut, dans certaines conditions, observer un corps à l'état liquide à une température supérieure à la température d'ébullition à la pression où l'on opère. Ceci est représenté par la partie  $FE$  de l'isotherme de la Figure C.3. C'est le phénomène de *retard à la vaporisation* (on crée dans ce cas un *liquide surchauffé*). Le liquide existe alors seul sous une pression inférieure à la pression d'équilibre liquide-vapeur. Il est instable et une très faible perturbation fait apparaître des bulles de vapeur dans le liquide. Il n'y a plus ensuite qu'à prendre une photo pour obtenir la Figure C.2.

Antérieurement, on utilisait un principe similaire dans les *chambres à brouillard*, basé cette fois sur la partie  $BC$  de l'isotherme de la Figure C.3. On créait ainsi une *vapeur sursaturée* instable. Le passage des particules chargées liquéfiait localement le gaz et matérialisait la trace. Un des principaux avantages des chambres à bulles est leur possibilité d'enregistrer des taux de comptage bien plus élevés.

décrit alors une trajectoire circulaire de rayon  $R = m v / (q B)$ . La position  $x$  à laquelle l'ion frappe la surface de la chambre est donc :

$$x = \frac{\sqrt{8U}}{B} \sqrt{\frac{m}{q}} \quad (\text{C.6})$$

Dans la pratique, le détecteur est fixe à la position  $x$  et la variation de la tension accélératrice  $U$  permet de faire varier le type d'ions détectés.

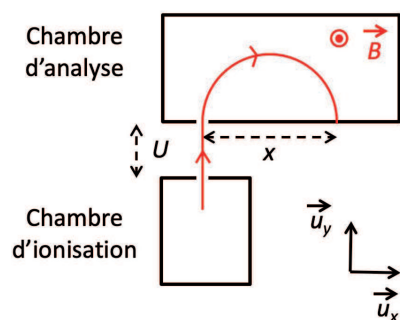


FIGURE C.4 – Principe d'un spectromètre de masse : les particules chargées sont déviées dans une zone où règne un champ  $\vec{B}$ .

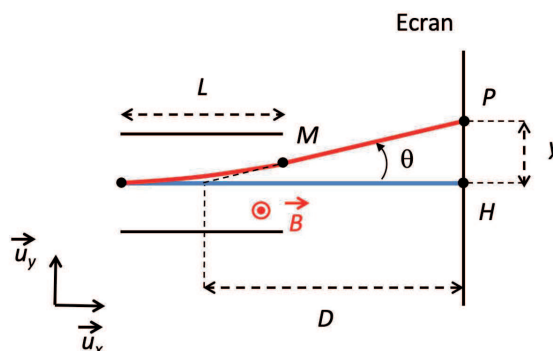


FIGURE C.5 – Schéma du système utilisé par **J.J. Thomson** en 1877 pour mettre en évidence l'électron : des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  croisés permettent de mesurer  $e/m$  (voir texte).

## Découverte de l'électron

La Figure C.5 représente schématiquement l'appareil utilisé par **J.J. Thomson** pour mettre en évidence l'électron en 1897. Les particules chargées (dont on sait maintenant que ce sont des électrons) sont émises par un filament et accélérées par une différence de potentiel. Elles arrivent ensuite à  $t = 0$  avec la vitesse  $v_0 \vec{u}_x$  en  $O$ , à l'entrée d'un condensateur plan où règne un champ  $\vec{E} = -E \vec{u}_y$ . On observe alors que les électrons arrivent sur l'écran au point  $P$ . Le PFD s'écrit pour un électron  $m \vec{a} = -e \vec{E}$ . Après deux intégrations successives, on obtient :

$$x(t) = v_0 t \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{e E}{2 m} t^2 \quad \text{soit} \quad y(t) = \frac{e E}{2 m v_0^2} x^2$$

qui montre que la trajectoire est une parabole dans le condensateur. Entre  $M$  et  $P$ , la trajectoire est rectiligne. L'angle total de déviation  $\theta$  est tel que  $\tan(\theta) = y/D$ , mais en arrêtant la trajectoire de la parabole en  $M$ , on a également :

$$\tan(\theta) = \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=L} = \frac{e E L}{m v_0^2} \quad \text{soit finalement} \quad y = \frac{e L E D}{m v_0^2}$$

Dans une seconde étape, on établit dans le condensateur un champ  $\vec{B} = -B \vec{u}_z$ . Dans cette zone de *champs croisés* (c'est-à-dire que  $\vec{E} \perp \vec{B}$ ), on règle la valeur de  $B$  de façon à ramener les électrons de  $P$  en  $H$ . Le PFD s'écrit désormais pour un électron  $m \vec{a} = -e (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  soit  $\ddot{x} = e B / m \times \dot{y}$  et  $\ddot{y} = -e / m \times (E + B \dot{x})$ . Comme les électrons ne sont plus déviés, on a  $\ddot{y} = 0$ . On en déduit que  $\dot{x} = cste = v_0$ , soit  $E = v_0 B$ . En éliminant  $v_0$  dans l'expression de  $y$ , il reste finalement :

$$\frac{e}{m} = \frac{E y}{L D B^2}$$

Outre leur signe négatif (venant du sens de déflexion), **J.J. Thomson** a ainsi montré que ces particules chargées étaient 1000 fois plus légères que l'atome d'hydrogène (en fait 1836 fois). Ceci est considéré comme la *découverte* de l'électron.

L'utilisation des champs croisés était à la base de tous les tubes des téléviseurs dits à *tube cathodique*, avant l'invention des écrans plasma.



## C.2.2 Action d'un champ $\vec{B}$ sur une distribution linéique de courant

### Effet Hall

En 1879, **Hall** a montré que les électrons de conduction dans un conducteur métallique étaient déviés par un champ magnétique et provoquaient l'apparition d'une tension dans la direction orthogonale au champ.

La Figure C.6 représente une bande de cuivre de largeur  $d$  et d'épaisseur  $h$  dont les porteurs de charge (les électrons) dérivent à la vitesse  $v_d$  de droite à gauche. Si on établit un champ externe  $\vec{B} = B \vec{u}_z$ , une force magnétique  $\vec{F}_m = -e \vec{v} \times \vec{B}$  agira sur chacun des électrons et les repoussera transitoirement vers le bas de la bande, créant donc sur le haut une accumulation de charges positives. La séparation des charges positives et négatives crée donc un champ électrique  $\vec{E}_H$  orienté du haut vers le bas (cf Figure C.6), qui a tendance à repousser les électrons vers le haut.

Les électrons sont donc maintenant soumis à la composante de la force de **Lorentz** selon  $\vec{u}_x$  qui vaut  $-e v_y B \vec{u}_x - e E_H \vec{u}_x$ . Au fur et à mesure que les électrons s'accumulent sur la face du bas,  $E_H$  augmente jusqu'à ce que la composante de la force de **Lorentz** selon  $(Ox)$  s'annule. En régime permanent, les électrons de conduction ne sont plus déviés et  $E_H = -v_y B$ .

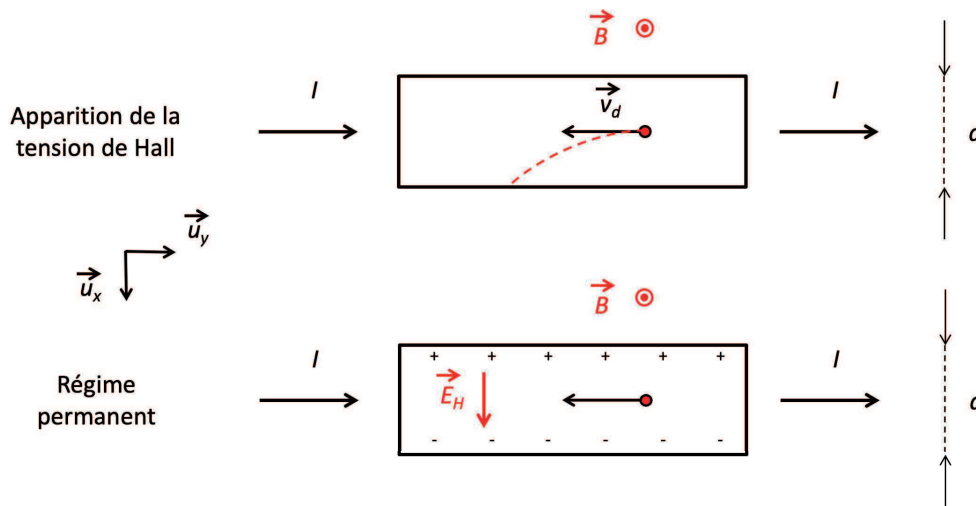


FIGURE C.6 – L'effet **Hall** est l'apparition d'une différence de potentiel entre les faces latérales d'un conducteur placé dans un champ  $\vec{B}$ , dans la direction orthogonale à  $\vec{B}$ . La mesure de cette tension permet de remonter à la densité volumique des porteurs de charges. Inversement, connaissant la densité de porteurs, on peut en déduire une mesure directionnelle du champ magnétique.

On note  $I$  le courant dans le conducteur, réparti uniformément sur la section transverse  $d \times h$  de celui-ci, avec la densité volumique  $\vec{J}$ . On appelle *tension de Hall* la différence de potentiel  $V_H = E_H d$  mesurée entre les faces supérieures et inférieures du conducteur en régime permanent<sup>6</sup>. Comme  $I = j_y d h = -n e v_y d h$  (où  $n$  est la densité volumique des porteurs de charge), on a finalement :

$$\vec{E}_H = \frac{1}{n e} \vec{J} \times \vec{B} \quad \text{et} \quad V_H = \frac{1}{n e} \frac{I B}{h}$$

Pour de l'argent avec  $n \approx 6,0 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ , on obtient  $V_H \approx 10 \mu\text{V}$  pour  $d = 10 \text{ mm}$ ,  $I = 10 \text{ A}$  et  $B = 1 \text{ T}$ . Par contre, pour des semi-conducteurs (pour lesquels  $n$  peut valoir jusqu'à  $10^{16} \text{ cm}^{-3}$ ), on peut obtenir des valeurs de  $V_H$  de l'ordre du millivolt.

**Remarque 1 :** En utilisant un semi-conducteur pour lequel la densité volumique  $n$  est connue, l'effet **Hall** peut servir à mesurer le champ magnétique sur les trois axes  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  (ce sont les *sondes à effet Hall*). Il peut également servir à mesurer la vitesse de dérive  $v_d$  des porteurs de charges, si on connaît le champ magnétique : en déplaçant la bande de métal dans le champ magnétique, la tension  $V_H$  s'annule lorsque sa vitesse est égale (au signe près) à la vitesse des porteurs de charges.

6. Sous certaines conditions, cette tension croît par paliers, c'est l'*effet Hall quantique*.

**Remarque 2 :** Si la face supérieure du conducteur (en reprenant les notations de la Figure C.6) est à un potentiel supérieur à la face inférieure, cela signifie que les porteurs de charge sont chargés négativement. Si les porteurs de charges étaient chargés positivement, le champ électrique serait inversé. Comme ceci n'est jamais observé, on en déduit que les porteurs de charges sont chargés négativement.

### Balance de Cotton

Une *balance de Cotton*<sup>7</sup> permet une mesure absolue d'un champ magnétique (cf Figure C.7). L'un des bras de la balance est entouré d'un fil conducteur dans lequel circule un courant d'intensité  $I$ . Les portions de conducteur  $AB$  et  $CD$  sont par construction des arcs de cercle centrés sur l'axe  $O$  de la balance. La partie  $BC$  est un segment de longueur  $L$  qui est horizontal lorsque la balance est équilibrée. On choisit le sens du courant pour que la force de **Laplace** qui s'exerce sur  $BC$  soit dirigée vers le bas.

