

## Chapitre 3

# MAGNETOSTATIQUE (VIDE ET MILIEUX)

Alexandra Palacio Morales

alexandra.palacio-morales@universite-paris-saclay.fr

2024-2025

## Sommaire

### ■ Magnétostatique

- Équations de Maxwell pour la magnétostatique
- Loi de Biot et Savart
- Potentiel vecteur
- Conditions d'interface
- Actions mécaniques: force, moment et trajectoires
- Énergie magnétostatique totale. Énergie d'interaction et de réciprocité
- Méthodes pour déterminer  $\mathbf{B}$

### ■ Dipôles magnétiques

- Développement multipolaire
- Dipôle magnétique
- Actions sur le dipôle magnétique

### ■ Magnétostatique dans les milieux

- Introduction: magnétisation et courants de magnétisation
- Magnétisation  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  et description microscopique du magnétisme
- Excitation magnétique:  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$
- Classification des matériaux
- Équations de Maxwell en fonction des charges libres
- Forces et précession
- Énergie et théorème de Poynting dans les milieux

# Sommaire

## ■ Magnétostatique

- Équations de Maxwell pour la magnétostatique
- Loi de Biot et Savart
- Potentiel vecteur
- Conditions d'interface
- Actions mécaniques: force, moment et trajectoires
- Énergie magnétostatique totale. Énergie d'interaction et de réciprocité
- Méthodes pour déterminer  $\mathbf{B}$

## ■ Dipôles magnétiques

- Développement multipolaire
- Dipôle magnétique
- Actions sur le dipôle magnétique

## ■ Magnétostatique dans les milieux

- Introduction: magnétisation et courants de magnétisation
- Magnétisation  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  et description microscopique du magnétisme
- Excitation magnétique:  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$
- Classification des matériaux
- Équations de Maxwell en fonction des charges libres
- Forces et précession
- Énergie et théorème de Poynting dans les milieux

# Magnétostatique

- Équations de Maxwell pour la magnétostatique

## ■ Introduction au champ magnétique:

$\mathbf{B}$  est généré par  $N$  charges  $q_i$  situés dans  $P_i$  points et avec une vitesse  $\mathbf{v}_i$

$\mathbf{B}$  admet le Pp. de superposition:

$$\mathbf{B}(\mathbf{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{q_i \mathbf{v}_i \times \mathbf{P}_i \mathbf{M}}{|\mathbf{P}_i \mathbf{M}|^3}$$

dans le cas d'une distribution continue  $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$  avec  $V$  le volume total embrassé par les charges

$$\mathbf{B}(\mathbf{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Rappels:

- $\mathbf{B}$  pseudo-vecteur; crée par un courant  $\Rightarrow$  pas de monopole magnétique

- Unité: T (Tesla: N/Am)

- $\mathbf{B}$  ne travaille pas  $\mathbf{F}_{\text{mag}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  avec  $\mathbf{v} \perp \mathbf{B} \Rightarrow$  Puissance magnétique:  $P_{\text{mag}} = 0$

# Magnétostatique

- Magnétostatique:**  
 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  avec  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$  satisfait
 
$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \\ \text{sachant que } \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \mathbf{j} = 0 \\ \nabla \mathbf{j} = 0 \Rightarrow \mathbf{j}(\mathbf{r}) \text{ régime stationnaire} \end{array} \right.$$

- Conservation de la charge:**  $\nabla \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$   
 donné  $\nabla \mathbf{j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

- Théorème de Thomson pour la magnétostatique:**

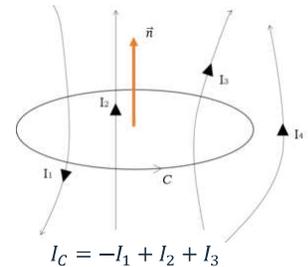
dans un volume sans charge, le  $|\mathbf{B}(\mathbf{r})|$  peut avoir un minimum local mais jamais de maximum local

- Loi de circuits d'Ampère**

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \\ \nabla_r \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0 \end{array} \right\} \oint \nabla \times \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{B} \, d\mathbf{l} = \mu_0 I_C$$

$I_C$  est la somme des tous les courants  $I_i$  dans le contour où  $\mathbf{B}$  a été calculé.

Note:  $I = \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{S}$



# Magnétostatique

- Loi de Biot et Savart

Appliquons le Théorème de Helmholtz au champ magnétique ( $\nabla \mathbf{B} = 0$  et  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ ):

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla_r \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

cas d'une distribution de courant continue (I courant permanente constante) de taille finie on obtient:

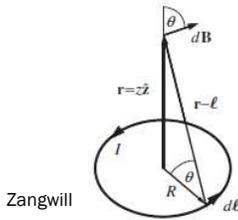
$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

- Notes:
- l'équation dépend du courant I et pas de la vitesse des charges
  - $\nabla \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{0}$
  - valide pour tout circuit localisé dans le volume
  - confirme  $\nabla \mathbf{B} = \nabla_r \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] = 0$ ; car  $\mathbf{j}$  ne dépend pas de  $\mathbf{r}$

# Magnétostatique

Exemples d'application de la loi de Biot et Savart:

- Boucle circulaire de courant



Zangwill

Ici: symétrie radiale, restent seulement les composantes selon  $u_z$ .

