

## Chapitre 2

# ÉLECTROSTATIQUE (VIDE ET MILIEUX)

Alexandra Palacio Morales  
alexandra.palacio-morales@universite-paris-saclay.fr

2024-2025

## Sommaire

- **Electrostatique**
- **Loi de Coulomb et potentiel scalaire**
  - La loi de Coulomb
  - Conditions de continuité pour le potentiel  $V$
  - Équation de Poisson
  - Énergie potentielle électrostatique, totale
- **Outils de calcul**
- **Dipôles et multipôles électriques**
  - Développement multipolaire
  - Dipôles
  - Actions sur le terme dipolaire électrique : force, moment, énergie
- **Conducteurs en équilibre électrostatique**
  - Définition d'un conducteur
  - Théorème de Coulomb
  - Champ au voisinage d'un conducteur et pression électrostatique
  - Effet de pointe
- **Milieux diélectriques**
  - Polarisation  $\mathbf{P}$  : macroscopique et microscopique
  - Champ  $\mathbf{D}$
  - Conditions aux limites
  - Relations constitutives
  - Énergie dans les milieux

# Sommaire

- **Electrostatique**
- **Loi de Coulomb et potentiel scalaire**
  - La loi de Coulomb
  - Conditions de continuité pour le potentiel  $V$
  - Équation de Poisson
  - Énergie potentielle électrostatique, totale
- **Outils de calcul**
- **Dipôles et multipôles électriques**
  - Développement multipolaire
  - Dipôles
  - Actions sur le terme dipolaire électrique : force, moment, énergie
- **Conducteurs en équilibre électrostatique**
  - Définition d'un conducteur
  - Théorème de Coulomb
  - Champ au voisinage d'un conducteur et pression électrostatique
  - Effet de pointe
- **Milieux diélectriques**
  - Polarisation  $\mathbf{P}$  : macroscopique et microscopique
  - Champ  $\mathbf{D}$
  - Conditions aux limites
  - Relations constitutives
  - Énergie dans les milieux

# Électrostatique

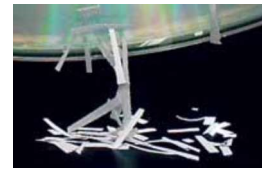
- Étude du champ électrique  $\mathbf{E}$  dans les conditions de:
  - vide
  - charges immobiles  $\mathbf{j} = \mathbf{0}$

Les équations de Maxwell deviennent:

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

Quelques phénomènes couverts par l'électrostatique:

- l'électricité statique ;
- certaines technologies de photocopieurs ;
- la foudre...
- Microscopie électronique à balayage : canon à électrons, lentilles électrostatiques pour la mise en forme du faisceau
- Accélérateurs de particules



L'équation fondamentale de l'électrostatique est la loi de Coulomb, qui décrit la force d'interaction entre deux charges ponctuelles.

# Sommaire

- Electrostatique
- Loi de Coulomb et potentiel scalaire
  - La loi de Coulomb
  - Conditions de continuité pour le potentiel V
  - Équation de Poisson
  - Énergie potentielle électrostatique, totale
- Outils de calcul
- Dipôles et multipôles électriques
  - Développement multipolaire
  - Dipôles
  - Actions sur le terme dipolaire électrique : force, moment, énergie
- Conducteurs en équilibre électrostatique
  - Définition d'un conducteur
  - Théorème de Coulomb
  - Champ au voisinage d'un conducteur et pression électrostatique
  - Effet de pointe
- Milieux diélectriques
  - Polarisation  $\mathbf{P}$  : macroscopique et microscopique
  - Champ  $\mathbf{D}$
  - Conditions aux limites
  - Relations constitutives
  - Énergie dans les milieux

## Loi de Coulomb et potentiel scalaire

- *La loi de Coulomb*
  - décrit l'interaction entre 2 charges ( $q_A, q_B$ ) situées en A et B dans l'espace
  - La force de A en B est :

$$\mathbf{F}_{A \rightarrow B} = \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A}{\|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A\|^3} = \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{u}_{A \rightarrow B}}{\|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A\|^2}$$

Remarques:

- $\mathbf{F}_{A \rightarrow B} = -\mathbf{F}_{B \rightarrow A}$
- $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k$  est du au choix du système en SI
- loi en  $\frac{1}{r^2}$
- Principe de superposition:  $\mathbf{F}_0 = \sum_i \frac{q_0 q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{u}_{i \rightarrow 0}}{\|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i\|^2}$

- Le champ électrique créé par  $q_A$  (A) est donc:

$$\mathbf{E}_A = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_A}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_A\|^3} \quad \text{unité: V/m}$$

d'où l'expression de la force exercée sur  $q_B$  au point B:  $\mathbf{F}_{A \rightarrow B} = q_B \mathbf{E}_A$

Du fait du Pp. superposition (pour des distributions continues),  $\mathbf{E}$  se généralise à:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} d^3\mathbf{r}'$$

# Loi de Coulomb et potentiel scalaire

- La loi de Coulomb (dans le cas de distributions)

# Loi de Coulomb et potentiel scalaire

- La loi de Coulomb par le théorème d'Helmholtz:

À partir des éq. de Maxwell  $\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  et  $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$  introduites dans le théorème d'Helmholtz

Rappel: Tout champ vectoriel,  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ , à dérivées continues et défini sur  $\mathbb{R}^3$  et décroissant à l'infini plus vite que  $1/r$  peut toujours se décomposer comme la somme d'un champ rotationnel,  $\mathbf{F}_\perp$ , et d'un champ irrotationnel,  $\mathbf{F}_\parallel$ .