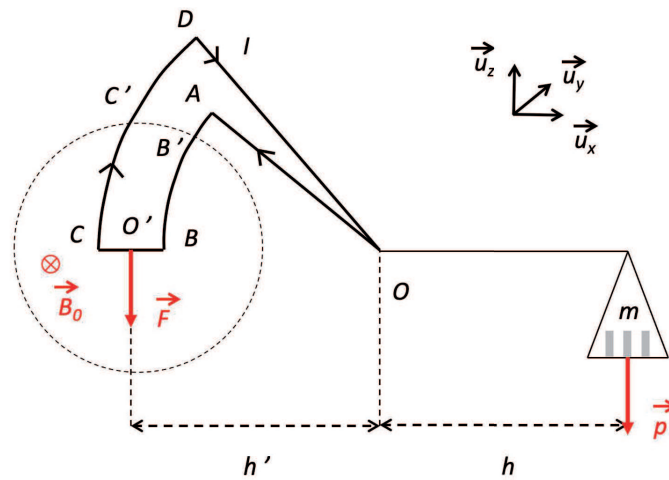


FIGURE C.7 – Schéma d'une *balance de Cotton*. La mesure de  $\vec{B}_0$  s'effectue en équilibrant la force de **Laplace** sur le conducteur  $BC$  par une masse  $m$  (voir texte).

On considère que le champ  $\vec{B}_0$  à mesurer est uniforme sur le cercle en pointillé de la Figure C.7 et parallèle à l'axe de la balance.

Les forces de **Laplace** élémentaires sur les arcs de cercle  $CC'$  et  $BB'$  sont localement perpendiculaires au conducteur et sont toutes dirigées vers  $O$  : les forces résultantes  $\vec{F}_{CC'}$  et  $\vec{F}_{BB'}$  ont un moment nul par rapport à l'axe de la balance et ne participent pas à la rotation de ses bras. Sur le segment  $BC$ , la force de **Laplace** s'écrit  $\vec{F} = I \vec{BC} \times \vec{B}_0 = -ILB_0 \vec{u}_z$ .

Le moment de cette force par rapport à l'axe est  $\vec{F} \cdot \overrightarrow{OM'} = -Fh'$ . Pour équilibrer la balance, on place une masse  $m$  sur le plateau. Le moment du poids associé est  $mgh$ . Le poids de cette masse  $m$  et la force de **Laplace**  $\vec{F}$  sur  $BC$  sont les deux seules forces à avoir un moment non nul et à participer à l'équilibre de la balance. La condition d'équilibre s'écrit  $mgh - Fh' = 0$ . On ne déduit  $B_0 = mh/(ILh')$ .

### C.2.3 Action d'un champ $\vec{B}$ sur une distribution surfacique de courant

#### Roue de Barlow motrice

La *roue de Barlow*<sup>8</sup> est le précurseur des moteurs électriques (cf Figure C.8). Un disque circulaire conducteur de rayon  $R$  est plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme parallèle à l'axe de rotation du disque. Un courant d'intensité  $I$  traverse le disque de son axe en un point de la périphérie où il est plongé dans un bain de mercure au point  $A$ . On observe alors que le disque se met à tourner.

7. L'intérêt de la description de cette balance dans ce cours est simplement due au nom de son inventeur...

8. On présente dans ce paragraphe la *roue de Barlow motrice*. La *roue de Barlow génératrice* sera vue au § 4.2.6.

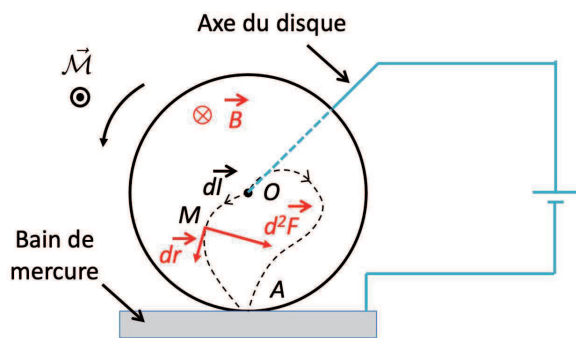


FIGURE C.8 – Une roue de **Barlow** est constituée d'un disque circulaire conducteur plongé dans un bain de mercure liquide, le tout situé dans un champ  $\vec{B}$  uniforme.

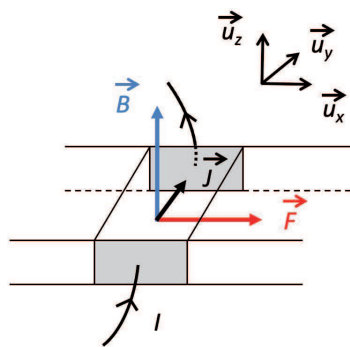


FIGURE C.9 – Une pompe électromagnétique comprend deux électrodes traversées par un courant : la force magnétique exercée sur les porteurs de charge est transmise au liquide qui se met en mouvement.

Pour calculer le moment  $\vec{\mathcal{M}}$  des forces de **Laplace** par rapport à  $O$ , même si le circuit n'est pas filiforme, on décompose celui-ci en parcours élémentaires allant de  $O$  à  $A$  qui portent le courant élémentaire  $dI$ . La contribution d'un élément de ce circuit élémentaire en  $\vec{r} = \vec{OM}$  est :

$$d^2\vec{\mathcal{M}} = \vec{r} \times d^2\vec{F} \quad \text{avec} \quad d^2\vec{F} = dI d\vec{r} \times \vec{B}$$

Comme  $\vec{r} \cdot \vec{B} = 0$ , en développant le double produit vectoriel, il reste  $d^2\vec{\mathcal{M}} = -dI (\vec{r} \cdot d\vec{r}) \vec{B} = -dI d(r^2/2) \vec{B}$ . En intégrant le long du filet  $OA$ , on a  $d\vec{\mathcal{M}} = -a^2/2 \times dI \vec{B}$ . L'intégration finale sur tous les circuits élémentaires donne finalement :

$$\vec{\mathcal{M}} = -\frac{a^2 I}{2} \vec{B} \quad (\text{C.7})$$

On remarque que ce moment est le même que si l'intensité  $I$  était entièrement confinée le long du segment  $OA$ .

## C.2.4 Action d'un champ $\vec{B}$ sur une distribution volumique de courant

### Pompage électromagnétique

On considère un tube isolant de section rectangulaire (cf Figure C.9). Deux électrodes métalliques en regard permettent d'y faire circuler un courant électrique dans la direction  $(Oy)$ . En appliquant un champ  $\vec{B}$  selon  $(Oz)$ , les porteurs de charges sont soumis à la force magnétique qu'ils transmettent aux autres molécules du conducteur liquide, le mettant ainsi en mouvement par l'intermédiaire de la densité de force de **Laplace**  $\vec{J} \times \vec{B}$ . Ce principe permet de réaliser une pompe sans aucune pièce mobile, permettant de déplacer un fluide conducteur.

Par exemple, si on souhaite équilibrer le champ de pesanteur pour remonter un fluide, l'équation de l'équilibre  $\vec{J}_{min} \times \vec{B} + \mu \vec{g} = \vec{0}$  montre qu'il faut au minimum un courant de densité  $J_{min} = \mu g/B$ . Avec  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$  et  $B = 0,1 \text{ T}$ , on obtient  $J_{min} = 10^5 \text{ A/m}^2 = 10 \text{ A/cm}^2$ , ce qui est assez facilement réalisable dans un fluide.

## C.2.5 Quelques configurations magnétiques particulières

### Bobines de Helmholtz

La configuration des bobines de **Helmholtz** comprend deux bobines plates identiques, d'épaisseur négligeable, de  $N$  spires circulaires, de rayon  $R$ , parcourues par un courant  $I$  circulant dans le même sens. Les deux bobines sont espacées d'une distance égale à leur rayon. On reprend les notations de la Fig C.10.

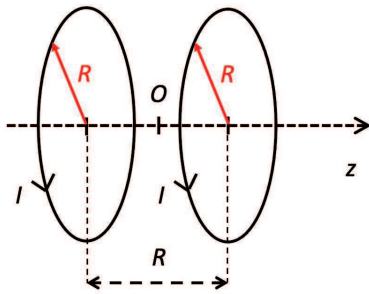


FIGURE C.10 – La discontinuité d'une quantité  $F$  s'exprime par la différence  $F_2 - F_1$  évaluée dans les deux milieux (1) et (2).

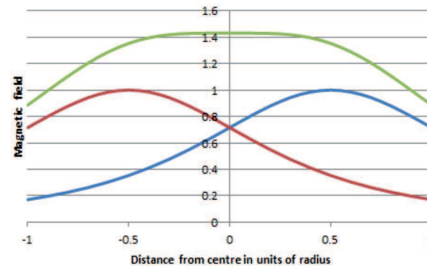


FIGURE C.11 – Une variation rapide de  $\partial F/\partial z$  entre deux milieux (1) et (2) (à gauche) est assimilée à une discontinuité mathématique (à droite).

Après quelques calculs, on peut facilement montrer, on prenant pour origine le centre  $O$  du système (cf Figure C.11), que le champ  $\vec{B}$  créé en un point  $M$  d'abscisse  $z$  de l'axe système se met sous la forme :

$$B(M) \approx \frac{8}{5\sqrt{5}} \frac{\mu_0 N I}{R} \left[ 1 - \frac{144}{125} \left( \frac{z}{R} \right)^4 + \dots \right]$$

La figure C.12 représente les lignes de champ des *bobines de Helmholtz*<sup>9</sup>. Dans une zone de  $\pm 0,4 R$  autour de l'origine, le champ  $\vec{B}$  est uniforme à mieux que 2%. En augmentant le nombre de spires, on augmente le volume où le champ est uniforme.

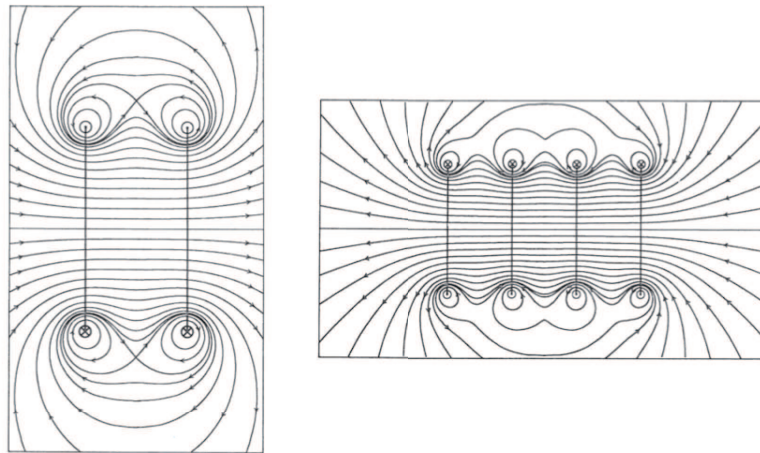


FIGURE C.12 – Lignes de champs de deux (à gauche) ou quatre (à droite) bobines de **Helmholtz** (figure extraite de [7, pages 98-99]).

### Bobines de Maxwell

La configuration dite des *bobines de Maxwell* est une extension des *bobines de Helmholtz*. En plus de deux bobines de rayon  $R$  parcourues par un courant  $I$ , elle comprend une 3<sup>e</sup> bobine de rayon  $R_1 = R \times \sqrt{7}/4$ , située au centre du dispositif et parcourue par le courant  $I_1 = I \times 64/49$ . La taille des trois bobines est telle qu'elle s'inscrit dans le cercle imaginaire centré sur la bobine centrale (cf Figure C.13). La distance entre les bobines est telle que  $2d = R\sqrt{3}$ . Un calcul (un peu pénible s'il est fait manuellement) montre qu'avec cette configuration, on optimise au centre du système le volume où le champ  $\vec{B}$  est uniforme (cf Figure C.14).

9. Noter les lignes de champ singulières passant par un point double où  $B = 0$ .

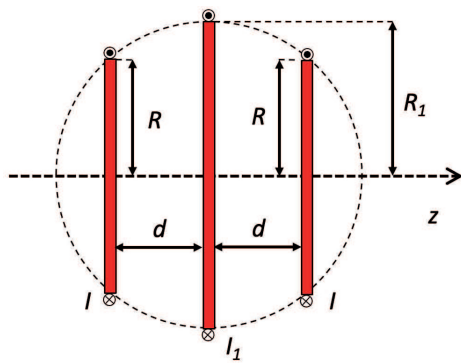


FIGURE C.13 – Le système des bobines de **Maxwell** est une configuration à trois bobines qui présente une zone importante où le champ  $\vec{B}$  est uniforme (voir texte).

