université PARIS-SACLAY

Chapitre 4

PROPAGATION DANS LE VIDE ET LES MILIEUX

Alexandra Palacio Morales
alexandra.palacio-morales@universite-paris-saclay.fr

2024-2025

Sommaire

Equations des ondes planes dans un milieu

- *Déterminer les équations non couplées pour les champs E et B*

Départ: Eq. Maxwell en absence de charges + C.I.

$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0$

$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$

$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$

$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$

On remplace:

$\boldsymbol{E} \rightarrow \boldsymbol{D}$ / $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\epsilon E}$

$\boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{H}$ / $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\mu H}$

sachant : $\boldsymbol{j_{total}} = \boldsymbol{j_{libre}} + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{M} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$

$\boldsymbol{j_{libre}} = \boldsymbol{0}$

On obtient:

$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = 0$

$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$

$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$

$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$

Avec les équations de continuité de la charge:

$$\frac{\partial \rho_{libre\ ou\ liée}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)_{libre\ ou\ liée} = 0$$

Equations des ondes planes dans un milieu

On combine les équations pour avoir une éq. en **E** et en **B** non couplées:

$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) = \cdots = -\frac{\partial\, \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}}{\partial t}$

$$\Longrightarrow \quad \Delta \boldsymbol{E} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } n^2 = \mu_r \epsilon_r$$

Même analyse pour B:

$$\Delta \boldsymbol{B} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0$$

Observations:

Equations des ondes planes dans un milieu

- *Déterminer les solutions de **E** et **B***

On résoudre l'éq : $\Delta \boldsymbol{w} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = 0$

À 1D (ex: $\boldsymbol{u_z}$):

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\boldsymbol{w} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{z}, t)$$

On décompose:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\boldsymbol{w} = 0$$

On obtient 2 solutions linéairement indépendantes:

$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{z}, t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{v}t) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z} + \boldsymbol{v}t)$ où ***g** et **f*** sont des ondes planes propagatives

On écrit donc le champ **E**:

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{E}_+\left(z + \frac{c}{n}t\right) + \boldsymbol{E}_-(z - \frac{c}{n}t)$$
$$= \boldsymbol{f}_\perp\left(z + \frac{c}{n}t\right) + \boldsymbol{g}_\perp(z - \frac{c}{n}t)$$

où l'indice $\perp$ dénote un vecteur perpendiculaire à $\boldsymbol{u_z}$

$\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{u_z}$: onde TEM

(Transverse EM wave)

Equations des ondes planes dans un milieu

On écrit donc le champ **B**:

$$\boldsymbol{B}_+\left(z + \frac{c}{n}t\right) = \frac{\boldsymbol{u_z} \times \boldsymbol{E}_+\left(z + \frac{c}{n}t\right)}{c/n} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{B}_-\left(z - \frac{c}{n}t\right) = \frac{\boldsymbol{u_z} \times \boldsymbol{E}_-\left(z - \frac{c}{n}t\right)}{c/n}$$

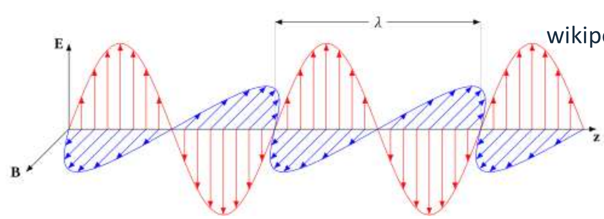
Alors $\boldsymbol{B}(z,t) = \boldsymbol{B}_+\left(z + \frac{c}{n}t\right) + \boldsymbol{B}_-(z - \frac{c}{n}t)$

Observations:

- ***$\boldsymbol{B} \perp \boldsymbol{E}$* et donc *$\boldsymbol{B} \perp \boldsymbol{u_z}$* : onde TEM**
- **Orthogonalité:**
- **Stationnaires:**

Éq. Générale:

$$\boxed{\begin{aligned} &\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_\perp(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \tfrac{c}{n}|\boldsymbol{k}|t) \\ &\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\boldsymbol{u_k} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{c/n} \\ &\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{u_k} \quad \text{où} \quad k = \frac{2\Pi}{\lambda} \end{aligned}}$$



wikipedia

Voir https://www.geogebra.org/m/jctrv8xe#material/bhvrgymr
Pour une polarisation quelconque :
https://www.geogebra.org/m/jctrv8xe#material/tfkbv46w

