

## Chapitre 4

# REGIME LENTEMENT VARIABLE

**Alexandra Palacio Morales**

[alexandra.palacio-morales@universite-paris-saclay.fr](mailto:alexandra.palacio-morales@universite-paris-saclay.fr)

# Sommaire

- **Introduction des régimes lentement variables**
- **Induction électromagnétique et Force électromotrice de Faraday**
  - Description à partir des Eq. Maxwell et microscopique
  - Cas particuliers:  $\frac{\partial B}{\partial t}$ ,  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$
- **Régimes quasi-permanents:**
  - Approximations correspondants des équations de Maxwell
  - Différentes limites des régimes quasi-stationnaires:
    - Charges lentement variables dans le temps dans le vide
    - Courant lentement variables dans le temps dans le vide
    - Champ lentement variable dans un conducteur:
      - Temps de relaxation
      - Mauvais conducteur
      - Bon conducteur (effet de peau, courants de Foucault)

# Introduction des régimes lentement variables

*Electrostatique:*

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

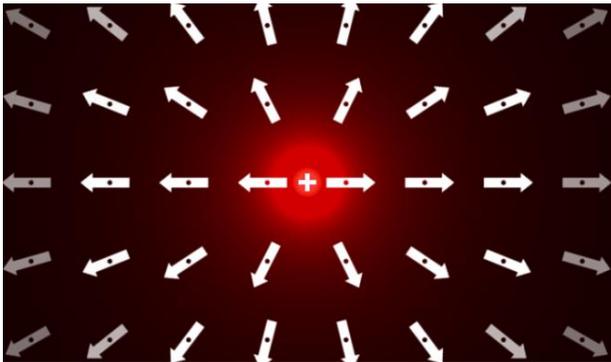
*Magnétostatique:*

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

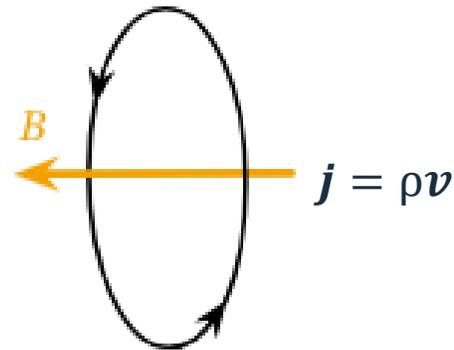
avec  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$

*Régimes stationnaires  
et circuits rigides*

} => Systèmes conservatifs



*q ou  $\rho$   
statique*



Charges en  
mouvement

**Comment produire un  $B$   
à partir d'un  $E$  ?**

On doit sortir du cadre  
de la statique



Induction Electrostatique

$$\Delta \Phi_{mag}$$

# Induction Électromagnétique et Force électromotrice de Faraday

- Induction électromagnétique

$\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont des champs dépendent du temps:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(r,t)$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(r,t)$

On considère le  $\Phi_{mag}$  généré par  $\mathbf{B}$  sur un circuit fermé, statique et d'orientation fixe;

si  $\Phi_{mag} \neq cte$ , les porteurs de charges se mettent en mouvement sous l'action de forces motrices  $\mathbf{f}_m$ , dont la circulation est non nulle; le circuit s'oppose:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_{mag}}{dt} = -\frac{1}{q} \oint_c \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{l}$$

$\varepsilon$  soit modifie l'énergie cinétique de charges; soit la surface du circuit

**Observations:**

**Situations de variation du  $\Phi_{mag}$ :**

- $\mathbf{B}(t)$
- Déplacement du circuit dans un  $\mathbf{B}(r)$
- Rotation d'un circuit dans  $\mathbf{B}$  uniforme
- Aperture/fermeture d'un circuit électrique

Rappel: Loi d'Ohm dans conducteurs

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\Rightarrow \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = \sigma \left( -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)$$

# Induction Électromagnétique et Force électromotrice de Faraday

*-Description microscopique de l'induction et de la force électromotrice de Faraday*

***Cas particuliers de la variation du  $\Phi_{mag}$ :***

- Cas de Neumann

Circuit fixe; f.e.m. dépend de B.

$$\frac{\partial A}{\partial t} \neq \mathbf{0}, \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

- Cas de Lorentz

Circuit mobile dans B uniforme.

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \mathbf{0}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$$

# Régimes quasi-permanents

**Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS): Eq. Maxwell**

- $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
- $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
- $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
- $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$

$$\mathbf{B}_{ARQS} \equiv \mathbf{B}_{\text{magnétostatique}}$$
$$\mathbf{E}_{ARQS} \equiv \mathbf{E}_{\text{électrostatique}} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Validité si  $|\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}| \ll |\nabla \times \mathbf{B}|$  ! Néglige les retards / l'influence de la propagation  
 $\ll |\mu_0 \mathbf{j}|$

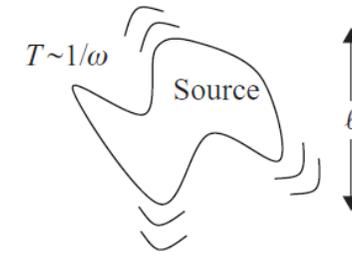
**Différentes limites des régimes quasi-stationnaires:**