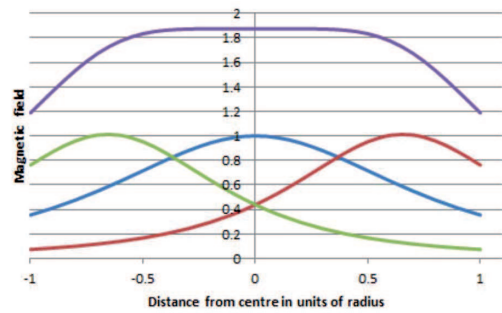


FIGURE C.14 – Variation du champ sur l'axe  $z$  créé par les trois bobines dans la configuration dite *de Maxwell* (courbes verte, bleue et rouge) et du champ total (courbe violette).

### Electroaimants classiques

L'étude de l'*optique électronique* permet de montrer qu'un faisceau de particules chargées se dirige à l'aide de plusieurs types d'aimants, ayant chacun des configurations particulières de champ magnétique<sup>10</sup> :

1. Les *dipôles* sont des aimants ayant un champ  $\vec{B}$  uniforme. Ils provoquent une déviation déduite de la force de **Lorentz** magnétique  $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$ .
2. En prenant l'origine au centre de l'aimant, les *quadrupôles* ont un champ qui est proportionnel à la distance à l'axe de l'aimant :

$$B_x = k B_y \quad \text{et} \quad B_y = k B_x \quad \text{avec} \quad k = \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial x}$$

Ils défléchissent uniquement les particules ayant une trajectoire excentrée.

### Electroaimants supraconducteurs

On peut obtenir la même configuration de champ magnétique à l'aide d'aimants supraconducteurs. Par exemple, en superposant par la pensée des conducteurs portant des densités volumiques égales et opposées, on crée un champ dipolaire ou quadrupolaire (cf Figure C.15).

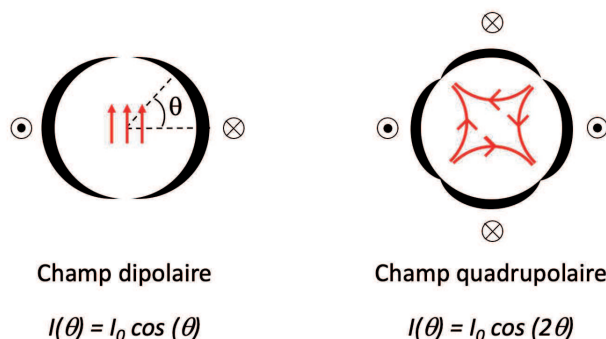


FIGURE C.15 – Pour les aimants supraconducteurs, des nappes de courants de directions différentes permettent d'obtenir des configuration de champ  $\vec{B}$  très différentes (voir texte).

10. Le fonctionnement des électroaimants fait intervenir les milieux magnétiques et sera vu au chapitre 7.

## Bobines de Holtzheim

Le système des *bobines de Holtzheim* est obtenu en partant de deux bobines de rayon  $R$ , parcourue par le courant  $I$  et séparée de la distance  $2d$ , mais en inversant le sens du courant dans une des deux spires (cf Figure C.2.5). Le moment magnétique total  $\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2$  est nul et on montre après calculs que l'expression du champ  $\vec{B}$  en un point d'abscisse  $z$  de l'axe, à grande distance, s'écrit :

$$\vec{B}_1(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2m_1}{z^3} \left(1 + \frac{3d}{z}\right) \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{B}_2(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2m_2}{z^3} \left(1 - \frac{3d}{z}\right) \vec{u}_z$$

soit :

$$\vec{B}(z) = \vec{B}_1(z) + \vec{B}_2(z) = \frac{3\mu_0 I R^2 d}{4\pi z^4} \vec{u}_z$$

En astrophysique, le champ créé par Gemina est compatible avec un système de deux étoiles à neutrons, possédant chacune un moment magnétique (cf Figure C.2.5).

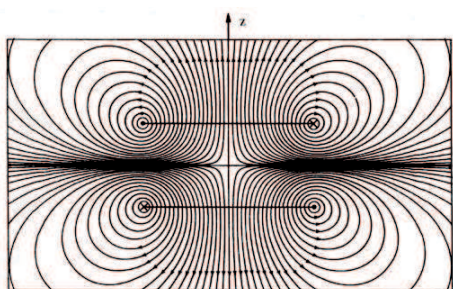


FIGURE C.16 – Le système des bobines de Holtzheim est constitué de deux bobines (1) et (2) de rayon  $R$  parcourues par le courant  $I$ , mais dans un sens opposé dans les deux bobines.

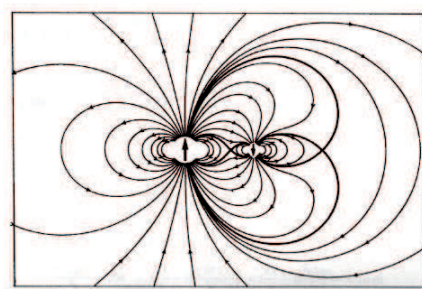


FIGURE C.17 – Exemple d'un système basé sur les bobines de Holtzheim ; la modélisation du champ de Gemina fait intervenir un système de deux étoiles à neutrons.

## C.3 Champ magnétique terrestre

**Gauss** a montré qu'en 1<sup>re</sup> approximation, le champ magnétique terrestre pouvait être assimilé au champ d'un dipôle magnétique  $\vec{M}$  placé au centre de la Terre et incliné aujourd'hui d'environ  $9,7^\circ$  par rapport à l'axe de rotation de la Terre.

Le modèle de référence du champ magnétique terrestre (IGRF pour *International Geomagnetic Reference Field*) est mis à jour régulièrement avec les évolutions mesurées. En effet, le Pôle Nord géomagnétique a dérivé d'environ 10 km/an de 1834 à 1980. Depuis 1980, on observe une accélération de ce déplacement jusqu'à 55 km/an.

On note  $\Theta$  la latitude magnétique, telle que définie sur la figure C.18. L'angle orienté  $\theta = \pi + \Theta$  correspond à l'angle utilisé habituellement, vu l'orientation du moment magnétique de l'Arctique (pour le pôle Sud du dipôle) vers l'Antarctique (pour le pôle Nord) : les lignes du champ terrestre pénètrent donc dans la Terre vers l'Arctique et en ressortent vers l'Antarctique (figure C.18).

D'après ce qu'on a vu précédemment, les lignes de champ sont de la forme  $r = r_0 \sin^2 \theta = r_0 \sin^2 \Theta$  puisqu'à grande distance, elles ont la même forme que celles du dipôle électrostatique.

A la surface de la terre ( $r = R_T = 6371$  km), la norme du champ magnétique a pour expression d'après (3.49), le long d'une ligne de champ :

$$B(R_T, \Theta) = (B_r^2 + B_\theta^2)^{1/2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}}{R_T^3} \frac{\sqrt{1 + 3 \cos^2(\Theta)}}{\sin^6(\Theta)}$$

Pour mesurer  $\vec{M}$ , on utilise le fait qu'en France  $\Theta = 64^\circ$ . On en déduit la valeur du moment magnétique terrestre  $\mathcal{M} \approx 78 \cdot 10^{21} \text{ Am}^2$ .



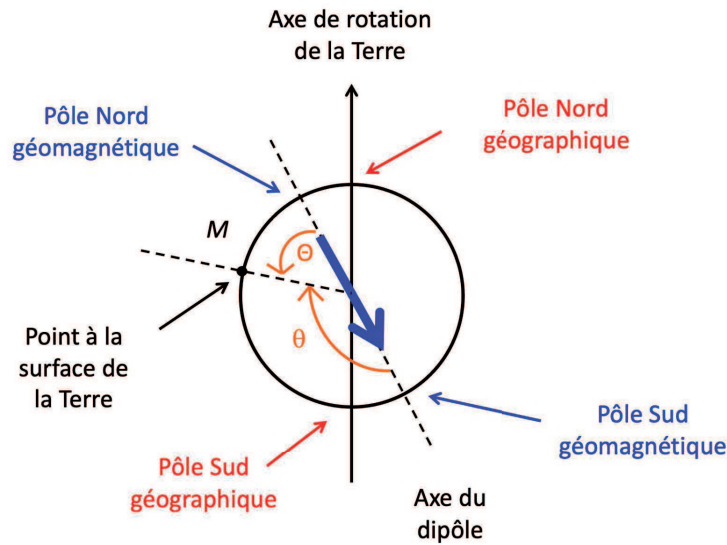


FIGURE C.18 – Le champ magnétique terrestre peut être modélisé par un moment magnétique situé au centre de la terre, incliné par rapport à l’axe de rotation terrestre.

On retiendra qu’en France, la composante horizontale de  $\vec{B}$  vaut  $\approx 0,23$  G (soit  $23 \mu\text{T}$ ) et que sa composante verticale vaut  $\approx 0,41$  G (soit  $41 \mu\text{T}$ ).

## C.4 Exemples d’application de l’induction électromagnétique

### C.4.1 Couplage entre deux bobines

Il existe de nombreux exemples pratiques du couplage entre deux bobines. Les Figures C.19 et C.20 en donnent deux. Dans le premier, le couplage sera quasiment idéal pour deux bobines enroulées l’une sur l’autre. Dans le deuxième, on montre, avec cette fois un couplage non idéal, que le générateur de courant alternatif qui alimente la première bobine crée par induction une force électromotrice dans la seconde bobine, suffisante pour que l’ampoule s’allume.

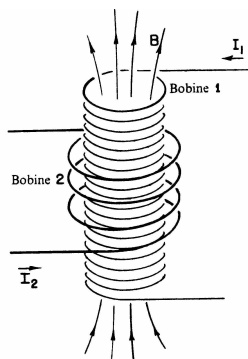


FIGURE C.19 – Couplage entre deux bobines (Figure extraite de [4, tome I, page 300]).

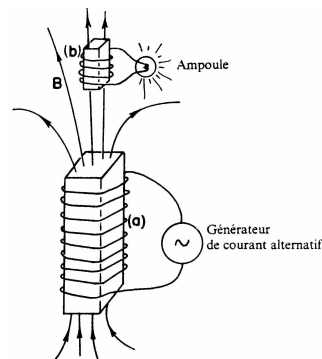


FIGURE C.20 – Couplage entre deux bobines (Figure extraite de [4, tome I, page 276]).

### C.4.2 Solénoïde infini

Le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde ( $B = \mu_0 n I$ , où  $n$  est le nombre de spires par unité de longueur) et nul à l'extérieur. Si on entoure le solénoïde d'une boucle conductrice en faisant varier le courant  $I$ , on constate l'apparition d'une force électromotrice aux bornes de la boucle, alors qu'elle se situe physiquement à un endroit où le champ  $\vec{B}$  est nul en permanence, ce qui peut paraître surprenant au premier abord ! Ceci vient du fait que le potentiel vecteur  $\vec{A}$  n'est pas nul sur la boucle et que les porteurs de charges y sont mis en mouvement par le champ induit  $-\partial\vec{A}/\partial t$ .

Quantitativement, pour un solénoïde de section circulaire  $a$ , on a, à une distance  $r$  de l'axe (avec  $r > a$ ) :

$$A_\theta = \frac{\mu_0 n I a^2}{2r} \quad \text{soit} \quad E_\theta = -\frac{\mu_0 n a^2}{2r} \frac{dI}{dt} \quad (\text{C.8})$$

Par ailleurs, le flux de  $\vec{B}$  à travers le cercle ( $C$ ) de rayon  $r > a$ , centré sur l'axe du solénoïde, vaut  $\Phi = \pi a^2 B = \pi a^2 \mu_0 n I$ . On retrouve bien que :

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{C.9})$$

Par contre, si la boucle n'entoure pas le solénoïde, il n'y aura pas de variation du flux du champ magnétique à travers le circuit (puisque  $\vec{B}$  est nul), donc pas de force électromotrice induite sur un circuit fermé.