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = |\mathbf{r} - \mathbf{l}| = (R^2 + z^2)^{1/2}$$

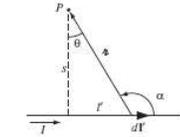
$$d\mathbf{l} \times (\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_{r'}) = dl \cos(\theta) \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0}{2} \frac{I R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z = \frac{\mu_0 I \cos^3(\theta)}{2R} \mathbf{u}_z$$

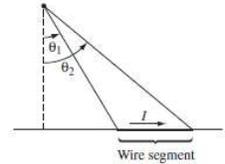
! Notons que selon la symétrie du problème, l'application du Théorème d'Ampère pourra être plus pertinent

$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_{r'})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}$$

- Fil infini



Griffiths



Wire segment

# Magnétostatique

Exemples d'application du théorème d'Ampère:

- Fil conducteur infini

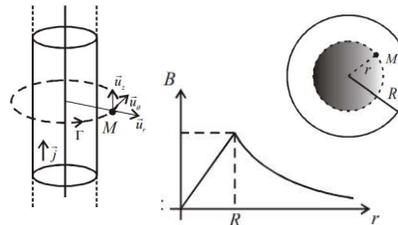


- Solénoïde infinie



$$\oint \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_C$$

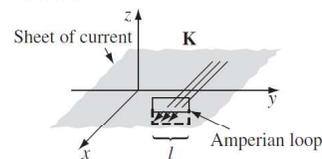
- Cylindre infinie



$$B(r > R) = \frac{\mu_0 j R^2}{2r}$$

$$B(r < R) = \frac{\mu_0 j r}{2}$$

- Feuille infinie



Griffiths

# Magnétostatique

## - Potentiel vecteur ( $A$ )

- $A$  est définie à une cts près:  $A = A' + \nabla\varphi$
- $\nabla A = 0$
- Unité T/m



$\nabla A' = -\nabla^2\varphi$ : condition de jauge de Coulomb

Note: Il peut exister  $\phi_{mag}$  equivalent au  $\phi$  dû au  $E$  si n'existent pas de sources pour  $B$  (càd si  $\nabla \times B = 0$ ).

- Eq. de Poisson:

$$\nabla^2 A = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (3 \text{ composantes}); \text{ si il n'a pas de courant dans la region } \Delta A = 0$$

- $A$  définie par Biot et Savart:

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad \begin{array}{l} A \perp \mathbf{j}(\mathbf{r}) \\ A \perp \mathbf{B}(\mathbf{r}) \end{array}$$

- Relation flux magnétique  $\Phi_{mag}$  et  $A$  :

$$\Phi_{mag} = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} d\mathbf{l}$$

comme  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ;  $\int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0 \Rightarrow \Phi_{mag} = 0$  si surface fermée

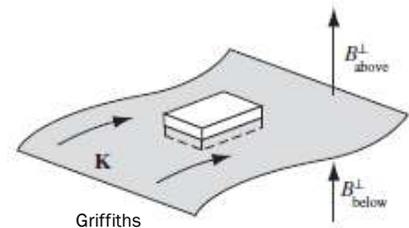
# Magnétostatique

## - Conditions d'interface

- Champ:

$$\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{j}_S \times \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}$$

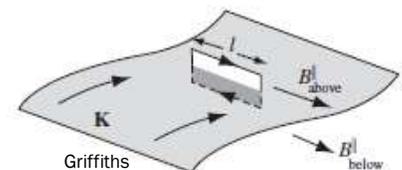
$$B_{1n} = B_{2n}$$



- Potentiel vecteur:

$$A_2 = A_1$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial n} - \frac{\partial A_1}{\partial n} = \mu_0 \mathbf{j}_S$$



# Magnétostatique

- Actions mécaniques: force, moment et trajectoires

▪ **Force de Lorentz:**

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_{mag} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- Notes: -  $\mathbf{F}_{mag}$  ne travaille pas;  $\delta W_{mag} = 0$

- correction de la  $\mathbf{F}_{mag}$  sur la  $\mathbf{F}_e \propto (v/c)^2$

- viole le principe d'action/réaction. Revoir la conservation de la quantité de mvt