Equations des ondes planes dans un milieu

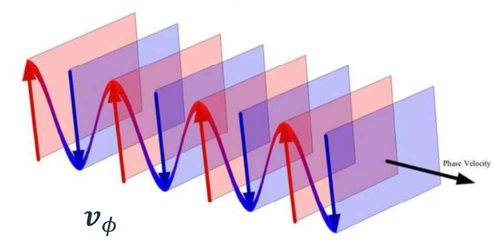
- *Vitesse de phase de l'onde*

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_{\perp}\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \tfrac{c}{n}|\boldsymbol{k}|t\right) = \boldsymbol{E}_{\perp}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)$$

Phase:

$$\phi(r\quad,t) = \boldsymbol{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t$$

Vitesse de pase:



$$\frac{d\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_{\phi} = v\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}} = \frac{\omega}{k}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}} = \frac{c}{n}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}}$$

Chaque plan de : $\phi(r\quad,t)$ =cte se déplace à $\boldsymbol{v}_{\phi}$

En fonction des constantes du milieu:

$v = \frac{\omega}{n} = \frac{c}{n} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ *on a:* $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ *: relation de dispersion*

Equations des ondes planes harmoniques

- *Interlude mathématique: Transformé de Fourier*

On définit la transformée de Fourier (T.F.) et son inverse (I.T.F.) par:

$$\tilde{f}(r,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r,t)e^{i\omega t}dt \qquad f(r,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(r,\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

Propriétés mathématiques et cas particuliers:

1. Toute fonction $\mathrm{f}(\mathrm{r},\mathrm{t})$ peut s'écrite comme combinaison linéaire des fonctions $\tilde{\mathrm{f}}(\mathrm{r},\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}}$
2. Champs EM: **E** et **B** sont des grandeurs réelles $\Rightarrow$ $\mathbf{f}(\mathrm{r},\mathrm{t}) = \mathbb{R}\left[\underline{\mathrm{f}(\mathrm{r},\mathrm{t})}\right] = \mathbb{R}\left[\underline{\boldsymbol{F}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}}\right] = \frac{1}{2}\left[\underline{\boldsymbol{F}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}} + \underline{\boldsymbol{F}}^{*}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega\mathrm{t}}\right]$
3. $\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}[\dots] \rightarrow (-\mathrm{i}\omega)\times[\dots]$
4. $\nabla\cdot[\dots] \rightarrow (i\boldsymbol{k})\cdot[\dots]$ $\quad\nabla\times[\dots] \rightarrow (i\boldsymbol{k})\times[\dots]$ $\quad\Delta[\dots] \rightarrow (-\boldsymbol{k}^{2})[\dots]$
5. $<\boldsymbol{f}(t)\boldsymbol{g}(t)> = \frac{1}{2}\mathbb{R}\left[\underline{\boldsymbol{f}}\cdot\underline{\boldsymbol{g}}^{*}\right]$
6. $\mathrm{FT}[f(t)\,g(t)] = \tilde{f}(\omega) * \tilde{g}(\omega)$
7. La TF $f(t-t_0)$ translatée: $\widetilde{f}(t-t_0)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{i\omega t}dt = e^{-i\omega t_0}\widetilde{f}(\omega)$
8. T.F de la fonction delta de Dirac: $\widetilde{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{i\omega t}dt = 1$
9. T.F: d'une exponentielle complexe: $\widetilde{e^{i\omega_0 t}}(\omega) = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

   Si $f(t) = \cos(\omega_0 t)$ *alors* $\tilde{f}(\omega) = \pi[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)]$

Equations des ondes planes harmoniques

$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = \rho_{libre}$

$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$

$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = i\omega \boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = \boldsymbol{j_{libre}} - \mathrm{i}\omega \boldsymbol{D}$

Dans un milieu en absence de charges et courants libres:

$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = 0$

$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$

$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = i\omega \mathbf{B}$

$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = -\mathrm{i}\omega \boldsymbol{D}$

avec $\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{j} + i\omega\rho = 0$

L'équation des ondes dans le régime harmonique pour les champs:

$$\Delta \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) + \left(\frac{n\omega}{c}\right)^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) = \boldsymbol{0}$$

où $\left(\frac{n\omega}{c}\right)^2 = \varepsilon\mu\omega^2$

$$\Delta \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\omega) + \left(\frac{n\omega}{c}\right)^2 \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\omega) = \boldsymbol{0}$$