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\perp + \mathbf{F}_\parallel$$

où  $\mathbf{F}_\parallel = -\nabla V(\mathbf{r})$  est un champ de gradient avec  $\nabla \times \mathbf{F}_\parallel = \mathbf{0}$   
et  $\mathbf{F}_\perp = \nabla \times \mathbf{A}$  est un champ de rotation avec  $\nabla \cdot \mathbf{F}_\perp = 0$ .

On obtient :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) = -\nabla_r \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla_{r'} E(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3 r' = -\int_{\mathbb{R}^3} \nabla_r \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3 r'$$

Alors

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d^3 r' \quad \text{et} \quad V(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\nabla_{r'} E(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3 r' = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3 r'$$

Nous remarquons que l'intégrale de  $V(\mathbf{r})$  est une convolution  $V(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}) * -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$  où  $G(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}|}$  est appelée fonction de Green de l'équation de Laplace (ou de l'opérateur  $\Delta$ ).

Notons:  $\nabla_r \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$

# Loi de Coulomb et potentiel scalaire

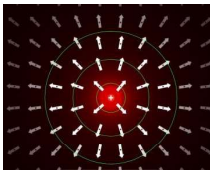
## ■ Conservation de la force de Coulomb

- $E$  est un champ à circulation conservative  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \equiv \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$
- Le travail effectué par la force de Coulomb quand une charge ponctuelle se déplace de  $\mathbf{r}_1$  à  $\mathbf{r}_2$  ne dépend que des potentiels en ces points et pas du chemin effectivement suivi

$$W_E(\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} q(-\nabla V) \cdot d\mathbf{l} = -q(V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1))$$

## ■ Equipotentielles et lignes de champ

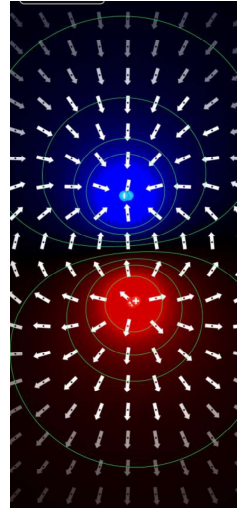
- Equipotentielle: - surface où  $V(\mathbf{r}) = \text{cte}$  en tout point de la surface.  
- Tout déplacement sur une équipotentielle  $\Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r})d\mathbf{l} = \text{cte}$  et  $\Delta W = 0$
- Lignes de champ  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ : - sont tangentes à la surface;



- orientées vers  $V(\mathbf{r}) \searrow$
- se rapprochent si  $\Delta E \nearrow$
- croisement des lignes interdit, car  $\mathbf{E}$  a une direction unique en chaque point de l'espace ( exception:  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ , convergence/divergence sur une  $q$ )

- $V(\mathbf{r}) \perp \mathbf{E}(\mathbf{r})$  en tout point de la surface

Site pour se familiariser si besoin avec ces concepts (calculs de champs et équipotentielles) : [https://phet.colorado.edu/sims/html/charges-and-fields/latest/charges-and-fields\\_all.html](https://phet.colorado.edu/sims/html/charges-and-fields/latest/charges-and-fields_all.html)



# Loi de Coulomb et potentiel scalaire

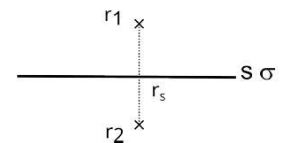
- Conditions de continuité pour le potentiel  $V$

Au passage d'une interface éventuellement chargée  $V$  est continue

$$\frac{\partial V_2}{\partial n_{1 \rightarrow 2}} - \frac{\partial V_1}{\partial n_{1 \rightarrow 2}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

En effet, soient deux points  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  de part et d'autre de l'interface et infiniment proche d'un point  $\mathbf{r}_s$  de l'interface. On a

$$V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \nabla V \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$



Quand  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  tendent vers  $\mathbf{r}_s$ , l'intégrale de droite tend vers zéro, car on sait que  $\mathbf{E}$  est au plus discontinu sur une interface et ne diverge donc pas. On a donc  $V(\mathbf{r}_1) = V(\mathbf{r}_2)$  donc  $V$  est continu.

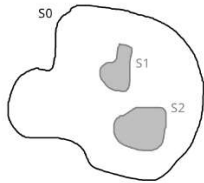
On sait que  $n_{1 \rightarrow 2} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  d'où, en notant  $\frac{\partial}{\partial n_{1 \rightarrow 2}} \equiv n_{1 \rightarrow 2} \cdot \nabla$ , la relation sur la dérivée normale de  $V$ .

# Loi de Coulomb et potentiel scalaire

## - Équation de Poisson

En combinant l'équation de M-G,  $\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  avec la définition du potentiel  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$ , on obtient l'équation de **Poisson**:  $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  dans une région de densité de charge nulle :  $\Delta V = 0$  (Eq. Laplace)

■ L'équation de Poisson : - est complètement déterminée par la donnée de conditions aux limites pour  $V$ .



- est linéaire et permet le Pp. de superposition

- a une solution unique dès que la distribution de charge  $\rho(\mathbf{r})$  est connue

- si le potentiel  $V$  est connu sur les surfaces extérieures ( $S_0$ ) et intérieures ( $S_1$  et  $S_2$ ) du problème. On parle dans ce cas de condition de *Dirichlet*.

- si la composante normale à la surface du gradient du potentiel est spécifié sur les surfaces. On parle de condition de *Neumann*

- Ces conditions sont mutuellement *exclusives*.

■ La forme intégrale donnant  $V$  et le problème aux limites sont liés et donnent le même résultats.

- La formulation intégrale est en général plus adaptée à des problèmes où  $\rho$  est spécifié une bonne fois pour toute

- Le problème aux limites est en général adaptée aux cas où  $\rho$  ne peut pas être spécifié initialement, par exemple pour une charge placée en face d'un conducteur.