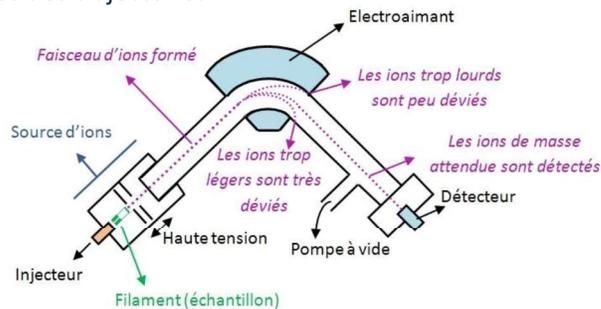
- éq. de mvt:  $m \frac{dv}{dt} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \Rightarrow$  Revoir trajectoires avec  $\mathbf{B}$  uniforme (m.c.u.  $\left\{ \begin{array}{l} \omega_c = qB/m \\ R = v_{\perp}/\omega_c \end{array} \right.$

et mvt. hélicoidal) et  $\mathbf{B}$  non uniforme

- Applications des forces/analyses des trajectoires:

- Détecteur de masse

- Séparateur d'isotopes



# Magnétostatique

▪ **Force:**

$$\mathbf{F} = \int_V dV \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

avec  $F \propto \frac{1}{2} \langle B \rangle$ , car une charge ne peut pas exercer de force sur elle-même

cas particuliers:

un ruban  $\mathbf{F} = \int_S dS \mathbf{j}_S(\mathbf{r}_S) \times \mathbf{B}_{avg}(\mathbf{r}_S)$

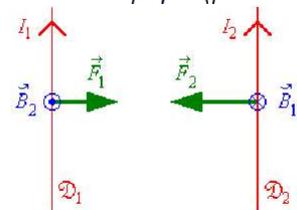
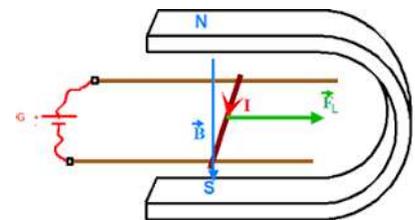
un fil  $\mathbf{F} = I \int_C d\mathbf{l} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$

**Force de Laplace:** Force qu'exerce un champ magnétique sur un conducteur parcouru par un courant. Contrairement à la force de Lorentz, Laplace est de caractère macroscopique (portion de fil)

$$d\mathbf{F}_L = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

$$\text{où } \mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I I' \oint_{C1} \oint_{C2} d\mathbf{l} \times \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

avec  $I, I'$  les courants qui traversent le fil et qui créent le  $\mathbf{B}$ , respectivement



▪ **Moment d'une force magnétique:**

$$\mathbf{\Gamma} = \oint_C \mathbf{OP} \times d\mathbf{F}_L = \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) d^3r$$

si  $\mathbf{\Gamma} \neq \mathbf{0}$ ; le système tourne

cas particulière d'un fil:  $\mathbf{\Gamma} = I \int_C \mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$

d'une spire:  $\mathbf{\Gamma} = IS \mathbf{u}_n \times \mathbf{B}$

# Magnétostatique

- *Énergie magnétostatique totale. Énergie d'interaction et de réciprocité*

## ■ Énergie magnétostatique totale $U_B$

$U_B$  d'une distribution  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  isolée est le travail requis pour créer le  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  et le champ  $\mathbf{B}$  associé.  $U_B$  est minimale pour un système isolé. Déterminer  $U_B$  est donc calculer  $\delta W_{ext}$  pour créer le circuit. On rappelle que la  $\mathbf{F}_{mag}$  ne travaille pas; ce qui reste est la  $\mathbf{F}_e$  qui s'oppose au déplacement de charges.

$$\delta U_B = \delta W_{ext} = -\mathbf{F}_e d\mathbf{r} = \sum (-q_i \mathbf{E}) \cdot \mathbf{v}_i \delta t = -\int dV \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \delta t; \text{ si circuit filiforme } \delta U_B = -I \oint_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} \delta t$$

!Note: tout changement de  $\mathbf{B}$  implique un  $\mathbf{E}$  non nul /  $\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ . Ici  $\mathbf{B}$  change suite à une modification du courant dans le circuit. On obtient :

$$\delta W_{ext} = I \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \delta t; \text{ pour un contour fix : } \delta W_{ext} = I \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \delta t = I \frac{d\Phi_{mag}}{dt} \delta t;$$

On obtient donc:  $\delta U_B = I \cdot \delta \Phi_{mag}$

$$\text{Relation avec } \mathbf{A} (\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} + \text{théorème de Stokes): } \delta U_B = \int dV \mathbf{j} \cdot \delta \mathbf{A}$$

$$\text{La } U_B \text{ totale est donc: } U_B = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) d^3r = \frac{\mu_0}{8\pi} \iint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r d^3r' \text{ (ce dernière en jauge de Coulomb)}$$

$$\text{Dans un circuit: } U_B = \int I \cdot \delta \Phi_{mag} = \frac{1}{2} I \Phi_{mag}$$

# Magnétostatique

À partir des sources:  $U_B = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}) d^3r - \int_S \mathbf{A} \times \mathbf{B} d\mathbf{S} \rightarrow 0$