On obtient: $\boxed{-k^2 + \omega^2\varepsilon\mu = 0}$

Ici l'éq. Helmholtz =éq. onde plane dans le régime harmonique monochromatique

La solution générale : $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \mathbb{R}\left[\underline{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}e^{-i\omega t}\right]$

si onde propagatrice monochromatique:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \mathbb{R}\left[\underline{\boldsymbol{E}}e^{-i\omega(t-\frac{n}{c}\boldsymbol{u}.\boldsymbol{r})}\right] = \mathbb{R}\left[\underline{\boldsymbol{E}}e^{-i(\omega t-\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r})}\right] \quad \text{avec} \quad |\boldsymbol{k}| = k = \frac{\omega n}{c}$$

ou bien $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^*) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E_0}e^{-i\omega t} + \boldsymbol{E_0}^*e^{-i\omega t}\right)$

Advantages:

Polarisation d'une onde plane

- Définie par l'évolution du champ **E** (dans le temps) sur le plan de normal ∥ $\mathbf{u_k}$
- Référentiel:

  $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{u_k}$ / $\begin{matrix} \mathbf{e_1} \cdot \mathbf{e_2} = \mathbf{0} \\ \mathbf{e_1} \times \mathbf{e_2} = \mathbf{u_k} \end{matrix}$

- **E**(**r**,t) se réécrit comme: $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = (\varepsilon_1\mathbf{e_1} + \varepsilon_2\mathbf{e_2})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$

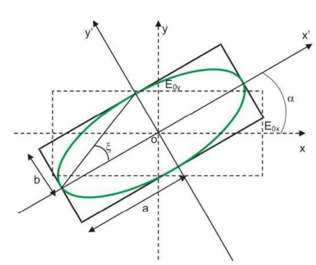
  avec $\begin{matrix} \varepsilon_1 = A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1} \\ \varepsilon_2 = A_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi 2} \end{matrix}$ $\quad A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ et $\quad \phi = kr - \omega t$

  Cela donne:

  $$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \left(A_1\mathbf{e_1} + A_2\mathbf{e_2}e^{i(\varphi_2-\varphi_1)}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\varphi_1\right)}$$

- Différent cas de polarisation:

  - Linéaire
  - Circulaire
  - Elliptique

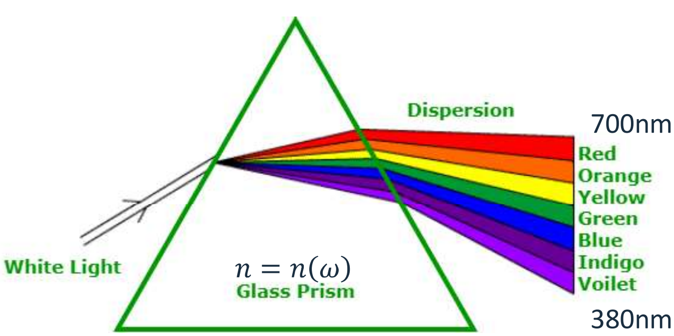


Sommaire

- **Equations des ondes planes et harmoniques**
  - Maxwell dans un milieu simple : ondes planes
  - Maxwell en régime harmonique
    - Interlude mathématique: Transformé de Fourier
    - Equations des ondes planes en régime harmonique
  - Polarisation d'un onde
- **Dispersion**
  - Introduction: décomposition de la lumière. Vitesse de phase et de groupe
  - Dispersion dans un milieu diélectrique: origine, propagation de l'onde selon ε(ω), effet d'interface
    - Modèle de Drude-Lorentz
    - Relations de Kramers-Kronig
  - Dispersion dans un conducteur
- **Loi de conservation dans les milieux : Théorème de Poynting**
  - Théorème de Poynting dans les milieux
  - Théorème de Poynting pour des ondes monochromatiques

Dispersion

- *Introduction: décomposition de la lumière blanche. Vitesse de phase et de groupe*



$n\,sin(\hat{\imath}) = n_p(\omega)sin(\hat{r})$

$\hat{r}$ propre à chaque λ;

sachant: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ et $\omega(k) = v(k) \cdot k$

! Chaque λ voyage avec sa propre vitesse dans le milieu

Origine du phénomène de dispersion :

- Conditions d'interface entre deux milieux
- Interaction de l'on EM avec la matière

Dispersion

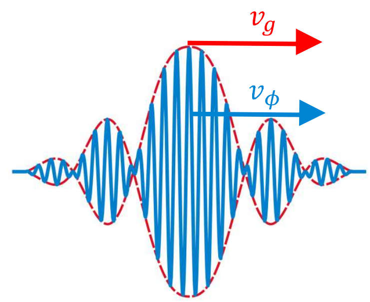
Vitesse de l'onde EM :

- Vitesse de phase

$$v_\phi(\omega) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = \frac{\omega}{k(\omega)} = \frac{c}{n(\omega)}$$

- Vitesse de groupe

$$v_g(\omega) = \frac{1}{\frac{\partial k}{\partial \omega}} = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$