■ Parmi les méthodes de résolution les plus courantes :

- la séparation de variables (voir TD 3); - la méthode des images (voir TD 4)

# Loi de Coulomb et potentiel scalaire

## - Énergie potentielle électrostatique $U$

Analogie à la relation force/potentiel en mécanique classique :  $\mathbf{F} = -\nabla U$ ,

en Electrostatique on a:  $\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -q\nabla V$ ; on en déduit que l'énergie potentielle électrostatique de la charge  $q$  soumise au potentiel  $V$  est  $U = qV$ , soit en généralisant à une distribution continue :

$$U = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_2(\mathbf{r}) V_1(\mathbf{r}) d^3r$$

où  $\rho_2$  est une distribution de charge soumise au potentiel électrostatique  $V_1$ .

- **La relation de réciprocité de Green:**

$$\int \rho_2 V_1(\mathbf{r}) dV = \int \rho_1 V_2(\mathbf{r}) dV$$

L'énergie potentielle  $U$  de  $\rho_2$  dans  $V_1$  est égale à l'énergie potentielle de  $\rho_1$  créée par  $V_2$

Remarque: l'énergie potentielle  $U$  qui a une charge en présence d'un champ est différente de l'énergie électrostatique totale  $U_E$

( $U_E$  : travail en régime quasi-statique/réversible thermodynamiquement pour amener les charges de l'infinie à la distribution ( $q_i, M_i$ ) dans un espace avec  $\mathbf{E}=0$ )

# Loi de Coulomb et potentiel scalaire

## - Énergie électrostatique totale $U_E$

énergie due aux interactions de toutes les charges et est définie comme le travail nécessaire pour assembler une distribution de charges initialement toutes situées à l'infini

- Aucun travail n'est nécessaire pour placer la première charge, car  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$
- Si  $V_1$  est le potentiel créé par la première charge, le travail fourni par l'opérateur est l'opposé du travail de la force électrostatique :  $W_{12} = q_2(V_1(\mathbf{r}_2) - V_1(\infty)) = q_2V_1(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|}$
- La troisième charge  $q_3$  va interagir avec  $q_1$  et  $q_2$ . Il faudra fournir un travail  $W_{13} + W_{23}$ .

$$\text{Le } W_{\text{total}} = W_{12} + W_{13} + W_{23}$$

... Pour N charges sachant que  $W_{ij} = W_{ji}$ , on a :

$$U_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \sum_{i>j}^N \frac{q_i q_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|}$$

$$U_E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i(\mathbf{r}_i)$$

# Loi de Coulomb et potentiel scalaire

## ▪ Généralisation à une distribution des charges

Transformons  $dq = \rho dV$  avec  $\rho(\mathbf{r}) = \lambda \rho'(\mathbf{r})$  et  $V(\mathbf{r}) = \lambda V'(\mathbf{r})$

On a  $d\mathbf{F}(\mathbf{r}) = dq\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla[dqV(\mathbf{r})]$

On obtient donc

$$\delta^2 W = \lambda V'(\mathbf{r}) d^2 q = \lambda d\lambda V'(\mathbf{r}) \rho'(\mathbf{r}) dV$$

$$U_E = \int_0^1 \lambda d\lambda \int_V V(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{2} \int_V V(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int_V dV \int_{V'} dV' \frac{\rho(\mathbf{r}) \rho'(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}$$

## ▪ Aspect local d' $U_E$

$$U_E = \frac{1}{2} \int_V dV V(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) =$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int_V dV (\nabla \cdot \mathbf{E}) V(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V dV [(\nabla \cdot (V\mathbf{E})) + |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2] = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V dV |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 > 0$$

et pas de référence aux sources de E

Note: on retrouve la densité d'énergie électrostatique:  $u_E = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2(\mathbf{r})$

# Sommaire

- **Electrostatique**
- **Loi de Coulomb et potentiel scalaire**
  - La loi de Coulomb
  - Conditions de continuité pour le potentiel  $V$
  - Équation de Poisson
  - Énergie potentielle électrostatique, totale
- **Outils de calcul**
- **Dipôles et multipôles électriques**
  - Développement multipolaire
  - Dipôles
  - Actions sur le terme dipolaire électrique : force, moment, énergie
- **Conducteurs en équilibre électrostatique**
  - Définition d'un conducteur
  - Théorème de Coulomb
  - Champ au voisinage d'un conducteur et pression électrostatique
  - Effet de pointe
- **Milieux diélectriques**
  - Polarisation  $\mathbf{P}$  : macroscopique et microscopique
  - Champ  $\mathbf{D}$
  - Conditions aux limites
  - Relations constitutives
  - Énergie dans les milieux

# Outils des calcul

En général, il existe deux types de problèmes:

- 1) Soit  $\rho(\mathbf{r})$  est connue  $\Rightarrow$  intégration du  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  ou  $V(\mathbf{r})$ , mais problématique pour conducteurs/diélectrique en présence de charges et  $\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r})$
- 2) Soit  $\rho(\mathbf{r})$  n'est pas indiquée initialement