## ■ Aspect local d' $U_B$

$$U_B = \frac{1}{2\mu_0} \int |\mathbf{B}(\mathbf{r})|^2 d^3r \geq 0$$

Note: on retrouve la densité d'énergie magnétostatique:  $u_B = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r})$

## ■ Énergie d'interaction et de réciprocité

Énergie entre deux distributions de courant telle que  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_2(\mathbf{r})$

$$U_B(\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2) = \underbrace{U_B(\mathbf{j}_1) + U_B(\mathbf{j}_2)}_{\text{E magnétostatique (circuits isolés)}} + \underbrace{V_B(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)}_{\text{E interaction entre distributions}}$$

$$V_B(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{\mathbf{j}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}_2(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r d^3r' = \int dV \mathbf{j}_1(\mathbf{r}) \mathbf{A}_2(\mathbf{r}) = \int dV \mathbf{j}_2(\mathbf{r}) \mathbf{A}_1(\mathbf{r})$$

Identité de Green pour la magnétostatique

Note:  $V_B$  n'est pas l'énergie potentielle  $\widehat{V}_B$  ( $\equiv$  force mécanique reliant les position  $r_i$  des charges/courants dans l'espace)

# Méthodes pour déterminer $\mathbf{B}$ en régime statique

$$(\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \text{ et } \nabla \cdot \mathbf{j} = 0)$$

- **Formule de Biot-Savart**

- Si les sources ou  $d\mathbf{B}$  sont connues et facilement additionnables/intégrables

- **Théorème d'Ampère**

- $\oint \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_C \rightarrow$  Si la  $\oint_C$  faisable + le choix du circuit est facile et contient les symétries

- **Conservation du flux**

- $\Phi_{\text{mag}} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \rightarrow$  À utiliser si  $\Phi_{\text{mag}}$  connu dans une région de l'espace

- **Potentiel scalaire**

- Si volume vide, il existe un  $\phi_{\text{mag}} / \mathbf{B} = -\nabla \phi_{\text{mag}}$  avec  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  et  $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}; \forall V$ , il faut résoudre  $\Delta \phi_{\text{mag}} = 0$  (Eq. Laplace) et raccorder les solutions entre les différents domaines disjoints se basant sur les conditions de passage de  $\mathbf{B}$ .

Pb: conditions de passage de  $\mathbf{B}$  ne sont pas simples

$\phi_{\text{mag}}$  fonction multivaluée

- **Potentiel vecteur**

- Déterminer  $\mathbf{A}$  (ses 3 composantes) dans le référentiel choisi. Ensuite faire  $\nabla \times \mathbf{A}$  pour obtenir  $\mathbf{B}$ .

- **Formule différentielle**

- en champs:  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$  et  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

- en potentiel:  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  et  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

}  $\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \Rightarrow$  Eq. Poisson pour chaque  $A_i$

Rappel: continuité de  $\mathbf{A}$  aux interfaces

## Sommaire

- **Magnétostatique**

- Équations de Maxwell pour la magnétostatique
- Loi de Biot et Savart
- Potentiel vecteur
- Conditions d'interface
- Actions mécaniques: force, moment et trajectoires
- Énergie magnétostatique totale. Énergie d'interaction et de réciprocité
- Méthodes pour déterminer  $\mathbf{B}$

- **Dipôles magnétiques**

- Développement multipolaire
- Dipôle magnétique
- Actions sur le dipôle magnétique

- **Magnétostatique dans les milieux**

- Introduction: magnétisation et courants de magnétisation
- Magnétisation  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  et description microscopique du magnétisme
- Excitation magnétique:  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$
- Classification des matériaux
- Équations de Maxwell en fonction des charges libres
- Forces et précession
- Énergie et théorème de Poynting dans les milieux

# Dipôles Magnétiques

- Développement multipolaire

Analogie à l'étude faite pour  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ; ici nous regardons  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  crée par un circuit ou un  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  de volume réduit quand  $\mathbf{r} \rightarrow \infty$

Nous partons de:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad \text{qui permet l'expansion} \quad \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \cong \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + \dots$$

On obtient:

$$A_k(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \underbrace{\frac{1}{r} \int_V dV' j_k(\mathbf{r}')}_{\text{Terme monopole=0:}} + \underbrace{\frac{\mathbf{r}}{r^3} \int_V dV' j_k(\mathbf{r}') \mathbf{r}'}_{\text{Terme dipolaire}} + \underbrace{\dots}_{\text{Termes d'ordre supérieurs}} \right]$$

$\nabla \mathbf{j} = 0$  ou  $\oint \mathbf{j} d\mathbf{l} = 0$

$$T_{kl} = \frac{1}{2} \epsilon_{ikl} \int dV' (\mathbf{r}' \times \mathbf{j})_i = \epsilon_{kil} \mathbf{m}_i$$

où  $\mathbf{m}_i$  : moment dipolaire magnétique

$\frac{1}{2}(\mathbf{r}' \times \mathbf{j})$  : magnétisation ou densité volumique de  $\mathbf{m}$