### C.4.3 Mise en évidence directe du champ électromoteur à l'aide d'un bêtatron

Le bêtatron est un type d'accélérateur dont le principe est d'utiliser les variations temporelles d'un champ magnétique pour accélérer des électrons à l'aide du champ électrique induit<sup>11</sup>.

Si un électron de masse  $m_e$  entre dans une zone où règne un champ  $\vec{B}$  uniforme, avec une vitesse  $\vec{v}_e$  orthogonale à  $\vec{B}$ , il est soumis à la force  $\vec{F} = -e\vec{v}_e \times \vec{B}$ . La trajectoire se situe dans un plan orthogonal à  $\vec{B}$  et son rayon de courbure  $r$  est donné par la projection de l'équation du mouvement. L'accélération normale est :

$$\gamma_a = \frac{v_e^2}{r} = \frac{\|\vec{F}_e\|}{m_e} = \frac{e|\vec{v}_e \times \vec{B}|}{m_e} = \frac{e v_e B}{m_e}$$

On en déduit que  $r = m_e v_e / (eB) = Cste$ , ce qui montre que la trajectoire est un cercle décrit avec une vitesse uniforme.

#### Théorie rapide du bêtatron

Pour un bêtatron, on considère des électrons injectés dans l'entrefer d'un électro-aimant produisant un champ  $\vec{B}(\vec{r}, t) = B(r, t)\vec{u}_z$ . La trajectoire ( $\Gamma$ ) des électrons est donc un cercle de rayon  $r_\Gamma = m_e v_e / (eB)$  où la valeur du champ  $B$  est prise à la distance  $r_\Gamma$  du centre (cf Figure C.21).

Comme l'intensité de  $\vec{B}$  varie en fonction de la distance  $r$  (cf Figure C.21), on définit le champ moyen  $B_{moy}$  à l'intérieur du cercle ( $\Gamma$ ) par :

$$\oiint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \pi r_L^2 B_{moy}$$

La loi de **Faraday** sur le contour ( $\Gamma$ ) s'écrit :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left( \oiint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) \quad \text{soit} \quad 2\pi r_\Gamma E_\theta = -\pi r_L^2 \frac{dB_{moy}}{dt}$$

Le champ électrique induit  $\vec{E} = E_\theta \vec{u}_\theta$  est parallèle à la trajectoire en tout point et accélère les électrons. La projection selon  $\vec{u}_\theta$  du principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron permet d'écrire :

$$m_e \frac{dv_\theta}{dt} = -e E_\theta = \frac{e r_\Gamma}{2} \frac{dB_{moy}}{dt} \quad (\text{C.10})$$

11. Si vous êtes (un peu) curieux, voir [4, page 291]. Si vous êtes (très) curieux, voir D.C. Carey, *The optics of charged particles beams*, Harwood Academic Publishers, 1997.



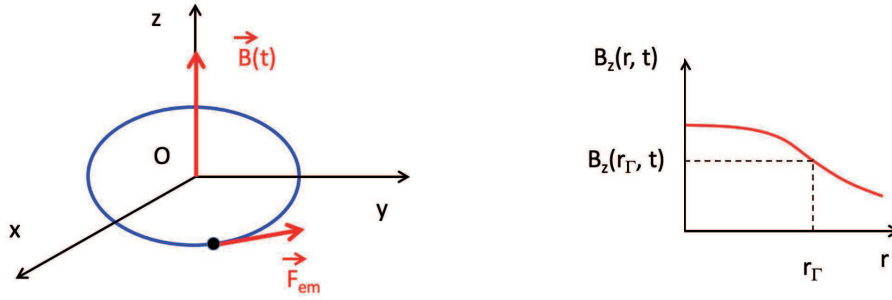


FIGURE C.21 – Dans un bêta-tron, le champ  $\vec{E}_{em}$  induit accélère les électrons sur une trajectoire circulaire (à gauche) : les lignes du champ  $\vec{E}$  sont des cercles centrés sur l'axe du champ  $\vec{B}$ , tandis que la norme du champ varie avec la distance au centre (à droite)

Si la variation  $dB_{moy}/dt$  est constante, on en déduit que :

$$v_{\theta}(t) = v_0 + \frac{e r_{\Gamma}}{2 m_e} \frac{dB_{moy}}{dt} t \quad (\text{C.11})$$

Pour maintenir un rayon  $r_{\Gamma}$  constant au cours de l'accélération, on doit avoir :

$$r_{\Gamma} = Cste = \frac{m_e v_{\theta}(t)}{e B(r_{\Gamma}, t)} \quad \text{soit} \quad \frac{dv_{\theta}}{dt} = \frac{e r_{\Gamma}}{m_e} \frac{\partial B(r_{\Gamma}, t)}{\partial t}$$

puisqu'a priori,  $v_{\theta}(t)$  est une fonction de  $r$  et de  $B$ . En comparant avec (C.10), on voit que la condition (dite *condition de Wideroe*) pour que l'orbite reste stable pendant l'accélération est :

$$\frac{dB_{moy}}{dt} = 2 \frac{\partial B(r_{\Gamma}, t)}{\partial t} \quad (\text{C.12})$$

### Lien avec le champ électromoteur

Si on augmente le champ  $\vec{B}$  suffisamment lentement (donc dans le cadre de l'ARQS) pour que sa variation relative soit très faible pendant que l'électron décrit une orbite circulaire (en respectant (C.12)) dans l'accélérateur<sup>12</sup>, le champ électromoteur  $\vec{E}_{em} = -\partial\vec{A}/\partial t$  exerce sur l'électron la force  $\vec{F}_{em}$  donnée par :

$$\vec{F}_{em} = -e \vec{E}_{em} = e \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{soit} \quad F_{em} = \frac{e r}{2} \frac{dB}{dt} \quad (\text{C.13})$$

puisque le potentiel vecteur  $\vec{A}$  dont dérive le champ  $\vec{B}$  est  $\vec{A} = \vec{B} \times \vec{r}/2$ . La force est tangente à la trajectoire (cf Figure C.21), et son sens est tel qu'elle accélère l'électron.

**Remarque 1 :** On a montré ainsi, plus de 110 ans après la découverte de l'induction électromagnétique, que dans le vide, un champ magnétique variable crée également des forces motrices. Ceci prouve que dans l'ARQS, le champ électromoteur est un champ réel, indépendant du support matériel ohmique que constituent les circuits utilisés la plupart du temps.

**Remarque 2 :** On voit qu'au contraire du champ électrostatique, le champ électrique induit peut avoir des lignes de champ qui se referment sur elles-mêmes.

### C.4.4 Quantité d'électricité déplacée par induction dans un circuit

On considère un circuit indéformable plongé dans un champ magnétique. On note  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  le flux supposé constant du champ magnétique traversant le circuit aux instants initiaux et finaux  $t_1$  et  $t_2$ . Comme le flux

12. C'est faisable car la période de révolution est très petite puisque l'électron va quasiment à la vitesse de la lumière.

est constant, le courant qui parcourt le circuit est nul :  $i_1 = i_2 = 0$ . Par contre, le flux traversant le circuit peut varier entre les instants initiaux et finaux, par déplacement ou déformation du circuit dans  $\vec{B}$  constant et/ou par variation de  $\vec{B}$ .

Le courant  $i$  qui parcourt le circuit vérifie :

$$-\frac{d\Phi}{dt} - L\frac{di}{dt} = Ri \quad (\text{C.14})$$

La quantité d'électricité  $Q$  qui a traversé une section droite du circuit entre  $t_1$  et  $t_2$  s'écrit :

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} i dt = -\frac{L}{R} \int_{t_1}^{t_2} di - \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} d\Phi \quad (\text{C.15})$$

La 1<sup>re</sup> intégrale est nulle car par hypothèse le courant est nul à  $t_1$  et  $t_2$ . D'où :

$$Q = -\frac{\Delta\Phi}{R} \quad \text{avec} \quad \Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 \quad (\text{C.16})$$

La quantité d'électricité qui traverse le circuit ne dépend que de la différence entre les flux initiaux et finaux. La mesure de  $Q$  permet donc de remonter à la variation du flux, donc à la variation du champ magnétique. Les appareils de mesure de  $\vec{B}$  utilisant ce principe sont appelés des *fluxmètres*.

### C.4.5 Illustration expérimentale des courants de Foucault

Une expérience classique consiste à suspendre une plaque conductrice (cuivre ou aluminium par exemple) entre les pôles d'un électro-aimant (cf Figure C.22). On constate expérimentalement que la plaque ralentit fortement puis s'arrête lorsqu'elle pénètre dans l'entrefer de l'électro-aimant si celui-ci est alimenté.

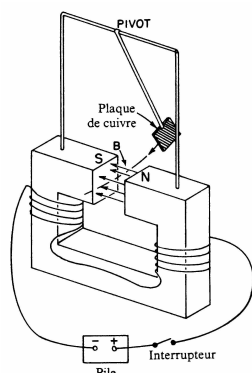


FIGURE C.22 – Le freinage du pendule montre les forces dues aux courants de **Foucault** (Figure extraite de [4, tome I, page 280]).

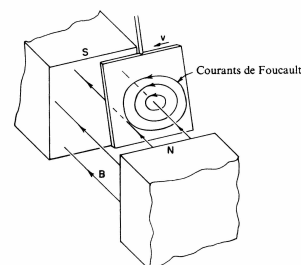


FIGURE C.23 – Les courants de **Foucault** dans le pendule conducteur (Figure extraite de [4, tome I, page 281]).

Lorsque la plaque pénètre dans l'entrefer de l'électroaimant, il apparaît un courant induit qui s'oppose à la variation de flux à travers la plaque (cf Figure C.23). L'intensité et la forme des courants dépendent énormément de la géométrie de la plaque. Néanmoins, en accord avec le modèle simpliste développé ci-dessus, les effets des courants sont extrêmement réduits si on pratique plusieurs fentes dans la plaque (cf Figure C.24), dans une direction orthogonale à la direction du champ  $\vec{B}$ .

On applique ceci au freinage électromagnétique qui équipe certains poids lourds (cf Figure C.25). On peut montrer que les courants de **Foucault** engendrés dans un disque solidaire des roues sont proportionnels à la vitesse et au carré du champ  $\vec{B}$ . Ce type de freinage n'est donc efficace qu'à grande vitesse et ne peut pas remplacer les freins à friction, mais offre une autre possibilité de freinage à haute vitesse.

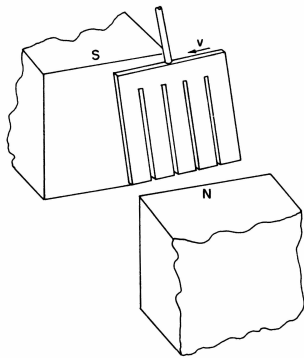


FIGURE C.24 – Les effets des courants de **Foucault** sont diminués en pratiquant des fentes dans la plaque, dans une direction telle qu'elles empêchent la propagation des courants (Figure extraite de [4, tome I, page 281]).

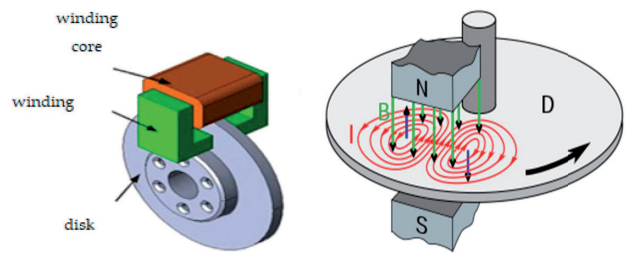


FIGURE C.25 – Principe du freinage par courants de **Foucault** (Wikipedia).