Méthodes:

a) **Connu  $\rho(\mathbf{r})$**

i) Formulation différentielle en champ :  $\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  ou  $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$

ii) Formulation différentielle en potentiel:  $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$  puis  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$

iii) Formulation intégrée en champ:  $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$  ou  $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$

iv) Calcul directe par intégrale vectorielle:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d^3r'$

v) Calcul indirecte à l'aide de  $V(\mathbf{r})$ :  $V(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r'$ , puis  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$

b) **À partir des équations de Laplace et Poisson**

c) **Méthodes liées à une modélisation particulière**

i) Méthode des images (TD4)

ii) Méthode de séparation des variables (TD3)

d) **Méthodes variationnelles**

e) **Méthodes numériques**



# Sommaire

- **Electrostatique**
- **Loi de Coulomb et potentiel scalaire**
  - La loi de Coulomb
  - Conditions de continuité pour le potentiel  $V$
  - Équation de Poisson
  - Énergie potentielle électrostatique, totale
- **Outils de calcul**
- **Dipôles et multipôles électriques**
  - Développement multipolaire
  - Dipôles
  - Actions sur le terme dipolaire électrique : force, moment, énergie
- **Conducteurs en équilibre électrostatique**
  - Définition d'un conducteur
  - Théorème de Coulomb
  - Champ au voisinage d'un conducteur et pression électrostatique
  - Effet de pointe
- **Milieux diélectriques**
  - Polarisation  $\mathbf{P}$  : macroscopique et microscopique
  - Champ  $\mathbf{D}$
  - Conditions aux limites
  - Relations constitutives
  - Énergie dans les milieux

## Dipôles et multipôles électriques

- *Développement multipolaire*

*Solution:*

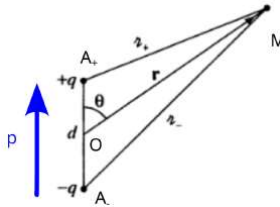
$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_r}{r^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{Q}}{r^3}$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \left[ \sum_{i=1}^N q_i r_i^l P_l(\cos\theta_i) \right]$$

# Dipôles et multipôles électriques

## - Dipôle électrique

- Il est constitué de deux particules de charge  $-q$  et  $+q$  (*charge total = 0*) placées respectivement en deux points rapprochés  $A^-$  et  $A^+$  tel que la distance  $A^-A^+$  est très inférieure aux distances  $A^-M$  et  $A^+M$  où  $M$  est un point où l'on cherche à calculer le champ.



$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= q \overrightarrow{A^-A^+}, \text{ unité [C}\cdot\text{m]} \text{ est appelé le } \textit{moment dipolaire électrique} \text{ du dipôle} \\ &= qOA^+ - qOA^- \\ &= qd \mathbf{u}_z \end{aligned}$$

Note: Pour un atome  $A^-A^+ \sim 10^{-10}$  m et  $q=1,6 \cdot 10^{-19}$  C, nous utilisons le Debye (1 debye =  $0,33 \cdot 10^{-29}$  C.m)

- Le potentiel d'un dipôle:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{A^+M} - \frac{q}{A^-M} \right]$$

À grande distance du dipôle, c'est à dire pour  $r \gg d$ , nous avons  $\frac{1}{A^+M} \simeq \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{d}{r} \cos \theta \right)$  et  $\frac{1}{A^-M} \simeq \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{d}{r} \cos \theta \right)$ , alors en coordonnées sphériques:

$$V = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

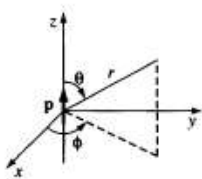
# Dipôles et multipôles électriques

- On peut montrer avec des formules d'analyse vectorielle indépendant du système de coordonnées que pour  $r \gg d$ ,

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{p})\mathbf{u}_r - \mathbf{p}}{r^3}$$

Remarque: Le potentiel créé par un dipôle décroît en  $r^{-2}$  et le champ électrique en  $r^{-3}$  soit plus rapidement que pour une charge unique.

- Un calcul plus simple existe si on utilise la symétrie sphérique du problème (si  $\mathbf{p}$  est aligné avec l'axe z)

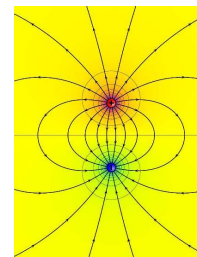
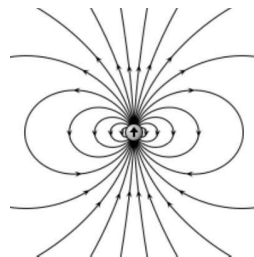


- $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = pr \cos \theta$  indépendant de  $\phi$
- $\nabla V = \frac{\partial v}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + 0$  en coordonnées sphériques

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{u}_r + \sin \theta \mathbf{u}_\theta)$$

- Lignes de champ:

Champ créé par un « pur » dipôle, c'est à dire loin des charges



Lignes de champ créées par un dipôle physique

# Dipôles et multipôles électriques

- Action sur le terme dipolaire électrique : force, moment, énergie

## ■ Force agissant sur un dipôle

Force exercée par un champ  $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$ , lentement variable en fonction de la position, sur un dipôle placé en  $\mathbf{r}$ .

Le champ en  $\mathbf{r}'$  est bien approximé par son développement de Taylor au premier ordre :  $\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + ((\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{E}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}}$

On obtient:  $\mathbf{F}_{dipôle}(\mathbf{r}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r})$  où  $\mathbf{F}_{dipôle}(\mathbf{r}) \neq 0$  seulement si  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \neq 0$

Si  $\mathbf{p}$  ne dépend pas du  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , on a:  $\mathbf{F}_{dipôle}(\mathbf{r}) = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}))$ ; càd pas valide si  $\mathbf{p}$  induit par  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$

## ■ Moment exercé sur un dipôle

Moment exercé par un champ  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  sur un dipôle placé en  $\mathbf{r}$  est donné par :

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{dipôle}(\mathbf{r})$$

$\mathbf{p} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})$ : tends à aligner  $\mathbf{p}$  sur  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  même si celui-ci est cte. Si  $\mathbf{F}_{dipôle}(\mathbf{r}) \neq 0$ , le 2<sup>ème</sup> terme représente le moment de la force par rapport au point origine du vecteur  $\mathbf{r}$