# Dipôles Magnétiques

- Dipôle magnétique

À longue distance:  $\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{m} \times \mathbf{u}_r$  (terme dipolaire) sachant que  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

on obtient :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \mathbf{m} \left( \nabla \frac{r}{r^3} \right) - (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3\mathbf{u}_r(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{r^3} + \frac{8\pi}{3} \mathbf{m} \delta(\mathbf{r}) \right]$$

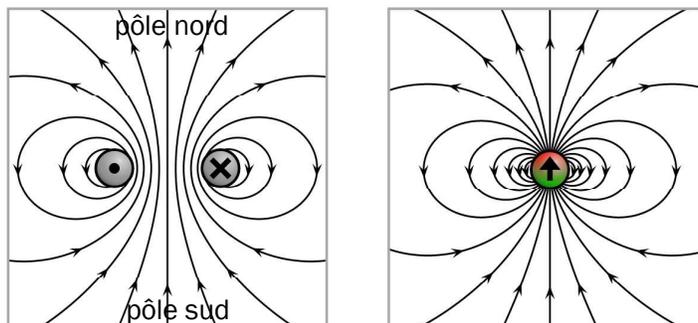
En regime éloignée si  $m \neq 0$

Sans restriction en r, si existe un dipole ponctuel

■ Lignes de champ:

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = 0$$

$$\text{et } d\phi_{mag} = 0$$



Remarque: à  $r \rightarrow \infty$  les lignes de champ de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont identiques

# Dipôles Magnétiques

- *Actions sur le dipôle magnétique*

- **Force sur un dipôle magnétique**

Pour une distribution de courant de taille finie centrée en 0:

- Si **B** est uniforme:

$$\mathbf{F} = \oint_C I d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = I(\oint_C d\mathbf{r}) \times \mathbf{B} = 0$$

Note: même si la **F** est nulle, si le dipôle se déplace/tourne, il  $\exists$  une  $dW_{\text{Laplace}} = I \Phi_{\text{mag}}|_{\text{coupé}}$

- Si **B** est non uniforme (càd  $\mathbf{B}(\mathbf{r}') \simeq \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) + ((\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \cdot \nabla) \mathbf{B}(\mathbf{r}_0)$ ):

$$\mathbf{F}_{\text{dip}} = \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r}') d^3r' = \sum_{k=x,y,z} m_k \nabla \cdot B_k(\mathbf{r}_0)$$

Si **m** est constante  $\Rightarrow \mathbf{F}_{(r)} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$

Si  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$  (pas de sources dans le volume du dipôle)  $\Rightarrow \mathbf{F}_{(r)} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}$

- **Moment d'une force un dipôle magnétique**

$$\Gamma_{\text{dip}}(\mathbf{r}_0) = \int_V \mathbf{r}' \times (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r}')) d^3r' = \mathbf{m} \times \mathbf{B} + \mathbf{r}_0 \times \mathbf{F}_{\text{dip}}$$

- **Énergie potentielle d'un dipôle magnétique**

$$\widehat{V}_B = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \text{ avec } \mathbf{B} \text{ uniforme} \quad (\text{rappel: } V_E = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$$

# Sommaire

- **Magnétostatique**

- *Équations de Maxwell pour la magnétostatique*
- *Loi de Biot et Savart*
- *Potentiel vecteur*
- *Conditions d'interface*
- *Actions mécaniques: force, moment et trajectoires*
- *Énergie magnétostatique totale. Énergie d'interaction et de réciprocité*
- *Méthodes pour déterminer **B***

- **Dipôles magnétiques**

- *Développement multipolaire*
- *Dipôle magnétique*
- *Actions sur le dipôle magnétique*

- **Magnétostatique dans les milieux**

- *Introduction: magnétisation et courants de magnétisation*
- *Magnétisation **M**(**r**) et description microscopique du magnétisme*
- *Excitation magnétique: **H**(**r**)*
- *Classification des matériaux*
- *Équations de Maxwell en fonction des charges libres*
- *Forces et précession*
- *Énergie et théorème de Poynting dans les milieux*

# Magnétostatique dans les milieux

## - Introduction: magnétisation et courants de magnétisation

Quand on soumet un milieu magnétique à un  $\mathbf{B}_{\text{ext}} \neq \mathbf{0}$ , le milieu magnétique génère une réponse  $\mathbf{B}_{\text{propre}}$  ( $\equiv$  un moment magnétique dipolaire,  $\mathbf{m}$ , induit).