- a) Charges lentement variables dans le temps dans le vide
- b) Courant lentement variables dans le temps dans le vide
- c) Champ lentement variable dans un conducteur:
  - i. Temps de relaxation des charges libres
  - ii. Mauvais conducteur: quasi- électrostatique
  - iii. Bon conducteur: quasi-magnétostatique
    - Effet de peau
    - Courants de Foucault

# Différentes limites des régimes quasi-stationnaires:

## a) Charges lentement variables dans le temps dans le vide

Lentement variable:  $\nabla \sim \frac{1}{l}$  et  $\frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{1}{T} \sim \omega$



Les analyses se font en ignorant le caractère vectoriel:

1. Conservation de la charge:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad j \sim \omega l \rho$$

2. Le champ  $\mathbf{E}$  se décompose en:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{Coulomb} + \mathbf{E}_{Faraday}$

$$\text{sachant par le Th. De Helmholtz: } \nabla \times \mathbf{E}_{Coulomb} = \mathbf{0} \text{ et } \nabla \cdot \mathbf{E}_{Faraday} = 0$$

$$\text{on obtient: } E_{Coulomb} \sim \frac{l}{\epsilon_0} \rho \quad \text{et} \quad E_{Faraday} \sim \omega B l$$

3. À partir de  $\mathbf{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{Coulomb}}{\partial t}$ , on calcule  $j/j_D \sim 1$

4. On ré-écrit  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} = \mu_0 (\mathbf{j}_{libre} + \mathbf{j}_D)$ , alors  $B \sim \mu_0 \omega \rho l^2$

5. Le rapport  $E_{Faraday}/E_{Coulomb} \sim \left(\frac{\omega l}{c}\right)^2$

**La condition de lentement variable:**  $\omega^2 \ll \left(\frac{c}{l}\right)^2$  satisfaite  $\Rightarrow E_{Faraday}$  est négligeable devant  $E_{Coulomb}$

Limite: QUASI-ELECTROSTATIQUE ;  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  statiques dus aux  $\rho$  et  $\mathbf{j}$ , respectivement.

# Différentes limites des régimes quasi-stationnaires:

## b) Courant lentement variables dans le temps dans le vide

L'analyse donne:

1.  $\mathbf{j}$  varie lentement / on définit un  $\mathbf{B}_A$  produit à partir de la loi d'Ampère de magnétostatique en ignorant le  $\mathbf{j}_D$

$$\nabla \times \mathbf{B}_A = \mu_0 \mathbf{j} \quad B_A \sim \mu_0 j l$$

2. On considère  $\nabla \times \mathbf{E}_{Faraday} = \frac{\partial \mathbf{B}_A}{\partial t}$  alors  $E_{Faraday} \sim \omega l B_A \sim \mu_0 \omega j l^2$

3. Le  $\mathbf{j}_D$  associé:  $j_D \sim \epsilon_0 \omega E_{Faraday} \sim \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 j l^2$

4. On obtient donc le rapport:  $j/j_D \sim \left(\frac{\omega l}{c}\right)^2$

$$\text{Si } \omega^2 \ll \left(\frac{c}{l}\right)^2 \Rightarrow B_A \gg B_D; B \text{ de caractère magnétostatique domine}$$

Ceci ramène à la même **condition de lentement variable**:  $\omega \ll \frac{c}{l}$  qu'en électrostatique

!!! Cette condition assure que les effets de retardation/radiation n'ont pas lieu

Limite: QUASI-MAGNETOSTATIQUE ; E et B statiques dus aux  $\rho$  et  $\mathbf{j}$ , respectivement.

$$\text{où } \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \text{ et } \mathbf{j}_D \sim 0 \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial t} \rightarrow 0$$

# Différentes limites des régimes quasi-stationnaires:

## c) Courant lentement variables dans un conducteur

### i. Temps de relaxation des charges libres

$$\mathbf{j}_{libre} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\rho_{libre}(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}, t)e^{t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \epsilon_0/\sigma$$

### ii. Mauvais conducteur: quasi-électrostatique

On néglige l'induction électrostatique devant les courants ohmiques

$\tau$  petit  $\Rightarrow$   $\rho_{libre}$  exerce  $\mathbf{E}_{Coulomb}$  avant aller en surface du conducteur

Si la source est harmonique:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\sigma}{\epsilon} \ll \omega \ll \frac{c}{l} \ll \frac{1}{l\sqrt{\mu\epsilon}}$$
$$\omega\tau \gg 1$$

Les eq. de Maxwell deviennent:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu\sigma \mathbf{E} + \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Ex: diélectrique à fortes pertes (dissipation) avec  $\sigma < 10\Omega^{-1}m^{-1}$

# Différentes limites des régimes quasi-stationnaires:

## c) Courant lentement variables dans un conducteur

### iii. Bon conducteur: quasi-magnétostatique

Les courants ohmiques ( $\sigma \sim 10^8 \Omega^{-1} m^{-1}$ ) dominant;  $\tau$  est très grand

$$\rho_{libre}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathbf{j}_{libre} = 0$$