## ■ Énergie potentielle d'un dipôle dans un champ

Travail pour amener un dipôle rigide ( $\mathbf{p}$  indépendant de  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ) de  $\mathbf{r} \rightarrow \infty$  à  $\mathbf{r}_{finale}$ . Travail des forces dû au  $\mathbf{E}_{extérieur}$  au dipôle.

$$U_E = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

!Note: on retrouve bien  $\mathbf{F}_{dipôle}(\mathbf{r}) = -\nabla U_E = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$

# Sommaire

- Electrostatique
- Loi de Coulomb et potentiel scalaire
  - La loi de Coulomb
  - Conditions de continuité pour le potentiel V
  - Équation de Poisson
  - Énergie potentielle électrostatique, totale
- Outils de calcul
- Dipôles et multipôles électriques
  - Développement multipolaire
  - Dipôles
  - Actions sur le terme dipolaire électrique : force, moment, énergie
- Conducteurs en équilibre électrostatique
  - Définition d'un conducteur
  - Théorème de Coulomb
  - Champ au voisinage d'un conducteur et pression électrostatique
  - Effet de pointe
- Milieux diélectriques
  - Polarisation  $\mathbf{P}$  : macroscopique et microscopique
  - Champ  $\mathbf{D}$
  - Conditions aux limites
  - Relations constitutives
  - Énergie dans les milieux

# Conducteurs en équilibre électrostatique

- Conducteur en équilibre électrostatique:

▪ Conducteur parfait

▪  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  obéit la loi d'Ohm:  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}$  avec  $\sigma$  conductivité en  $S.m^{-1}$

▪ Équilibre électrostatique :  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$  ; pas de mouvement de charges dans les conducteur

⇒ à l'intérieur:

$$\mathbf{E}_{int} = \mathbf{0}$$

$$\rho_{int} = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \text{ et } V = cte$$

⇒ à la surface:

la surface du conducteur es une equipotentielle où  $\mathbf{E} \perp$  surface.

$$\mathbf{E}_{surface} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_n$$

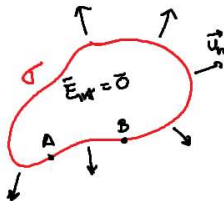
la surface peut presenter une  $\sigma(r, \theta, \phi)$

⇒  $E$  est discontinue:

$$D_{ext} - D_{int} = \sigma \mathbf{u}_n$$

$$\epsilon_0 \mathbf{E}_{ext} - \mathbf{0} = \sigma \mathbf{u}_n$$

$$\mathbf{E}_{T,int} = \mathbf{E}_{T,ext}$$



# Conducteurs en équilibre électrostatique

- Théorème de Coulomb / Influence électrostatique

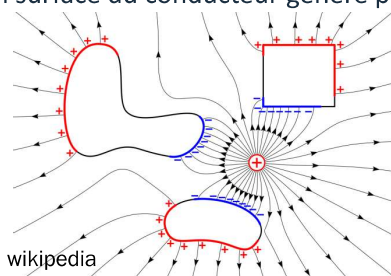
Supposons un conducteur à l'équilibre :  $Q=0$ ,  $\mathbf{E}_{int} = \mathbf{0}$  et  $V_{int} = cte$

En presence d'un  $\mathbf{E}_{ext}$ , les charges en surface se déplacent pour annuler l' $\mathbf{E}_{ext}$  et génèrent un  $\sigma(r, \theta, \phi)$  à la surface telle que:

▪  $Q_{totale} = 0$

▪  $\mathbf{E}_{int} = \mathbf{0} = \mathbf{E}_{propre} + \mathbf{E}_{ext}$  alors  $\mathbf{E}_{propre} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \sigma_s(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dS = -\mathbf{E}_{ext}$

avec  $\mathbf{E}_{propre}$  le champ en surface du conducteur généré par la distribution  $\sigma(r, \theta, \phi)$



À très grande distance,  
 $\mathbf{E}_{propre} = \mathbf{E}_{dipôle}$  avec  
 $\mathbf{p} = \int dS \mathbf{r} \sigma(\mathbf{r})$

▪ Écrantage:

Si existe une cavité dans le conducteur  $\mathbf{E}_{int} = \mathbf{E}_{cavité} = \mathbf{0}$

# Conducteurs en équilibre électrostatique

- Champ au voisinage d'un conducteur et pression électrostatique

## ■ Plan uniformément chargé

$$E(z > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_z \quad \text{et} \quad E(z < 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_z$$

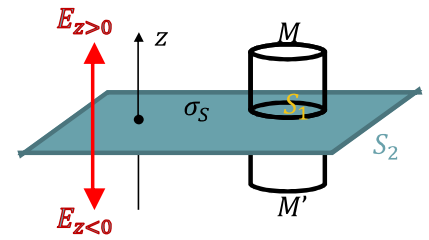
## ■ E au voisinage d'un conducteur

$$E(M) = E_1(M) + E_2(M) = \frac{\sigma_S}{\epsilon_0} \mathbf{u}_z$$

$$E(M') = E_1(M') + E_2(M') = 0 : \text{intérieur conducteur}$$

## ■ Pression électrostatique

$$P_{\text{électrostatique}} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$



Le  $Q_{\text{total}} \neq 0$ ;  $\rho_{\text{int}} = 0$  et  $\sigma_S \neq 0$

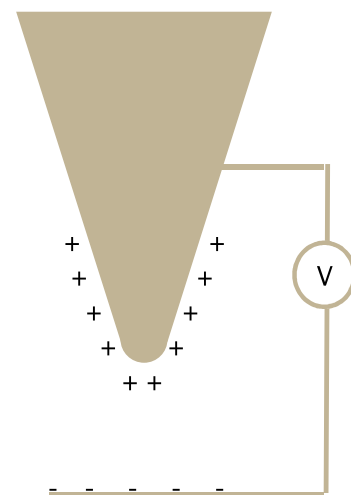
# Conducteurs en équilibre électrostatique