Le champ magnétique à l'intérieur du milieu est:

$$\mathbf{B}_{\text{total}} = \mathbf{B}_{\text{ext}} + \mathbf{B}_{\text{propre}}$$

qui sont générés par les courants  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{libre}} + \mathbf{j}_{\text{liée}}$

où  $\mathbf{j}_{\text{libre}}$  correspond à des courants libres générant le  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$  et  $\mathbf{j}_{\text{liée}}$  provient des déplacements autour du point d'équilibre de charges liées du milieu et génèrent le  $\mathbf{B}_{\text{propre}}$ . Ce dernier se présente par exemple dans les isolants magnétiques.

On note que  $\mathbf{j}_{\text{liée}} = \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_M$  avec:

- $\mathbf{j}_P = -\frac{d\mathbf{P}}{dt}$ : densité de courant de polarisation généré par le mvt des particules/charges ( $=\mathbf{0}$  en conditions statiques)
- $\mathbf{j}_M$ : densité de courant de magnétisation (suite à l'émergence d'une magnétisation; càd, alignement des dipôles magnétiques de la matière). Elle existe même dans le cas statique.

Régimes de réponse de la matière: -  $\mathbf{m} \parallel \mathbf{B}_{\text{ext}}$  paramagnétique (si permanente: ferromagnétique)

-  $\mathbf{m} \parallel -\mathbf{B}_{\text{ext}}$  diamagnétique

-  $\mathbf{B}_{\text{total}} = \mathbf{0}$  supraconducteur

Analogie à  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ , le terme magnétisation  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  fait référence à le réarrangement macroscopique des dipôles magnétiques quand la matière est exposée à un champ externe. Elle définit une densité de dipôles magnétiques.

# Magnétostatique dans les milieux

## - Description microscopique du magnétisme

### ■ Modèle de Lorentz

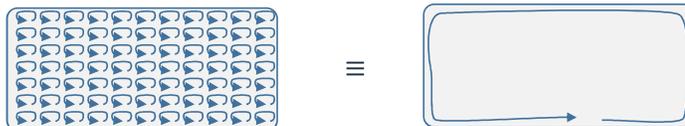
Assume que  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  est décrite par une densité volumique de  $\mathbf{m}$  qui est proportionnelle à  $\sum_{k=1}^N \mathbf{m}_k$  ponctuels

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\Omega} \int_{\Omega} d^3s \mathbf{s} \times \mathbf{j}_{\text{micro}}(\mathbf{r}') = \frac{\mathbf{m}(\mathbf{r})}{\Omega}$$

Exemple:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = M\mathbf{u}_z$$

et  $M = \text{cte}$



### ■ Magnétisme de spin et orbitalaire

#### - Spin: $\mathbf{s}$

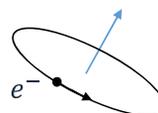


$$\mathbf{M}_{\text{spin}} = \sum_{k=1}^N \mathbf{s}_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)$$

avec un moment cinétique associé:

$$\mathbf{m}_s = g \frac{q}{2m_e} \mathbf{s}$$

#### - Orbitalaire: $\mathbf{m}_L$



$$\mathbf{m}_L = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{j} dV = \int \mathbf{M}_0 dV$$

$$\text{Si } \mathbf{L}_K = \mathbf{r}_K \times m_e \mathbf{v}_K \Rightarrow \mathbf{m}_L = \sum_{K=1}^N \frac{q_K}{2m_e} \mathbf{L}_K$$

# Magnétostatique dans les milieux

## - Magnétisation $\mathbf{M}(\mathbf{r})$

- $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  définit un re-arrangement macroscopique des distributions de courant sous  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ .

Boucle de courant  $\mathbf{j}_i \ll \Omega$ . Unité [A/m]

### - Sources de $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ :

- Moment dipolaire orbital:  $\mathbf{M}_o(\mathbf{r})$
  - Moment de spin:  $\mathbf{M}_s(\mathbf{r})$
- $$\left. \begin{array}{l} \mathbf{M}_o(\mathbf{r}) \\ \mathbf{M}_s(\mathbf{r}) \end{array} \right\} \mathbf{M}(\mathbf{r}) = \mathbf{M}_o(\mathbf{r}) + \mathbf{M}_s(\mathbf{r})$$

### - Description à partir des courants de $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ :

- En volume:  $\mathbf{j}_M(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r})$
- En surface:  $\mathbf{K}_M(\mathbf{r}_s) = \mathbf{M}(\mathbf{r}_s) \times \mathbf{n}(\mathbf{r}_s)$

Ceci mène à établir l'équivalence:

! Remarque: si  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  est uniforme,  
 $\mathbf{j}_M(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{K}_M(\mathbf{r}_s) \neq \mathbf{0}$

- $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  est une densité du moment dipolaire magnétique

$$d\mathbf{m} = \mathbf{M}(\mathbf{r})dV \quad \text{avec} \quad \mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{j}_M) dV + \frac{1}{2} \int_S (\mathbf{r} \times \mathbf{K}_M) dS \quad [\text{A m}^2]$$

- $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  n'est pas unique ( $\mathbf{M}(\mathbf{r}) + \nabla \Lambda$  donne le même  $\mathbf{j}_M$ . La définition de jauge affecte uniquement à  $\mathbf{M}_o(\mathbf{r})$ .)