Note: $v_g \neq v_\phi$ *sauf si* $\omega = ak$ *(milieu non dispersive)*

linéarisation de la dispersion

$$\omega(k) = \omega_0 + (k - k_0)\omega_0'(k_0)$$

Dispersion

- *Dispersion dans un milieu diélectrique:*

- ***Origine***

Dispersion

- **Propagation de l'onde selon $\varepsilon(\omega)$:**

$\varepsilon_r(\omega)>0$

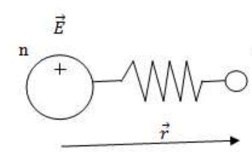
$\varepsilon_r(\omega)<0$ (pur imaginaire)

$\varepsilon_r(\omega)$ complexe

- **Propagation à l'interface :**

Dispersion

- *Modèle de Drude-Lorentz ou de l'électron élastiquement lié*



$\boldsymbol{P}(t) = -n\, e\, \boldsymbol{r}(t)$

avec n : densité volumique de dipôles

$\boldsymbol{r}(t)$: écart par rapport à la position d'équilibre

e : charge de l'électron

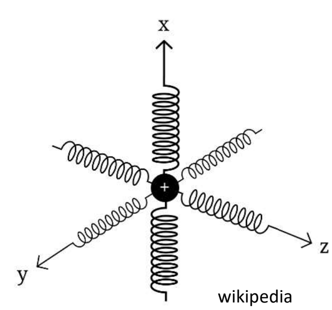
Eq. dynamique:

$$m_e\ddot{\boldsymbol{r}} = \quad -e\boldsymbol{E} \qquad - \gamma\dot{\boldsymbol{r}} \qquad - k\boldsymbol{r}$$

forces des champs

forces d'amortissement visqueux

force de rappel



wikipedia

Si excitation harmonique:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_0} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

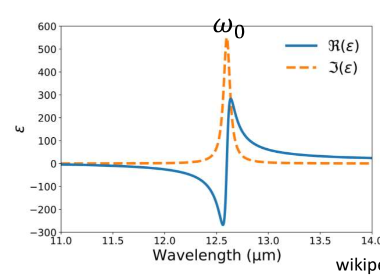
Cela donne: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$

qui entraine l'apparition d'un moment dipolaire électrique complexe $\mathbf{p} = q\boldsymbol{r}$

On a $\quad \chi = \chi'(\omega), +\mathrm{i}\chi''(\omega);$

à partir de la relation constitutive: $\boldsymbol{D} = \underline{\varepsilon}\boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \underline{\boldsymbol{\varepsilon_r}}\boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \left(1 + \underline{\chi}\ \right)\boldsymbol{E}$

Alors $\quad \varepsilon = \varepsilon'(\omega), +\mathrm{i}\varepsilon''(\omega)$



wikipedia

Dispersion

- *Relations de Kramers-Kronig*

On cherche des équations générales pour décrire la réponse d'une grandeur a une perturbation externe (ici $\boldsymbol{P}$ sous $\mathbf{E}_{ext}$).
$\boldsymbol{P}$ dépend de manière causale et directe. Ceci implique que $\boldsymbol{P}$ ne peut pas exister avant que le champ ne soit pas appliqué. Ainsi, cette causalité impose des relations entre les parties réelles et imaginaires de l'indice.

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \chi\,(r, t-\tau)\boldsymbol{E}(r,\tau)d\tau$$

$$\text{Où} \qquad \chi\,(r,t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ \chi \neq 0 & si\ \boldsymbol{E}_{ext}\ \textit{appliqué} \end{cases}$$

Comment cette condition temporelle se traduit-elle dans le domaine fréquentiel ? Relations de Karmers-Kronig

$$\chi' \ (\omega) = Re\left[\underline{\chi \ (\omega)}\right] = -\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'' \ (\omega \ )}{\omega \ -\omega'} d\omega'\right\}$$

$$\chi'' \ (\omega) = Img\left[\underline{\chi \ (\omega)}\right] = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi' \ (\omega \ )}{\omega \ -\omega'} d\omega'\right\}$$

$\mathcal{P}$: partie principale (1^{er} terme non nul du développement limité)

! La partie réelle (imaginaire) est déterminée par la partie imaginaire (réelle)

Dispersion

- Propagation dans un milieu conducteur :