# Annexe D

## Compléments des Chapitres 1 à 4

### Sommaire

---

D.1	Détermination des équations de Maxwell à l'aide du principe de moindre action	133
D.2	Electromagnétisme et changements de référentiel galiléen . . . . .	137
D.3	Résolution des équations de Maxwell . . . . .	140
D.4	Magnétostatique et charges isolées . . . . .	144
D.5	Variation du flux à travers un circuit en mouvement . . . . .	145

---

### D.1 Détermination des équations de Maxwell à l'aide du principe de moindre action

Cette annexe montre très succinctement comment déterminer les équations de **Maxwell** à l'aide du principe de moindre action, mais elle ne sera totalement compréhensible qu'après vos cours de mécanique analytique et de relativité. Pour plus de détails, voir par exemple [10].

#### D.1.1 Lagrangiens utiles

Pour appliquer le principe de moindre action, il faut associer à chaque système physique l'intégrale sur le temps de l'action  $\mathcal{A}$  d'un lagrangien  $\mathcal{L}$ , telle que  $\mathcal{A}$  soit minimale au cours de l'évolution réelle du système.

#### Lagrangien d'une particule libre

On peut montrer facilement que le lagrangien d'une particule libre s'écrit :

$$\mathcal{A}_{libre} = -\alpha \int_A^B ds = -\int_A^B \alpha c \sqrt{1 - v^2/c^2} dt \quad \text{d'où} \quad \mathcal{L}_{libre} = -\alpha c \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

A l'approximation non relativiste, le lagrangien devient :

$$\mathcal{L}_{libre} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c} + \dots$$

La constante  $\alpha c$  ne joue aucun rôle dans la détermination des équations du mouvement. On identifie par ailleurs  $\alpha = mc$  en notant que  $\mathcal{L}_{libre} = mv^2/2$  dans l'approximation classique. D'où l'expression finale de l'action  $\mathcal{A}_{libre}$  et du lagrangien  $\mathcal{L}_{libre}$  d'une particule libre relativiste :

$$\mathcal{A}_{libre} = -mc \int_a^b ds = -mc^2 \int_a^b \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{libre} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (\text{D.1})$$

---

## Lagrangien d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

Le terme d'interaction  $\mathcal{A}_{inter}$  entre la particule et le champ doit contenir des grandeurs relatives à la particule et des grandeurs relatives au champ. Une des grandeurs relative à la particule les plus simples est la charge électrique.

Le principe de relativité stipule que l'intégrale d'action doit avoir la même formulation dans tous les référentiels (puisque la loi du mouvement de la particule chargée dans le champ a la même expression dans tous les référentiels galiléens). Ceci revient à dire que l'intégrale d'action doit être un invariant dans une transformation de **Lorentz**.

Un des invariants les plus simples qu'on puisse former et qui respecte ces critères est le produit scalaire des quadrivecteurs potentiel  $\vec{A}$  et vitesse  $\vec{V}$ . On postulera donc que l'action correspondant au terme d'interaction électromagnétique a pour expression :

$$\mathcal{A}_{inter} = -e \int_a^b \vec{A} \cdot \vec{V} ds = -e \int_a^b A^\mu dx_\mu \quad (D.2)$$

On peut alors montrer que le lagrangien d'interaction  $\mathcal{L}_{inter}$  d'une particule chargée dans un champ électromagnétique se met sous la forme :

$$\mathcal{L}_{inter} = e \vec{A} \cdot \vec{v} - e \Phi \quad (D.3)$$

L'action  $\mathcal{A}$  d'une particule chargée dans un champ électromagnétique donné s'écrit finalement :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{libre} + \mathcal{A}_{inter} = \int_a^b (-m c ds - e A^\mu dx_\mu) \quad (D.4)$$

### D.1.2 Tenseur électromagnétique

On considère une trajectoire réelle reliant les deux événements  $a$  et  $b$ , de coordonnées  $x^\mu(a)$  et  $x^\mu(b)$  dans un référentiel quelconque. On dira que l'événement  $a$  appartient à l'histoire de la particule si, à l'instant  $t_a$ , la particule est en  $(x_a, y_a, z_a)$  avec :

$$x^0(a) = ct_a \quad x^1(a) = x_a \quad x^2(a) = y_a \quad x^3(a) = z_a \quad (D.5)$$

On détermine la trajectoire réelle entre les événements  $a$  et  $b$  en écrivant que l'action  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{libre} + \mathcal{A}_{inter}$  est alors minimale, c'est-à-dire que pour tout écart par rapport à la trajectoire, on aura  $\delta\mathcal{A} = 0$ , soit :

$$\delta\mathcal{A} = \int_a^b [-m c \delta(ds) - e \delta(A_\mu dx^\mu)] = 0 \quad (D.6)$$

On peut montrer que ceci peut s'écrire :

$$\delta\mathcal{A} = \int_a^b \left[ m c \frac{du_\mu}{ds} + e \left( \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) u^\nu \right] \delta x^\mu ds = 0 \quad (D.7)$$

Comme  $\delta\mathcal{A}$  doit être nul pour toutes les déviations  $\delta x$  qui correspondent aux écarts par rapport à la trajectoire réelle, on en déduit que le terme entre crochets doit être nul. On obtient alors les équations du mouvement sous la forme :

$$m c \frac{du_\mu}{ds} = -e \left( \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) u^\nu \quad (D.8)$$

Comme  $A_\mu$  représente les composantes du quadrivecteur potentiel, la quantité  $F_{\mu\nu}$  définie par :

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad \text{avec} \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (D.9)$$

représente les composantes d'un tenseur<sup>1</sup> antisymétrique noté  $(F_{\mu\nu})$  et appelé le *tenseur du champ électromagnétique* ou *tenseur électromagnétique*. Ses composantes s'obtiennent en fonction des composantes de  $\vec{A}$  à l'aide de (D.9). Par exemple :

$$\begin{cases} F_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} = -\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} = -(\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = -B_z \\ F_{13} = \frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3} = -\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z} = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_y = B_y \\ F_{01} = \frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1} = -\frac{\partial A_x}{\partial(ct)} - \frac{\partial(\Phi/c)}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{E_x}{c} \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

Finalement, on obtient :

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.11})$$

Les coordonnées de  $\vec{E}$  et de  $\vec{B}$  ne sont pas les composantes de quadrivecteurs mais simplement des composantes du tenseur électromagnétique. Il est donc logique qu'elles "se mélangent" lors d'une transformation de **Lorentz**. Les composantes spatiales de  $(F_{\mu\nu})$  sont celles du champ magnétique tandis que ces composantes temporelles sont celles du champ électrique.

### D.1.3 Les équations de Maxwell

On montre brièvement dans ce paragraphe comment on peut retrouver les équations de **Maxwell** à partir des propriétés du tenseur électromagnétique.

#### Conservation du flux magnétique

D'après la définition (D.9), on montre facilement que pour trois indices  $i, k, \ell$  :

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^\ell} + \frac{\partial F_{k\ell}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{\ell i}}{\partial x^k} = 0 \quad (\text{D.12})$$

Le 1<sup>er</sup> membre de cette équation est un tenseur d'ordre 3, antisymétrique dans l'échange de ces indices. Les seules composantes non nulles correspondent aux trois indices  $i, k, \ell$  différents (à prendre parmi 0, 1, 2, 3).

En prenant  $(i, k, \ell) = (1, 2, 3)$  dans (D.12), on obtient :

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x^2} = \frac{\partial(-B_z)}{\partial(-z)} + \frac{\partial(-B_x)}{\partial(-x)} + \frac{\partial(-B_y)}{\partial(-y)} = 0 \quad \text{soit} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{D.13})$$

1. On appellera *tenseur du second ordre contravariant quadridimensionnel* un être mathématique  $T$  défini par 16 composantes  $T^{\mu\nu}$  (où  $\mu$  et  $\nu$  varient chacun de 0 à 3) qui dans un changement de coordonnées  $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$  se transforme comme :

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta T^{\alpha\beta}$$

Pour des questions de commodité,  $T$  est souvent présenté sous forme d'un tableau de quatre lignes et quatre colonnes. Un tenseur sera *symétrique* si ces composantes vérifient  $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$  et *antisymétrique* si elles vérifient  $T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu}$ . Cette caractérisation est pertinente puisque tout tenseur peut être décomposé en la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique. Ces caractères de symétrie (ou d'antisymétrie) sont invariant et se conservent dans les changements de référentiel. Les tenseurs antisymétriques jouent un rôle particulier en électromagnétisme. Sur leurs 16 composantes, les quatre situées sur la diagonale principale sont nulles et les 12 autres sont égales deux à deux. Il suffit donc de six composantes indépendantes pour décrire un tenseur antisymétrique.

---

## Equation de Maxwell-Faraday

En choisissant  $(i, k, \ell) = (0, 2, 3)$ , on obtient :

$$\frac{\partial F_{02}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{30}}{\partial x^2} = \frac{\partial(-E_y/c)}{\partial(-z)} + \frac{\partial(-B_x)}{\partial(ct)} + \frac{\partial(E_z/c)}{\partial(-y)} = 0 \quad (\text{D.14})$$

soit

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \quad (\text{D.15})$$

En prenant ensuite  $(i, k, \ell) = (0, 1, 3)$  et  $(0, 1, 2)$ , on obtient les deux dernières projections sur  $Oy$  et  $Oz$  de l'équation de (MF).

## Equation de continuité

On peut utiliser le quadrivecteur  $\vec{J}$  pour réécrire la conservation de la charge sous la forme :

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad (\text{D.16})$$

L'action d'interaction  $\mathcal{A}_{inter}$  donnée par (D.2) s'écrit alors pour une distribution volumique de charge  $\rho$  :

$$\mathcal{A}_{inter} = \sum -e \int A^\mu dx_\mu = - \int \rho A^\mu dx_\mu dV \quad (\text{D.17})$$

## Théorème de Gauss

Pour aller plus loin, on a besoin de construire l'action  $\mathcal{A}_{champ}$  pour le champ électromagnétique en l'absence de charges<sup>2</sup>. On choisit<sup>3</sup> de mettre cette action sous la forme :

$$\mathcal{A}_{champ} = \frac{1}{4\pi\mu_0 c} \iiint F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x \quad (\text{D.18})$$

ce qui permet d'écrire l'intégrale d'action du système global (particules+champ) sous la forme :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{libre} + \mathcal{A}_{inter} + \mathcal{A}_{champ} \quad (\text{D.19})$$

On montre plus difficilement que :

$$\mu_0 J^\mu = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \quad (\text{D.20})$$

En prenant  $\mu = 0$  dans (D.20), on obtient :

$$\mu_0 \rho c = \frac{\partial F_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{03}}{\partial x^3} = \frac{\partial(E_x/c)}{\partial x} + \frac{\partial(E_y/c)}{\partial y} + \frac{\partial(E_z/c)}{\partial z} \quad \text{soit} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{D.21})$$

## Equation de Maxwell-Ampère

En prenant  $\mu = 1$  dans (D.20), on obtient :

$$\mu_0 J_x = \frac{\partial F_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x^3} = \frac{\partial(0)}{\partial(-x)} + \frac{\partial(-B_z)}{\partial(-y)} + \frac{\partial(E_y)}{\partial(-z)} \quad (\text{D.22})$$

soit

$$\mu_0 J_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \quad (\text{D.23})$$

En prenant ensuite les  $\mu = 2$  et  $3$ , on obtient les deux dernières projections sur  $Oy$  et  $Oz$  de (MA).

---

2. L'action  $\mathcal{A}_{champ}$  n'était pas utile lorsque le champ était imposé. Mais comme on cherche ici des équations sur le champ, on doit pouvoir faire varier l'action correspondante afin de la minimiser.

3. Les équations du champ doivent être linéaire pour satisfaire au principe de superposition. L'action correspondante sera donc quadratique en champ. La trace  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  étant le seul scalaire invariant par transformation de **Lorentz** à pouvoir être formé à l'aide du tenseur électromagnétique, il est "logique" de prendre la forme (D.18) pour  $\mathcal{A}_{champ}$ . Le facteur multiplicatif est introduit pour des raisons de dimension.