- A potentiel vecteur produit par  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ :

$$- \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) dV'$$

# Magnétostatique dans les milieux

## - Excitation magnétique $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ :

- Def. d'excitation magnétique:

En magnétostatique:  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  et  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\underbrace{\mathbf{j}_{\text{libre}}}_{\mathbf{j}_{\text{lié}}} + \nabla \times \mathbf{M})$

On obtient :  $\nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{j}_{\text{libre}}$  avec  $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$  et  $\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$

Note: si  $\nabla \cdot \mathbf{H} \neq 0$  il existe un  $\rho_{\text{mag}}^*$

- Conditions aux limites:

$$\mathbf{n}_{1 \rightarrow 2} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}_{\text{libre}}$$

$$\mathbf{n}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) \cdot \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \text{ou} \quad \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$$

- Relations constitutives:

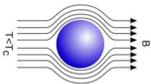
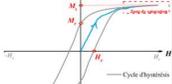
Relient  $\mathbf{H}$  à  $\mathbf{M}$  /  $\mathbf{M}(\omega) = [\chi_{ij}(\omega, \omega_1)] \mathbf{H}(\omega_1) + [\chi_{ijk}^2] H(\omega_1) * H(\omega_2) + \dots$

Dans le cas d'un milieu simple (linéaire, homogène et isotrope): la susceptibilité magnétique  $\chi_{\text{mag}}$  est seulement non nulle pour  $n=1$  et de plus, elle est constante  $\Rightarrow \mathbf{M} = \chi_{\text{mag}} \mathbf{H}$

avec  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} = \mu_0 (1 + \chi_{\text{Mag}}) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$  où  $\mu_r$  est la perméabilité magnétique relative

# Magnétostatique dans les milieux

## - Classification des matériaux magnétiques

	Diamagnétique	Paramagnétique	Ferromagnétique
Aimantation	Induite; $\mathbf{M}(\mathbf{r}) \neq \mathbf{0}$ seulement en présence d'un $\mathbf{B}_{ext}$		Spontanée; $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ reste même si $\mathbf{B}_{ext}$ est ramené à 0. 1 <sup>er</sup> courbe d'aimantation.
Origine	Mvt orbital autour du noyau sous $\mathbf{B}_{ext}$ .	Spin $\rightarrow \mathbf{m}_i$ . Moment magnétique intrinsèque sans interaction entre eux.	$\mathbf{m}_i$ +interactions $\exists$ domaines+parois
Réponse+direction de $\mathbf{M}$	Réponse linéaire. $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ s'aligner avec le champ $\mathbf{B}_{ext}$ ; sens opposé.	Réponse linéaire à $T _{fixe}$ . $\mathbf{m}_i$ s'alignent; même sens que $\mathbf{B}_{ext}$ . Minimisation U.	Réponse non -linéaire: cycles d'hystérésis.
$\chi_{mag}$	$\chi_{mag} < 0$ $10^{-4} - 10^{-9}$ Solide - gas	$\mathbf{M} = n\mathbf{m} = \chi_{mag} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$ $n$ : densité dipôles	$\chi_{mag} > 0$ $10^{-4}$ peut attendre $10^4$
Éléments table périod.	à droite	à gauche	milieu
Lignes de champ			! guide/attrape les lignes de champ proches
Autres	Supraconducteurs $\chi_{mag} = -1$ (diamagnétique parfait) 	Langevin 	Cycles d'hystérésis : $T < T_c$ 

# Magnétostatique dans les milieux

## - Équations de Maxwell en fonction dans les milieux

- $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
- $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{libre}$
- $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
- $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{libre} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

En fonction des charges libres

- $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{libre} + \nabla \times \mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$

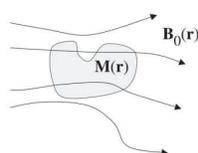
- $\rho = \rho_{libre} + \rho_{liée}$  avec  $\rho_{liée} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$

- $\nabla \cdot \mathbf{j}_{libre} + \frac{\partial \rho_{libre}}{\partial t} = 0$  et  $\nabla \cdot \mathbf{j}_{liée} + \frac{\partial \rho_{liée}}{\partial t} = 0$

# Magnétostatique dans les milieux

- Forces et précession

## ■ Force sur un milieu magnétique/aimant



volume V de magnétisation  $M(r)$  (induite ou spontanée)

2 méthodes pour calculer  $F$ :

- Évaluation  $F_{\text{Lorentz}}$  :  $\mathbf{j}_{\text{libre}}, \mathbf{j}_M, \mathbf{K}_M$

- Évaluation de  $\mathbf{M}(r)$  comme collection des  $\mathbf{m}_i$  dipolaire ponctuel