Sommaire

- **Equations des ondes planes et harmoniques**
  - Maxwell dans un milieu simple : ondes planes
  - Maxwell en régime harmonique
    - Interlude mathématique: Transformé de Fourier
    - Equations des ondes planes en régime harmonique
  - Polarisation d'un onde
- **Dispersion**
  - Introduction: décomposition de la lumière. Vitesse de phase et de groupe
  - Dispersion dans un milieu diélectrique: origine, propagation de l'onde selon ε(ω), effet d'interface
    - Modèle de Drude-Lorentz
    - Relations de Kramers-Kronig
  - Dispersion dans un conducteur
- **Loi de conservation dans les milieux : Théorème de Poynting**
  - Théorème de Poynting dans les milieux
  - Théorème de Poynting pour des ondes monochromatiques

Loi de conservation dans les milieux

- *Théorème de Poynting dans les milieux (rappel)*

On défini le vecteur de Poynting : $\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{j_{libre}} \cdot \boldsymbol{E}\, d^3r = -\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}\, dS - \int_{\mathcal{V}} \left(\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \right) d^3r$$

Dans un milieu simple (l.h.i., càd: ε_r, μ_r sont réels et cts) :

- $\mathbf{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ *et* $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$; on déduit que la densité volumique de l'énergie EM est: $u_{em} = \frac{\boldsymbol{ED}+\boldsymbol{BH}}{2}$

On réécrit le théorème:

$$\frac{dU_{em}}{dt} = -\int_{\mathcal{S}} \mathbf{\Pi} dS - \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{j_{libre}} \cdot \boldsymbol{E}\, d^3r$$

Ou sous forme locale de conservation de l'énergie:

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = -\nabla \mathbf{\Pi} - \boldsymbol{j_{libre}} \cdot \boldsymbol{E}$$

Loi de conservation dans les milieux

- *Théorème de Poynting pour des ondes monochromatiques*

Dans un milieu dispersif $\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$, ne peut pas s'écrire simplement comme la dérivée de $\boldsymbol{E}^{\mathbf{2}}$ ou du produit $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}$

Dans le cas de champs harmoniques:

$$E(r,t)=\mathbb{R}\left[\underline{\boldsymbol{E}}e^{-i(\omega t-kz)}\right]=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}+\boldsymbol{E}_{\mathbf{0}}{}^{*}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}\right)$$

On a:

$$u_e=u_m=\frac{\epsilon}{2}\left[E_x^2\cos^2(\omega t-kz+\phi_x)+E_y^2\cos^2\left(\omega t-kz+\phi_y\right)\right]$$

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r},\mathrm{t})=\frac{1}{\mu c}\left[E_x^2\cos^2(\omega t-kz+\phi_x)+E_y^2\cos^2\left(\omega t-kz+\phi_y\right)\right]\boldsymbol{u}_{\mathbf{z}}$$

Les moyennes temporelles sur une période *($T=\frac{2\pi}{\omega}$):*

$$\langle u_m\rangle=\frac{1}{4}\mathbb{R}[\boldsymbol{B}.\boldsymbol{H}^*]=\frac{n^2}{4\mu c^2}\mathbb{R}[\boldsymbol{E}.\boldsymbol{E}^*]=\frac{1}{4}\mathbb{R}[\boldsymbol{E}.\boldsymbol{D}^*]=\langle u_e\rangle$$

$$\langle\mathbf{\Pi}(\mathbf{r})\rangle=\frac{1}{2}\mathbb{R}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*]=\frac{n}{2\mu c}\mathbb{R}[\boldsymbol{E}.\boldsymbol{E}^*]\boldsymbol{u}=\langle u_m\rangle\mathbf{v_E}$$

Cela donne le théorème de Poynting dans le régime harmonique:

$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}}\boldsymbol{j}_{\boldsymbol{f}}^{*}\cdot\boldsymbol{E}\,d^3r+\int_{\mathcal{S}}\underline{\mathbf{\Pi}}\,dS+2i\omega\int_{\mathcal{V}}(u_e-u_m)\,d^3r=0$$

Partie réelle : $\langle\mathcal{P}_{\rightarrow j_{libre}}\rangle=\int_{\mathcal{S}}\langle\mathbf{\Pi}\rangle dS$ Partie imaginaire: puissance réactive ou stockée temporairement en $\mathcal{V}$

Résumé des contenues à retenir

- Retrouver l'équation de propagation dans le vide/milieux à partir des équations de Maxwell
- Écrire la forme d'une onde plane généralisée et monochromatique
- Définir la polarisation d'une onde plane monochromatique
- Dispersion dans un milieu diélectrique et conducteur: relation avec et modélisation des grandeurs à l'origine, indice de réfraction et permittivités complexes, effets à l'interface et caractérisation de l'onde plane dans le milieu
- Écrire le vecteur de Poynting, la densité d'énergie électromagnétique, la conservation de l'énergie dans le vide et les milieux simples