## D.2 Electromagnétisme et changements de référentiel galiléen

On note  $(\mathcal{R}')$  un référentiel galiléen en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse  $\vec{u}$  par rapport à un autre référentiel galiléen  $(\mathcal{R})$  (Figure D.1).



FIGURE D.1 – Déplacement de deux référentiels galiléens l'un par rapport à l'autre à la vitesse d'entraînement constante  $\vec{u}$ .

### D.2.1 Transformation classique des champs

En postulant la conservation de la charge lors d'un changement de référentiel galiléen, l'égalité des forces de **Lorentz** dans les deux référentiels  $(\mathcal{R})$  et  $(\mathcal{R}')$  permet d'écrire que  $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}'$ . La composition classique des vitesses ( $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$ ) entraîne que :

$$\vec{E} = \vec{E}' - \vec{u} \times \vec{B}' \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}' \quad (\text{D.24})$$

qui est la loi de transformation classique des champs.

**Remarque :** La relation  $\vec{B} = \vec{B}'$  est en fait impossible à accepter si on pense au cas d'un électron en mouvement rectiligne uniforme. Cette conséquence logique, mais absurde, de la transformation de Galilée montre bien l'inadéquation de l'électromagnétisme et de la physique classique, même à la limite des basses vitesses car on n'a rien supposé sur la vitesse de l'électron. Voir le cours de relativité pour plus de détails.

### D.2.2 Densités de charges et de courants

#### Transformation des densités

On note  $\rho$  et  $\vec{J}$  les densités volumiques de charges et de courants dans le référentiel galiléen  $(\mathcal{R})$ . Dans  $(\mathcal{R}')$ , ces distributions sont respectivement  $\rho'$  et  $\vec{J}'$ . On va dans ce paragraphe examiner ce qui se passe en supposant valide la transformation des positions de Galilée.

La charge électrique est invariante lors d'un changement de référentiel (postulat). L'invariance des volumes lors de la transformations de Galilée entraîne alors que  $\sum_i n_i q_i = \rho'$ , soit :

$$\rho' = \rho \quad (\text{D.25})$$

De plus,  $\vec{J} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i$ . Dans  $(\mathcal{R}')$ , en prenant en compte la loi de composition classique des vitesses ( $\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{u}$ ), on obtient :

$$\vec{J}' = \sum_i n_i q_i \vec{v}'_i = \sum_i n_i q_i (\vec{v}_i - \vec{u})$$

soit finalement :

$$\vec{J}' = \vec{J} - \rho \vec{u} \quad (\text{D.26})$$

**Remarque 1 :** Vous verrez dans votre cours de relativité qu'un traitement relativiste est nécessaire pour une réponse exacte puisque la formule de composition des vitesses doit être modifiée et que le volume n'est pas invariant par changement de référentiel. Néanmoins, dans le cadre de l'approximation galiléenne,  $\rho'$  et  $\vec{J}'$  sont donnés par (D.25) et (D.26).

---

**Remarque 2 :** Les relations (D.25) et (D.26) correspondent à la *limite électrique de l'électromagnétisme* (c'est-à-dire la juxtaposition de l'électromagnétisme et de la loi de composition classique des positions). Cela correspond à l'électrostatique et de manière générale aux systèmes pour lesquels  $E \gg cB$ .

### Transformation de la loi d'Ohm

Dans le référentiel ( $\mathcal{R}'$ ), la forme locale de la loi d'**Ohm** s'écrit  $\vec{J}' = \gamma \vec{E}'$  pour le conducteur supposé isotrope, de conductivité  $\gamma$ . D'après (D.26), on aura simplement  $\vec{J} = \vec{J}'$  car  $\rho' = \rho \equiv 0$  dans un conducteur. On en déduit que la loi d'**Ohm**, exprimée dans ( $\mathcal{R}$ ), pour un conducteur en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse  $\vec{u}$  s'écrit :

$$\vec{J}(M, t) = \gamma \left( \vec{E}(M, t) + \vec{u} \times \vec{B}(M, t) \right) \quad (\text{D.27})$$

On peut généraliser cette relation au cas d'un conducteur en mouvement quelconque, en particulier au cas d'un conducteur qui se déforme. On remplace alors la vitesse constante  $\vec{u}$  par la vitesse  $\vec{v}(M, t)$  de la portion de conducteur située en  $M$  à l'instant  $t$  :

$$\vec{J}(M, t) = \gamma \left( \vec{E}(M, t) + \vec{v}(M, t) \times \vec{B}(M, t) \right) \quad (\text{D.28})$$

On admettra ce résultat non trivial.

**Remarque 1 :** On pourra noter que le champ électromagnétique intervenant dans cette expression de la loi d'**Ohm** fait intervenir les sources de champ extérieures au conducteur mais également le champ créé par les charges et courants portés par le conducteur.

**Remarque 2 :** Les relations (D.27) et (D.28) serviront à interpréter l'induction électromagnétique (§ 4.2.1)

### Un nouveau paradoxe

En physique classique, la transformation de Galilée des positions lors d'un changement de référentiel entraîne la transformation des vitesses et des accélérations puis l'égalité des forces. Les relations (D.25) et (D.26) ont été obtenues en partant de la transformation des positions.

Si au contraire on suppose comme postulat de base l'égalité des forces et donc que les équations de **Maxwell** ont des formes identiques dans ( $\mathcal{R}$ ) et ( $\mathcal{R}'$ ), on obtient un résultat différent. En effet, l'égalité des forces entraîne la transformation des champs (D.24). On en déduit que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla}' \cdot \vec{E}' - \vec{\nabla}' \cdot (\vec{u} \times \vec{B}') = \vec{\nabla}' \cdot \vec{E}' - \left[ \vec{B}' \cdot (\vec{\nabla}' \times \vec{u}) - \vec{u} \cdot (\vec{\nabla}' \times \vec{B}') \right] \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla}' \times \vec{B}'$$

où la dernière égalité dans le calcul de  $\vec{\nabla}' \cdot \vec{E}$  vient de l'application de (A.9). Comme  $\vec{u}$  est constant et qu'on utilise la transformation de Galilée (voir les relations (D.30) et (D.31)), (MG) et (MA) entraînent que :

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho'}{\epsilon_0} + \vec{u} \cdot (\mu_0 \vec{J}') \quad \text{et} \quad \vec{J} = \vec{J}'$$

On en déduit finalement que :

$$\rho' = \rho - \frac{\vec{u} \cdot \vec{J}}{c^2} \quad \text{et} \quad \vec{J}' = \vec{J} \quad (\text{D.29})$$

On obtient ainsi la *limite magnétique de l'électromagnétisme* (c'est-à-dire la juxtaposition de l'électromagnétisme et de la loi de composition classique des vitesses). Cela correspond à l'ARQS pour lesquels il existe au moins un référentiel dans lequel  $E \ll cB$ .

La relation (D.29) est bien sûr incompatible avec (D.25) et (D.26), ce qui montre encore une fois que le traitement classique des changements de référentiels n'est pas adapté à l'électromagnétisme.

**Remarque :** La relativité fait intervenir les quadrivecteurs potentiel  $\vec{\mathbb{A}} = (\Phi/c, \vec{A})$  et densité de courant  $\vec{\mathbb{J}} = (\rho c, \vec{j})$ .

---

### D.2.3 Transformation des équations de Maxwell par changement de référentiel

On montre dans ce paragraphe ce qu'il advient des équations de **Maxwell** en adoptant la transformation de Galilée pour passer de  $(\mathcal{R})$  à  $(\mathcal{R}')$ . La transformation classique des champs (D.24) permet d'écrire :

$$E_x = E'_x \quad E_y = E'_y + u B'_z \quad E_z = E'_z - u B'_y$$

La composition classique des positions se traduit par :

$$t = t' \quad x = x' + u t' \quad y = y' \quad z = z'$$

On relie les dérivées par rapport à  $x$  et  $t$  à celles par rapport à  $x'$  et  $t'$ . Les variables  $x$  et  $t$  sont a priori fonctions de  $x'$  et  $t'$ . On en déduit que :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \quad (D.30)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -u \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \quad (D.31)$$

A l'aide de ces relations, on peut étudier les transformations des quatre équations de **Maxwell**.

#### Transformation de (MG)

On a :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E'_x}{\partial x'} \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + u \frac{\partial B'_z}{\partial y'} \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E'_z}{\partial z'} - u \frac{\partial B'_y}{\partial z'} \quad (D.32)$$

ou encore :

$$\vec{\nabla}_{(\mathcal{R})} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla}_{(\mathcal{R}')} \cdot \vec{E}' + u \left( \frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} \right)$$

qui montre que (MG) n'est pas invariante par changement de référentiel galiléen.

#### Transformation de (MΦ)

Par contre, (D.24) entraîne également que  $\vec{B} = \vec{B}'$ , soit :

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial B'_x}{\partial x'} \quad \frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{\partial B'_y}{\partial y'} \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B'_z}{\partial z'}$$

qui montre que (MΦ) est invariante par changement de référentiel galiléen.

#### Transformation de (MF)

En projetant (MF) sur l'axe  $Ox$ , on obtient :

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

on en déduit que la projection de (MF) sur l'axe  $Ox$  s'écrit :

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} - u \left( \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} + \frac{\partial B'_x}{\partial x'} \right) = -\frac{\partial B'_x}{\partial t'}$$

Comme  $\vec{\nabla}_{(\mathcal{R}')} \cdot \vec{B}' = 0$ , il reste finalement :

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} = -\frac{\partial B'_x}{\partial t'}$$

La projection de (MF) sur l'axe  $Oy$  s'écrit :

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

soit :

$$\frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'} + u \frac{\partial B'_y}{\partial x'} - u \frac{\partial B'_y}{\partial x'} = \frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'} = -\frac{\partial B'_y}{\partial t'}$$

On trouve de même avec la projection sur  $Oz$ . (MF) est donc invariante par changement de référentiel galiléen.

### Transformation de (MA)

La projection sur l'axe  $Ox$  de (MA) s'écrit :

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

soit :

$$\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} - \frac{u}{c^2} \frac{\partial E'_x}{\partial x'} = 0$$

Comme on n'a aucune raison d'avoir  $\partial E'_x / \partial x' = 0$ , ceci suffit pour montrer que (MA) n'est pas invariante par changement de référentiel galiléen.

## D.3 Résolution des équations de Maxwell

Dans cette annexe, on présente un calcul (totalement hors programme en L3) des potentiels retardés. Ce n'est pas le calcul original, mais un calcul simplifié (...) utilisant la théorie des distributions. Comme indiqué au § 1.3.3, la résolution des équations de **Maxwell** passe par la résolution de quatre équations de la forme :

$$\square \Psi(\vec{r}_P, t) = -f(\vec{R}, t) \quad (\text{D.33})$$

La résolution rigoureuse dans le cas général de (D.33) est délicate à cause des outils mathématiques nécessaires basés sur les *fonctions de Green*<sup>4</sup>. La technique des fonctions de **Green** est une technique très puissante en physique aussi bien en électrostatique qu'en théorie des champs, bien que parfois un peu abrupte au 1<sup>er</sup> abord. On va procéder en quatre étapes pour résoudre (D.33).

### D.3.1 Equation locale de la transformée de Fourier

On supposera que les densités  $\rho$  et  $\vec{J}$  sont nulles à l'infini et que les potentiels (donc les champs) tendent vers zéro à l'infini. Une transformation de Fourier à une dimension permet d'éliminer le temps  $t$  dans (D.33). Pour cela, on pose :

$$\begin{cases} \Psi(\vec{r}_P, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_\omega(\vec{r}_P, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega \\ f(\vec{R}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega(\vec{R}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega \end{cases} \quad (\text{D.34})$$

4. La fonction de **Green**  $G(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)$  est par définition la solution de l'équation :

$$\Delta_{\vec{r}_1} (G(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)}{\partial t_1^2} = -\delta^{(3)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \delta(t_1 - t_2)$$

où le second membre est une fonction de **Dirac** à quatre dimensions. A trois dimensions, la fonction de **Green**  $G(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  sera simplement :

$$\Delta_{\vec{r}_1} (G(\vec{r}_1, \vec{r}_2)) + \frac{\omega^2}{c^2} G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\delta^{(3)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

en supposant une dépendance temporelle en  $\exp(-i\omega t)$ . La dérivation spatiale est prise par rapport aux coordonnées de  $\vec{r}_1$ .