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{j}_{\text{libre}} \times \mathbf{B}_0 d^3r + \int_V (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 d^3r = \int_V \mathbf{j}_{\text{libre}} \times \mathbf{B}_0 dV + \int_V \boldsymbol{\rho}^* \mathbf{B}_0 dV + \int_S \boldsymbol{\sigma}^* \mathbf{B}_0 dS$$

## ■ Précession de Larmor

Torque sur le moment magnétique :  $\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \gamma \mathbf{m} \times \mathbf{B}$

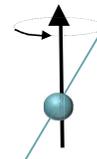
tel que  $|m|$  et  $m_z$  ( $m \parallel B$ ) sont constantes et

$\gamma$  (rapport gyromagnétique) est le rapport entre le moment magnétique

et le moment cinétique d'une particule. Ex:  $\mathbf{s}, \mathbf{m}_s$

Précession:  $\mathbf{m}$  tourne autour de l'axe de  $\mathbf{B}$  à vitesse constante

$\Rightarrow$  Fréquence:  $\Omega_L = \gamma B$  (fréquence de Larmor)



Applications: RMN, IRM

# Magnétostatique dans les milieux

- Énergie et théorème de Poynting dans les milieux

! Toute variation d'énergie est liée à la  $\mathbf{F}_{\text{Coulomb}}$ , car  $\mathbf{B}$  ne travaille pas. L'énergie EM est donc:

$$\delta W = \int dV \mathbf{j}_{\text{totale}} \cdot \mathbf{E} \delta t$$

dont les densités de  $\delta W$

- Champs (E, B) dans le vide :  $\delta W = d\left(\frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}\right)$

- Polarisation :  $\delta W = d\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}$

- Magnétisation:

il faut considérer l'énergie stockée dans le matériau suite à l'émergence des courants de magnétisation  $\mathbf{j}_M$ . Le travail fourni par le champ électrique pour augmenter l'énergie volumique interne de la matière par unité de temps est :

$$\delta u_{\text{mag}} = \mathbf{j}_M \cdot \mathbf{E} \delta t = (\nabla \times \mathbf{M}) \cdot \mathbf{E} \delta t = \dots = -\mathbf{M} d\mathbf{B}$$

Le changement élémentaire de la densité d'énergie associé au champ magnétique est  $u_B$ :

$$du_B = du_{B_{\text{champ}}} + du_{\text{mag}} = \frac{\mathbf{B} d\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} d\mathbf{B} = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$$

On obtient pour des milieux magnétiques simples :  $u_B = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$

# Magnétostatique dans les milieux

La variation totale est :

$$\delta W_{totale} = dU_{totale} = d(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{E} + \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{B} = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$$

Et la densité d'énergie pour les milieux simples est:

$$u_{EM} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$$

## ▪ Théorème de Poynting (milieux)

Pour déterminer le théorème de Poynting, on fait:

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{libre} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t})$$

plus on utilise:  $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$

Cela résulte:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{j}_{libre} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -du_{EM}$$

On définit le vecteur de Poynting dans les milieux:  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$

# Résumé des contenues à retenir

## Magnétostatique

Équations de Maxwell pour la magnétostatique. Savoir écrire et appliquer la loi de Biot et Savart. Connaître le potentiel vecteur et ses conditions de continuité. Notion de potentiel scalaire. Flux magnétique et sa relation avec  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ . Savoir écrire la force subie par une distribution de courant. Connaître la force et le couple exercé sur un dipôle. Énergie magnétostatique. Méthodes pour déterminer  $\mathbf{B}$  (Formule de Biot-Savart, Théorème d'Ampère, conservation du flux...)

## Dipôles magnétiques

Multipôles magnétiques : développement multipolaire, moment magnétique, champ  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  créé par un dipôle, moment dipolaire d'un circuit planaire

## Magnétostatique dans les milieux

Savoir définir l'aimantation  $\mathbf{M}$  d'un milieu, son lien avec les courants liés volumique et surfacique. Connaître le lien de  $\mathbf{M}$  avec le moment dipolaire total d'un milieu. Savoir définir les courants libres et liés. Définir et écrire le champ  $\mathbf{H}$  en fonction de  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{M}$ . Écrire l'équation vérifiée par le champ  $\nabla \times \mathbf{H}$ . Conditions aux limites pour  $\mathbf{H}$ . Les relations constitutives. Définir  $\chi_m$ . Savoir décrire un milieu homogène, linéaire, isotrope. Savoir définir le diamagnétisme, paramagnétisme et le ferromagnétisme. Avoir des notions sur leurs origines respectifs. Connaître les ordres de grandeurs de leurs  $\chi_m$  respectifs, quand il existe. Dans le cas du ferromagnétisme, connaître le cycle d'hystérésis, définir l'aimantation rémanente, l'aimantation de saturation et champ coercitif. Écrire les équations de Maxwell en fonction des seuls charges et courants libres. Connaître le théorème de Poynting dans le cas d'un milieu linéaire non dispersif.