- Effet de pointe

Dans une sphere chargée à la surface:

$$\mathbf{E}(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{u}_r = \frac{V}{R} \mathbf{u}_r$$

On observe que si  $R \rightarrow 0$  : le champ  $\mathbf{E}$  diverge et  $\sigma \nearrow$   
(accumulation des charges)



**Note:** Arc électrique dans un diélectrique  $\Rightarrow \mathbf{E}$  dépasse le champ disruptif du diélectrique (càd valeur maximale d' $\mathbf{E}$  avant ionisation du milieu)

# Sommaire

- Electrostatique
- Loi de Coulomb et potentiel scalaire
  - La loi de Coulomb
  - Conditions de continuité pour le potentiel  $V$
  - Équation de Poisson
  - Énergie potentielle électrostatique, totale
- Outils de calcul
- Dipôles et multipôles électriques
  - Développement multipolaire
  - Dipôles
  - Actions sur le terme dipolaire électrique : force, moment, énergie
- Conducteurs en équilibre électrostatique
  - Définition d'un conducteur
  - Théorème de Coulomb
  - Champ au voisinage d'un conducteur et pression électrostatique
  - Effet de pointe
- Milieux diélectriques
  - Polarisation  $\mathbf{P}$  : macroscopique et microscopique
  - Champ  $\mathbf{D}$
  - Conditions aux limites
  - Relations constitutives
  - Énergie dans les milieux

## Milieux diélectriques

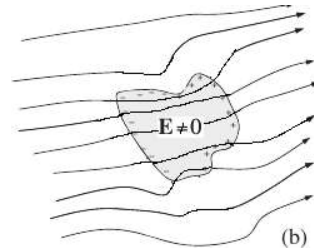
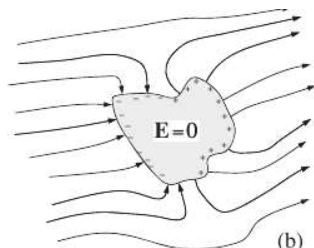
- *Introductions: milieux diélectriques*

- **Conducteurs:** milieu plongé dans un champ  $\mathbf{E}_{ext}$  capable de réarranger ses charges de surface pour avoir  $\mathbf{E}_{int} = \mathbf{0}$ ; ceci est possible, car les charges sont mobiles.
- **Diélectrique:** milieu plongé dans un champ  $\mathbf{E}_{ext}$  qui n'est pas capable de réarranger ses charges de surface pour contraire complètement le champ extérieur. Ici, les électrons sont fortement liés aux noyaux mais permettent un ré-arrangement partiel (gènèrent  $\mathbf{E}_{propre}$ ). Le  $\mathbf{E}_{int} = \mathbf{E}_{ext} + \mathbf{E}_{propre} \neq \mathbf{0}$ 
  - $\mathbf{E}_{ext}$  crée par de charges libres  $\rho_{libre}(\mathbf{r})$  avec  $\rho(\mathbf{r}) = \rho_{libre}(\mathbf{r}) + \rho_p(\mathbf{r})$
  - $\mathbf{E}_{propre}$  créée par de charges liées  $\rho_p(\mathbf{r})$  et  $\sigma_p(\mathbf{r})$

La charge totale dans un diélectrique est nulle:

$$\int_V \rho_p(\mathbf{r}) d^3r + \int_S \sigma_p(\mathbf{r}) dS = 0$$

Métal plongé dans un champ extérieur. Le champ est nul à l'intérieur.



Diélectrique plongé dans un champ extérieur, le ré-arrangement des charges n'est pas suffisant pour annuler le champ à l'intérieur du volume.

# Milieux diélectriques

- **Charges libres** : ce sont les charges dans un conducteurs ou dans un faisceau d'ions dans le vide libres de se déplacer. Se sont aussi les charges que l'on va placer sur ou dans un isolant. On parle parfois de « vraies » charges.
- **Charges liées** : ce sont les charges dans un diélectrique qui se créent quand on applique un champ externe. Ces charges liées reflètent la distorsion du nuage électronique des atomes ou molécules. On parle aussi de charge de polarisation.

Le degré de distorsion dépend de la nature des liaisons :

	liaison	$E_{int}$ diélectrique
gas/liquide	forte	petit
solide	moindres, car structure de bandes	grand

Microscopiquement (modèle de Mossotti): les barycentres des charges + et - ne correspondent plus. Il y a apparition d'un moment dipolaire induit microscopique :  $\mathbf{p}_{ind} = \alpha \epsilon_0 \mathbf{E}_{local}$  où  $\alpha$  est la *polarisabilité* électronique et  $\mathbf{E}_{local}$  le champ local au niveau de la molécule.

- Le terme **polarisation** fait référence à ce réarrangement *macroscopique* des charges quand la matière est exposé à un champ externe.
- Le terme **polarisation** fait aussi référence à une fonction  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$  utilisée pour caractériser les ré-arrangements.