A l'aide du théorème fondamental sur les transformations de Fourier inverses, on peut écrire :

$$\begin{cases} \Psi_\omega(\vec{r}_P, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\vec{r}_P, t) \exp(i\omega t) dt \\ f_\omega(\vec{R}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{R}, t) \exp(i\omega t) dt \end{cases} \quad (\text{D.35})$$

En reportant (D.34) et (D.35) dans (D.33), on obtient l'équation locale :

$$\Delta(\Psi_\omega(\vec{r}_P, \omega)) + \frac{\omega^2}{c^2} \Psi_\omega(\vec{r}_P, \omega) = -f_\omega(\vec{R}, \omega) \quad (\text{D.36})$$

### D.3.2 Solution pour la transformée de Fourier

On cherche ensuite à résoudre l'équation de **Green** associée à (D.36), c'est-à-dire :

$$\Delta_{\vec{r}_P} \left( G(\vec{r}_P, \vec{R}) \right) + \frac{\omega^2}{c^2} G(\vec{r}_P, \vec{R}) = -\delta^{(3)}(\vec{r}_P - \vec{R}) \quad (\text{D.37})$$

où l'indice  $\vec{r}_P$  du laplacien est là pour rappeler que la dérivation s'effectue par rapport aux coordonnées du point  $P$ , celles de la charge  $q$  étant gardées constantes. On prend une fonction de **Green** dépendant de  $\vec{r}_P$  et  $\vec{R}$  car le problème est fonction de ces deux variables.

La théorie des distributions permet d'écrire :

$$f_\omega(\vec{r}_P, \omega) = \iiint f_\omega(\vec{R}, \omega) \delta^{(3)}(\vec{r}_P - \vec{R}) d^3\vec{R} \quad (\text{D.38})$$

en posant  $\delta^{(3)}(\vec{r}_P - \vec{R}) = \delta(x_P - x_R) \delta(y_P - y_R) \delta(z_P - z_R)$ . En multipliant (D.37) par  $f_\omega(\vec{R}, \omega)$  et en intégrant sur  $\vec{R}$ , on obtient en utilisant (D.38) :

$$\begin{aligned} \Delta_{\vec{r}_P} \left( \iiint f_\omega(\vec{R}, \omega) G(\vec{r}_P, \vec{R}) d^3\vec{R} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \iiint f_\omega(\vec{R}, \omega) G(\vec{r}_P, \vec{R}) d^3\vec{R} \\ = - \iiint f_\omega(\vec{R}, \omega) \delta^{(3)}(\vec{r}_P - \vec{R}) d^3\vec{R} \\ = -f_\omega(\vec{r}_P, \omega) \end{aligned}$$

En comparant les deux équations linéaires que sont cette dernière équation et (D.36), on obtient la solution suivante :

$$\Psi_\omega(\vec{r}_P, \omega) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} f_\omega(\vec{R}, \omega) G(\vec{r}_P, \vec{R}) d^3\vec{R} \quad (\text{D.39})$$

### D.3.3 Résolution de l'équation de Green

On peut préciser l'expression du laplacien apparaissant dans (D.37) grâce à deux arguments :

- en notant  $\vec{a}$  un vecteur constant quelconque, la fonction  $G(\vec{r}_P + \vec{a}, \vec{R} + \vec{a})$  est également solution de (D.37) ;  $G$  ne dépend donc que de  $\vec{r} = \vec{r}_P - \vec{R}$ .
- une rotation sur  $\vec{r}$  laisse invariant le laplacien (on peut facilement se ramener au 1<sup>er</sup> cas en faisant une rotation inverse) ;  $G$  ne dépend donc que de  $r = \|\vec{r}_P - \vec{R}\|$ .

On a finalement d'après (A.42) :

$$\Delta_{\vec{r}_P} \left( G(\vec{r}_P, \vec{R}) \right) = \Delta_{\vec{r}}(G(r)) = \frac{1}{r} \frac{d^2(rG)}{dr^2}$$

Avec cette nouvelle expression du laplacien, la relation (D.37) devient :

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(rG)}{dr^2} + \frac{\omega^2}{c^2} G = -\delta^{(3)}(\vec{r}) \quad (\text{D.40})$$

La solution (pour  $r \neq 0$ ) de cette équation d'oscillateur harmonique est évidemment :

$$rG = A \exp\left(i \frac{\omega r}{c}\right) + B \exp\left(-i \frac{\omega r}{c}\right)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes. En incluant la dépendance temporelle, le 1<sup>er</sup> terme du second membre est de la forme  $\exp(-i\omega(t-r/c))$  et correspond bien à une onde divergente : la source  $\vec{r}'$  émet un signal qui parviendra ultérieurement à l'observateur situé en  $\vec{r}$ . Par contre, le 2<sup>e</sup> terme du second membre est de la forme  $\exp(-i\omega(t+r/c))$  et violerait la causalité<sup>5</sup> car il correspond à une onde convergente : le signal passerait par l'observateur situé en  $\vec{r}$  avant d'atteindre la source située en  $\vec{r}'$ . On a donc nécessairement  $B \equiv 0$ .

Pour déterminer la constante restante  $A$ , on considère une sphère de rayon  $R_0$  tel que  $\omega R_0/c \ll 1$ . Ceci permet de dire qu'à l'intérieur de cette sphère ( $r \leq R_0$ ), on pourra prendre :

$$\exp\left(i \frac{\omega}{c} r\right) \approx 1 \quad \text{soit} \quad G(r) = \frac{A}{r}$$

En intégrant (D.40) sur la sphère de rayon  $R_0$ , on obtient :

$$\iiint \Delta G(r) d^3\vec{r} + \frac{\omega^2}{c^2} \iiint G(r) d^3\vec{r} = -1 \quad (\text{D.41})$$

Le 1<sup>er</sup> terme du membre de gauche de (D.41) s'écrit :

$$\begin{aligned} \iiint \Delta G(r) d^3\vec{r} &= A \iiint \Delta \left(\frac{1}{r}\right) d^3\vec{r} \\ &= A \iiint \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r}\right)\right] d^3\vec{r} = A \iint \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r}\right) \cdot d\vec{S} \\ &= -A \iint \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} = -A \iint d\Omega = -4\pi A \end{aligned} \quad (\text{D.42})$$

où le passage de la 1<sup>re</sup> à la 2<sup>e</sup> ligne vient du théorème de la divergence (A.22) et l'égalité suivante de (A.4).

Le 2<sup>e</sup> terme du membre de gauche de (D.41) s'écrit quant à lui :

$$\iiint G(r) d^3\vec{r} = \iiint \frac{A}{r} r^2 dr d\Omega \quad (\text{D.43})$$

et tend vers 0 avec  $R_0$ . Finalement, en comparant (D.41) avec (D.42) et (D.43), on obtient  $A = 1/(4\pi)$ . La solution de (D.37) s'écrit alors :

$$G(\vec{r}_P, \vec{R}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp\left(i \frac{\omega}{c} r\right)}{r} = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp\left(i \frac{\omega}{c} \|\vec{r}_P - \vec{R}\|\right)}{\|\vec{r}_P - \vec{R}\|} \quad (\text{D.44})$$

### D.3.4 Potentiels retardés

On déduit de la relation précédente et de (D.39) que :

$$\Psi_\omega(\vec{r}_P, \omega) = \frac{1}{4\pi} \iiint f_\omega(\vec{R}, \omega) \frac{\exp\left(i \frac{\omega}{c} \|\vec{r}_P - \vec{R}\|\right)}{\|\vec{r}_P - \vec{R}\|} d^3\vec{R}$$

5. On peut noter qu'il n'est pas a priori formellement indispensable de respecter la causalité pour les potentiels  $\vec{A}$  et  $\Phi$  en physique classique, puisqu'ils n'ont pas d'existence propre. La solution trouvée sera donc la solution qui englobe la flèche du temps.

d'où la nouvelle expression de  $\Psi(\vec{r}_P, t)$  donnée par (D.34) :

$$\Psi(\vec{r}_P, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{d^3\vec{R}}{|\vec{r}_P - \vec{R}|} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega(\vec{R}, \omega) \exp(-i\omega t') d\omega \right) \quad (\text{D.45})$$

où l'on a posé :

$$t' = t - \frac{|\vec{r}_P - \vec{R}|}{c} = t - \frac{r}{c} \quad (\text{D.46})$$

$t'$  représente le *temps retardé*<sup>6</sup>, et tient compte du temps nécessaire pour qu'une perturbation de la distribution de charge en  $\vec{R}$  soit perçue en  $P$ .

D'après (D.34), la partie entre parenthèses de (D.45) est simplement  $f(\vec{R}, t')$ . En résolvant l'équation de **Green** associée, on a montré que la solution de (D.33) se mettait sous la forme :

$$\Psi(\vec{r}_P, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{f(\vec{R}, t')}{|\vec{r}_P - \vec{R}|} d^3\vec{R} \quad (\text{D.47})$$

On a donc finalement dans l'espace libre sans condition aux limites :

$$\begin{cases} \Phi(\vec{r}_P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{R}, t')}{r} d^3\vec{R} \\ \vec{A}(\vec{r}_P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{R}, t')}{r} d^3\vec{R} \end{cases} \quad (\text{D.48})$$

avec  $t' = t - r/c$  et  $r = |\vec{r}_P - \vec{R}|$ . Ces deux équations représentent les *potentiels retardés* exprimés en jauge de **Lorenz**. C'est la solution des équations de **Maxwell** qui inclut la causalité.

### D.3.5 Application au cas d'une charge unique

L'application de (1.30) à une charge unique en mouvement n'est pas triviale puisqu'il a fallu 30 ans pour le faire! De nos jours, à l'aide de la théorie des distributions, on peut résoudre le problème facilement en considérant une charge  $q$  qui se déplace dans l'espace libre avec la vitesse  $\vec{v}(t') = \vec{\beta}(t')c$ . Comme la particule peut être considérée comme une charge ponctuelle, on peut écrire les densités de charge et de courant sous la forme :

$$\begin{cases} \rho(\vec{R}, t') = q \delta[\vec{R} - \vec{R}(t')] \\ \vec{J}(\vec{R}, t') = q \vec{v}(t') \delta[\vec{R} - \vec{R}(t')] \end{cases}$$

puisque les sources du champ sont localisées en  $\vec{R}(t')$ . En réécrivant les potentiels avec (1.30) et en intégrant sur le volume, il reste :

$$\begin{cases} \Phi(\vec{r}_P, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r} \delta\left(t' - t + \frac{r}{c}\right) dt' \\ \vec{A}(\vec{r}_P, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \int \frac{\vec{\beta}(t')}{r} \delta\left(t' - t + \frac{r}{c}\right) dt' \end{cases} \quad (\text{D.49})$$

Pour intégrer par rapport au temps, on pose :

$$\theta(t') = t' + \frac{r(t')}{c} \quad \text{d'où} \quad \frac{d\theta}{dt'} = 1 + \frac{1}{c} \frac{dr}{dt'} \quad (\text{D.50})$$

6. On parle du *temps retardé* comme d'une quantité unique, mais il est évident que les parties de la distribution les plus lointaines ont des temps plus retardés que les parties les plus proches. C'est la même situation que lors d'une photographie d'un ciel d'étoiles où la lumière reçue au même instant a été émise à des instants différents qui sont fonction de la distance des étoiles.