On a:

$$j_D/j_{ext} \ll 1 \quad \text{et} \quad j_D/j_{libre} \ll 1$$

alors  $\omega\tau \ll 1$  ! condition opposée à la quasi-électrostatique

La physique dépend de l'importance relative des champs externes vs induits; on définit

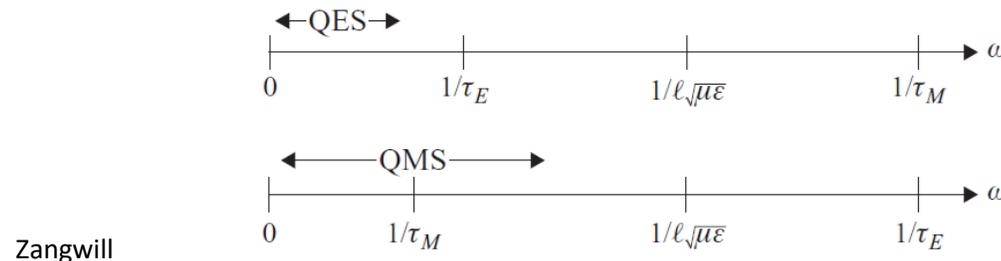
$$\tau_{mag} = \mu\sigma l^2$$

et les regimes:

$\omega \tau_{mag} \ll 1$  : induction négligeable

$\omega \tau_{mag} \gg 1$  : induction domine

### Comparaison Quasi: E et B



**Figure 14.12:** Ranges of validity for quasistatic approximations when conducting matter is present. Top: quasi-electrostatics (QES) when  $\tau_E \gg \tau_M$ . Bottom: quasi-magnetostatics (QMS) when  $\tau_M \gg \tau_E$ . The horizontal scale is logarithmic in frequency. Figure adapted from Orlando and Devlin (1991).

# Différentes limites des régimes quasi-stationnaires:

## c) Courant lentement variables dans un conducteur

### iii. Bon conducteur: quasi-magnétostatique

Cas de figure :

#### ■ $E, B$ imposent l'existence d'un $j$

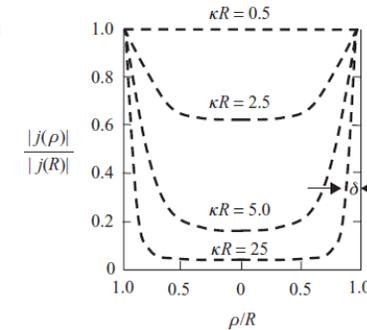
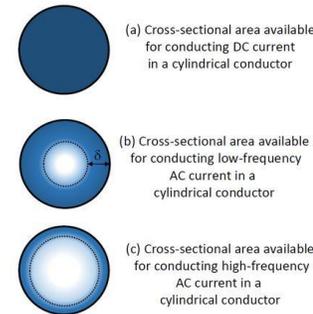
- Diffusion magnétique

$$\frac{1}{\mu\sigma} \Delta B = \frac{\partial B}{\partial t}$$

- Effet de peau

$$\frac{1}{\mu\sigma} \Delta E = \frac{\partial E}{\partial t} \quad \text{avec} \quad \kappa = \sqrt{i\omega\mu\sigma}$$

$$\delta(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} : \text{épaisseur de peau}$$



Pour le Cuivre:

$\delta(\omega)$	$\omega$ (Hz)	Band
10 nm	$10^{15}$	Visible
1 $\mu\text{m}$	$10^{12}$	Microwave
0.1 mm	$10^6$	AM radio
1 cm	10	House current

Zangwill

#### ■ $j_{ext}$ induit un $j_{ind}$ dans le conducteur:

- Courants de Foucault

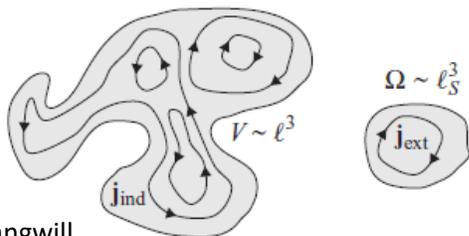
Emergence des  $j_{ind}$  sous  $B$  ou  $j_{ext}$

$j_{ind}$  - augmente vers l'extérieur du conducteur (où  $B_{ind}$  est plus grand) et augmente avec  $\omega$

- génère des forces/torques et dissipation des courants par effet Joule:

$$\text{Dans un fil: } \left\langle \frac{P}{\text{Vol.}} \right\rangle_{fil} = \frac{\gamma}{16} \omega^2 B^2 R^2 \quad \text{avec P: puissance et R: rayon section du fil}$$

Applications: freinage, moteur à induction, pertes par effet Joule, mvt pendulaire d'un disque entre 2 aimants



Zangwill

# Résumé des contenues à retenir

- Condensateurs et inductances (à voir les TDs)
- Induction, force électromotrice de Faraday
- Définition des régimes quasi-permanent et approximations correspondants des les équations de Maxwell
- Charges, courants lentement variables dans le temps et dans le vide
- Champs lentement variable dans un conducteur: temps de relaxation, mauvais conducteur, bon conducteur (effet de peau et courant de Foucault)