# Milieux diélectriques

- Passage microscopique-macroscopique: polarisation  $\mathbf{P}$

**Comment relier la structure microscopique aux champs macroscopiques ?**

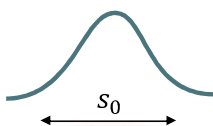
Vide = milieu peu dense

$$\text{Diélectrique} = \text{milieu dense} \begin{cases} \rho_{micro}(\mathbf{r}) = \sum q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \\ \mathbf{J}_{micro}(\mathbf{r}) = \sum q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \end{cases} \quad \text{avec } 10^{24} \text{ part./m}^3 \text{ ce qui n'est pas utile}$$

→ Nécessité d'une procédure de moyennage pour lisser les champs càd créer une fonction de lissage  $s(\mathbf{r})$  où taille caractéristique de la fonction de lissage  $s_0 \gg a_0$  (rayon de Bohr 0,05 nm)

$s_0 \ll \lambda$  (échelle des variations du champ)

( $\Omega$  doit englober suffisamment de particules pour donner des valeurs moyennes des propriétés en ignorant la structure atomique)



Cette fonction doit être normalisée  $\int_{\mathbb{R}^3} s(\mathbf{r}) d^3r = 1$

et décrit le milieu comme:

$$\langle \rho_{micro} \rangle(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_{micro}(\mathbf{r}') s(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3r'$$

En général:  $\langle \rho_{micro} \rangle(\mathbf{r}) = \rho_{libre}(\mathbf{r}) - \nabla \cdot \mathbf{P}$

Ainsi la polarisation macroscopique est définie comme une densité volumique des moments dipolaires (microscopiques):

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Omega} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{r}' \rho_{micro}(\mathbf{r}') d^3r' = \frac{\mathbf{p}_{ind}}{\Omega}$$

# Milieux diélectriques

- **Théorie de Lorentz:** considérer la polarisation macroscopique  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$  comme une densité volumique de moments dipolaires.
  - Marche assez bien pour un milieu dilué.
  - Marche beaucoup moins bien pour un cristal, car la polarisation dépende fortement de la manière dont est choisi le volume  $\Omega(\mathbf{r})$  et de sa position.

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Omega} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{r}' \rho_{micro}(\mathbf{r}') d^3r' = \frac{\mathbf{p}_{ind}}{\Omega}$$

On note que le potentiel créé par un diélectrique polarisé est indiscernable de celui produit par une assemblée continue de dipôles ponctuels de densité:

$$d\mathbf{p}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}(\mathbf{r}) d^3r$$

- Les **relations micro-macro** pour les champs donnent:

$$\begin{aligned} \nabla_r \times \mathbf{E}_{macro} &= \nabla \times \langle \mathbf{E}_{micro} \rangle = \langle \nabla \times \mathbf{E}_{micro} \rangle \\ \frac{\partial \mathbf{E}_{macro}}{\partial t} &= \langle \frac{\partial \mathbf{E}_{micro}}{\partial t} \rangle \\ \langle \nabla \cdot \mathbf{E}_{micro} \rangle &= \frac{\langle \nabla \cdot \rho_{micro} \rangle}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{libre} - \nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

# Milieux diélectriques

- Polarisation  $\mathbf{P}$

On définit la polarisation macroscopique  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$  en [ $\text{Cm}^{-2}$ ] par:

$$\begin{cases} \rho_P(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P} & \text{si } \mathbf{r} \in V \\ \sigma_P(\mathbf{r}_S) = \mathbf{P}(\mathbf{r}_S) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_S) & \text{si } \mathbf{r}_S \in S \\ \mathbf{P}(\mathbf{r}) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Note:  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$  n'est pas unique, car  $\nabla \times \mathbf{P}$  n'est pas spécifié

$$\text{Ceci vérifie: } \int_V \rho_P(\mathbf{r}) d^3r + \int_S \sigma_P(\mathbf{r}) dS = 0 \quad \text{et} \quad \int_V \mathbf{P} dV = \mathbf{p}$$

avec  $\mathbf{p}$  est le moment dipolaire total porté par le diélectrique de volume  $V$  et

$\mathbf{P}$  est une la densité volumique du moment dipolaire (càd: #dipoles/ $\text{m}^3$ )

- Si on sort du cadre de l'électrostatique, une variation temporelle de la densité volumique de charges liées  $\rho_P$  engendre un courant de polarisation  $\mathbf{j}_P$  définit par:

$$\mathbf{j}_P = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad ; \quad \text{on a bien avec cette définition:} \quad \nabla \cdot \mathbf{j}_P + \frac{\partial \rho_P}{\partial t} = 0$$

- Une théorie plus moderne de la polarisation définit la polarisation macroscopique à partir du courant de polarisation comme suit:

$$\mathbf{P}_{macro}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{j}_{p,micro}(\mathbf{r}', t) dt d^3r'$$

- Le potentiel produit par  $\mathbf{P}$  est:  $V_P(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_V \frac{\rho_P(\mathbf{r}) dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \int_S \frac{\sigma_P(\mathbf{r}_S) dS}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right\} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$



# Milieux diélectriques

- Champ  $\mathbf{D}$

■ **Def:** Le champ induction électrique ou déplacement électrique est:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

Cette définition est motivée par le fait que:  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{libre}$

$$\begin{aligned} - \text{ En effet } \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{libre} + \rho_P}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{libre}}{\epsilon_0} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0} \\ &\Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{libre} \end{aligned}$$

Note:

$\nabla \times \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{P} \neq \mathbf{0}$   
Il n'y a donc pas d'équivalent de la loi de Coulomb avec  $\mathbf{D}$ .

■ **Conditions aux limites:**

$$\mathbf{n}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)|_S = \sigma_{libre}$$

$$\mathbf{n}_{1 \rightarrow 2} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)|_S = \mathbf{0}$$

En particulier :

- en l'absence de charge libre, le champ  $\mathbf{D}$  normal est continu (mais  $\mathbf{E}$  normal est discontinu).
- le champ électrique tangentiel est continu.

Note: ces relations sont valables pour une interface immobile dans le référentiel du laboratoire (sinon voir cours de relativité).