De plus, en dérivant  $r^2 = \vec{r}^2$ , on obtient en utilisant (1.27) et (1.28) :

$$r \frac{\partial r}{\partial t'} = \vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t'} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial r}{\partial t'} = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t'} = -\vec{n} \cdot \vec{\beta} c \quad (\text{D.51})$$

où

$$\vec{n}(t') = \frac{\vec{r}(t')}{r(t')}$$

est le vecteur unitaire orientant la droite qui relie la charge  $q$  et le point  $P$  (cf Figure 1.2). Finalement, on a :

$$\frac{d\theta}{dt'} = 1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta} \quad (\text{D.52})$$

En introduisant la variable  $\theta$  définie par (D.50), on peut écrire :

$$\delta\left(t' - t + \frac{r}{c}\right) dt' = \delta(\theta - t) \frac{d\theta}{d\theta/dt'} = \frac{\delta(\theta - t)}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}} d\theta$$

Les équations (D.49) peuvent alors s'écrire :

$$\begin{cases} \Phi(\vec{r}_P, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r} \frac{\delta(\theta - t)}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}} d\theta \\ \vec{A}(\vec{r}_P, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \int \frac{\vec{\beta}(t')}{r} \frac{\delta(\theta - t)}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}} d\theta \end{cases}$$

soit en intégrant :

$$\begin{cases} \Phi(\vec{r}_P, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \right]_{ret} \\ \vec{A}(\vec{r}_P, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[ \frac{\vec{\beta}}{r(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \right]_{ret} \end{cases} \quad (\text{D.53})$$

où les crochets doivent être évalués au temps retardé  $t' = t - r/c$ . Les expressions (1.31) sont appelées *potentiels de Liénard-Wiechert* et ont été formulées de manière indépendante par ces auteurs respectivement en 1898 et 1900.

On retrouve bien qu'à la limite des faibles vitesses ( $1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta} \rightarrow 1$ ), les potentiels  $\Phi$  et  $\vec{A}$  tendent vers leurs expressions statiques :

$$\begin{cases} \Phi(\vec{r}_P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(P)}{PM} d^3P \\ \vec{A}(\vec{r}_P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(P)}{PM} d^3P \end{cases} \quad (\text{D.54})$$

## D.4 Magnétostatique et charges isolées

La magnétostatique étudie les champs induits par des courants permanents. Considérer une charge unique nous fait sortir de ce cadre et les résultats qu'on obtient dans la cadre de la magnétostatique sont (sans surprise) sujets à caution..

### D.4.1 Champ magnétique créé par une charge en mouvement

En supposant tous les porteurs de charges de même type, on peut remplacer  $\vec{J}$  par  $nq\vec{v}$  dans l'expression (3.18) de  $\vec{B}$ . Comme  $n dV$  est le nombre de porteurs de charges de vitesse moyenne  $\vec{v}$  dans le volume  $dV$ , l'intégrale apparaît comme la somme sur toutes les charges en mouvement de la quantité :

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v}_i \times \vec{u}_i}{r^2}$$



où  $r = PM_i$ ,  $P_i$  étant la position de la charge de vitesse  $\vec{v}_i$  et  $\vec{u}_i = \overrightarrow{PM_i}/r$ .

Il est délicat d'en déduire le champ créé par une seule charge en mouvement. En effet, une charge en mouvement ne crée pas un courant permanent, donc on sort du cadre de la magnétostatique. Néanmoins, si la vitesse de la particule est faible (devant  $c$ ) et si son accélération est négligeable, alors on pourrait montrer que le champ  $\vec{B}$  créé en  $M$  par une particule placée en  $P$  est approximativement donné par :

$$\vec{B}(M) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times \vec{u}}{r^2} \quad (\text{D.55})$$

**Remarque 1 :** On a vu que la loi de **Biot** et **Savart** était valable quelque soit la vitesse des particules qui forment le courant. Il est alors surprenant que la sommation de l'expression approchée (D.55), valable pour les petites valeurs de la vitesse et de l'accélération, donne le résultat exact valable pour toutes les valeurs de  $\vec{v}$ . En fait, et cela n'a rien d'évident, on pourrait montrer que l'écart entre le champ exact créé par une particule en mouvement et (D.55) se moyenne à zéro pour un grand nombre de particules..

**Remarque 2 :** Même si (D.55) n'est pas exacte, on peut s'en servir pour estimer un ordre de grandeur du champ  $\vec{B}$  dont on montre qu'il est extrêmement faible<sup>7</sup>. On en déduit que seul le champ  $\vec{B}$  créé par un très grand nombre de charges en mouvement peut avoir une influence macroscopique.

## D.4.2 Force magnétique entre particules chargées

Si les particules chargées ont une vitesse faible devant la vitesse de la lumière, on peut utiliser l'expression (D.55) pour obtenir le champ créé par une particule (1) à l'endroit où se trouve une particule (2), c'est-à-dire la force  $\vec{F}_{12} = q_2 \vec{v}_2 \times \vec{B}_{12}$  exercée par la particule (1) sur la particule (2) :

$$\vec{F}_{12} = q_2 \vec{v}_2 \times \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 \vec{v}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 q_2 \vec{v}_2 \times \frac{\vec{v}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \quad (\text{D.56})$$

où  $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . Cette expression n'étant pas symétrique ( $\vec{F}_{12} \neq -\vec{F}_{21}$ ), le principe de l'action et de la réaction n'est pas vérifié dans l'interaction de deux particules chargées en mouvement. Ceci est dû au fait que l'interaction n'est pas instantanée. Attention, pour obtenir (D.55), on était sorti du cadre de la magnétostatique!

On trouve souvent dans la littérature le calcul de la force d'interaction entre particules chargées identiques, se déplaçant sur deux trajectoires parallèles (cf Figure D.2). Suivant (D.56), la force magnétique  $\vec{f}_m$  est attractive tandis que la force électrostatique  $\vec{f}_e$  est toujours répulsive. Elles valent respectivement :

$$f_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q^2 v^2}{d^2} \quad \text{et} \quad f_e = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q^2}{d^2}$$

dans le référentiel ( $\mathcal{R}$ ) du laboratoire. On a  $f_m/f_e = v^2/c^2$ . Si on se place dans le référentiel ( $\mathcal{R}'$ ) des particules en mouvement, on n'a plus de force magnétique puisque les particules sont au repos et uniquement la force électrique, mais de même expression que dans ( $\mathcal{R}$ ).. On tombe sur une incohérence profonde, due à la mauvaise utilisation de la magnétostatique.

## D.5 Variation du flux à travers un circuit en mouvement

Pour effectuer le calcul du § 4.2.5, on cherche à calculer la fonction  $D\vec{B}/Dt$  définie par :

$$\frac{d}{dt} \left[ \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right] = \iint_{(S)} \frac{D\vec{B}}{Dt} \cdot d\vec{S} \quad (\text{D.57})$$

<sup>7</sup>. Par exemple, pour des particules  $\alpha$  ( $q = 2e$ ) se déplaçant à 20 000 km/s, on observe au maximum  $6,4 \cdot 10^{-15}$  T à 1 cm (le maximum est obtenu si l'angle entre  $\vec{v}$  et  $\vec{u}$  vaut  $\pi/2$ ).

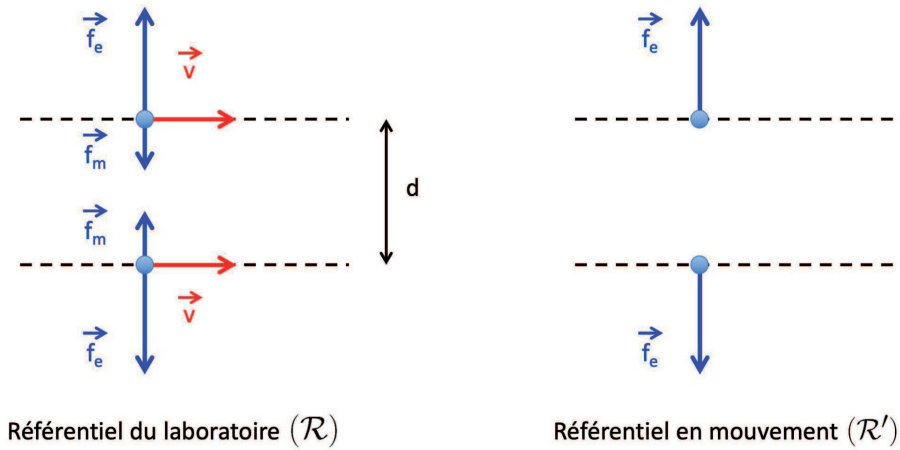


FIGURE D.2 – Forces s'exerçant sur deux particules identiques de même vitesse, suivant des trajectoires parallèles.

lorsque la surface ( $S$ ) est en mouvement à la vitesse  $\vec{u}$  par rapport aux sources du champ magnétique. Par définition, en prenant les notations de la Figure D.3, on a :

$$\frac{d}{dt} \left[ \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\Delta t} \iint_{(S)} \vec{B}(t + \Delta t) \cdot d\vec{S}_2 - \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}_1 \right] \quad (\text{D.58})$$

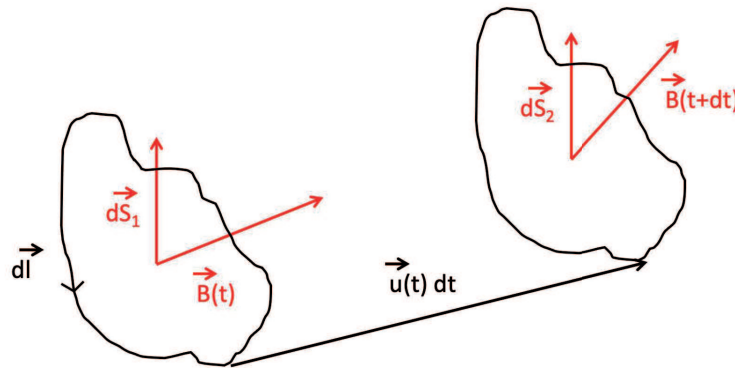


FIGURE D.3 – Au cours du mouvement entre  $t$  et  $t + dt$ , la surface ( $S$ ) intercepte le volume ( $V$ ).

Le théorème d'**Ostrogradsky** (A.22) ne s'applique qu'à des valeurs simultanées des champs. Appliquons-le au champ  $\vec{B}$  à l'instant  $t$  au volume ( $V$ ) contenu entre ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) et la trace de la frontière de ( $S$ ) qui engendre la surface latérale ( $\Sigma$ ) au cours du mouvement entre  $t$  et  $t + dt$ . Le flux sortant de  $\vec{B}$  à travers la surface ( $\Sigma$ ) s'écrit :

$$\iint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = 0 = \iint_{(S)} \left( \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}_2 - \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}_1 \right) - \oint \vec{B}(t) \cdot (\vec{u} dt \times d\vec{\ell}) \quad (\text{D.59})$$

Comme on peut développer  $\vec{B}(t + \Delta t)$  comme :

$$\vec{B}(t + \Delta t) = \vec{B}(t) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Delta t + \dots$$

l'équation (D.58) peut s'écrire au 1<sup>er</sup> ordre :

$$\frac{d}{dt} \left[ \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\Delta t} \iint_{(S)} \left( \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}_2 - \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}_1 \right) + \frac{1}{\Delta t} \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Delta t d\vec{S} \right]$$

---

A l'aide de (D.59), ceci devient :

$$\frac{d}{dt} \left[ \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\Delta t} \oint \vec{B}(t) \cdot (\vec{u} \Delta t \times d\vec{\ell}) + \frac{1}{\Delta t} \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Delta t d\vec{S} \right]$$

d'où :

$$\frac{d}{dt} \left[ \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right] = \oint (\vec{B} \cdot \vec{u}) \times d\vec{\ell} + \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = \oint (\vec{B}(t) \times \vec{u}) \cdot d\vec{\ell} + \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

A l'aide du théorème de **Stokes** (A.23), on a finalement :

$$\frac{d}{dt} \left[ \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right] = \iint_{(S)} \left( \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{u}) \right) \cdot d\vec{S} + \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

La définition (D.57) de  $D\vec{B}/Dt$  étant valable pour toute surface ( $S$ ), on aura finalement :

$$\frac{D\vec{B}}{Dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{u}) \quad (\text{D.60})$$

CQFD..