# Milieux diélectriques

■ **Relations constitutives**

$\mathbf{D}$  connue seulement si existe une relation entre  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$  ou bien  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{E}$ . Nous utiliserons la relation constitutive:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

Ainsi,  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$

avec  $\chi_e$ : susceptibilité électrique (tenseur)

$\epsilon_r$ : constante diélectrique ou permittivité relative où  $\epsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$

$\epsilon$ : permittivité du milieu

■ **Quelques propriétés du milieu (càd  $\chi_e$ ):**

- *Homogène* → si  $\chi_e$  ne dépend pas du point considéré:  $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{r})$
- *Isotrope* → si  $\chi_e$  ne dépend pas de la direction considérée. Autrement, le milieu est anisotrope avec  $\chi_e$  une matrice 3x3
- *Linéaire* → si  $\chi_e$  ne dépend pas du champ  $\mathbf{E}$ . C'est généralement vrai lorsque les champs sont peu intenses. Autrement,  $\chi_e(\mathbf{E}(\mathbf{r}))$ : cas non-linéaire.
- *Dispersif* → si  $\chi_e$  dépend de la fréquence (hors du régime de l'électrostatique)

**Milieu lhi (linéaire, homogène et isotrope):  $\chi_e = cte$**

# Milieux diélectriques

- Clausius-Mossotti formula

(Valable pour des fluides constitués des molécules apolaires, libres de se déplacer unes des autres)

- Dans le modèle de Lorentz, on a écrit que le moment dipolaire induit microscopique était donné par:

$\mathbf{p}_{\text{ind}} = \alpha \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{local}}$ . Dans le cas d'une densité de  $n$  dipôles par unité de volume, on a donc en moyenne

$$\mathbf{P} = n \alpha \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{local}}$$

- Une molécule ne pouvant se polariser elle-même, on a introduit le champ local  $\mathbf{E}_{\text{local}}$  qui est le champ produit par toutes les sources moins le champ produit par les dipôles induits moyenné sur un petit volume  $\Omega$

$$\mathbf{E}_{\text{local}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \mathbf{E}_{\text{propre}}(\mathbf{s}) d^3s$$

On montre que  $\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \mathbf{E}_{\text{propre}}(\mathbf{s}) d^3s = -\frac{\mathbf{p}}{3\epsilon_0 \Omega} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$

On en déduit donc que  $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{n\alpha\epsilon_0}{1-n\alpha/3} \mathbf{E}(\mathbf{r})$

**Formule de Clausius Mossotti**

$$\epsilon_r = 1 + \frac{n\alpha}{1-\frac{n\alpha}{3}} \quad \text{soit:} \quad \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{n\alpha}{3}$$

# Milieux diélectriques

- Énergie dans les milieux

Énergie électrostatique dans le vide : énergie nécessaire pour amener les charges à distances où elles n'interagissent pas.

$$U_{E\_champ} = \sum_i^N \sum_{j>i}^N q_j V_i(\mathbf{r}_j) = \frac{1}{2} \sum_i^N \sum_{j \neq i}^N q_j V_i(\mathbf{r}_j) = \frac{1}{2} \sum_j^N q_j V(\mathbf{r}_j) = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) d^3r$$

$$U_E = \frac{1}{2} \int \epsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}) V(\mathbf{r}) d^3r = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\mathbf{E}|^2 d^3r$$

avec la densité volumique d'énergie dues aux champs:  $u_{E\_champ} = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2$

→ Dans les *diélectriques* : il faut ajouter à cette énergie de champ l'énergie stockée dans le matériau suite à la polarisation ( $u_{\text{matière}}$ ). La polarisation dans le diélectrique se crée en engendrant un courant de polarisation  $\mathbf{j}_P$ . Le travail fourni par le champ électrique pour augmenter l'énergie volumique interne de la matière par unité de temps est :  $\frac{d}{dt} u_{\text{matière}} = \mathbf{j}_P \cdot \mathbf{E} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \cdot \mathbf{E}$ , donc  $du_{\text{matière}} = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P}$ .

Le changement élémentaire de la densité d'énergie totale  $u_E$  dans un milieu s'écrit:

$$du_E = du_{E\_champ} + du_{\text{matière}} = \epsilon_0 \mathbf{E} d\mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P} = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D}$$

On obtient pour de diélectriques simples :  $u_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$

# Sommaire des concepts à retenir

## ■ **Loi de Coulomb et potentiel scalaire**

- Les différentes expressions du champ électrique à partir d'une distribution de charge. Lignes de champ.
- Propriétés et expression du potentiel scalaire. Équipotentielle.
- La force s'exerçant sur un plan chargé.
- L'énergie électrostatique totale.

## ■ **Dipôle et multipôles électriques**

- Définition d'un dipôle.
- Être capable d'effectuer un développement multipolaire.
- La force agissant sur un dipôle placé dans un champ électrique lentement variable.
- Le moment et le couple agissant sur un dipôle placé dans un champ électrique.
- L'énergie potentielle d'un dipôle dans un champ.

## ■ **Conducteurs en équilibre électrostatique**

- Définition d'un milieu conducteur et conséquence.
- Théorème de Coulomb.
- Pression électrostatique.
- Effet de pointe.

## ■ **Milieux diélectriques**

- Notion de charges libres et liées.
- Définition du vecteur  $\mathbf{P}$  en fonction des charges de polarisation.
- Définition du vecteur  $\mathbf{D}$ , relations avec  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{E}$ ,  $\chi_e$ ,  $\epsilon_r$ .
- Conditions aux limites.
- Définition de milieux homogènes, isotropes, anisotrope, non linéaires,... et la forme de leur susceptibilité diélectrique.