

# ÉLECTRODYNAMIQUE CLASSIQUE

**Magistère de Physique – ENS - LDD**

**Alexandra Palacio Morales**

[alexandra.palacio-morales@universite-paris-saclay.fr](mailto:alexandra.palacio-morales@universite-paris-saclay.fr)

Laboratoire de Physique des Solides, Bât. 510

## Chapitre 6

# RAYONNEMENT

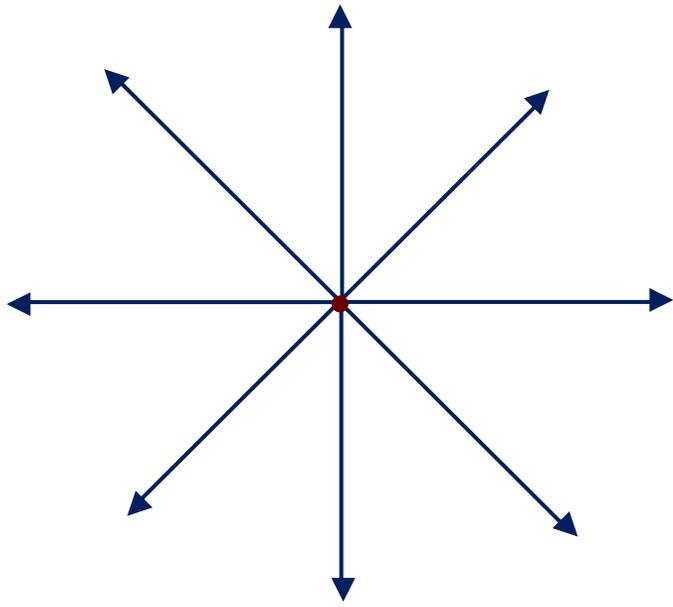
**Alexandra Palacio Morales**

[alexandra.palacio-morales@universite-paris-saclay.fr](mailto:alexandra.palacio-morales@universite-paris-saclay.fr)

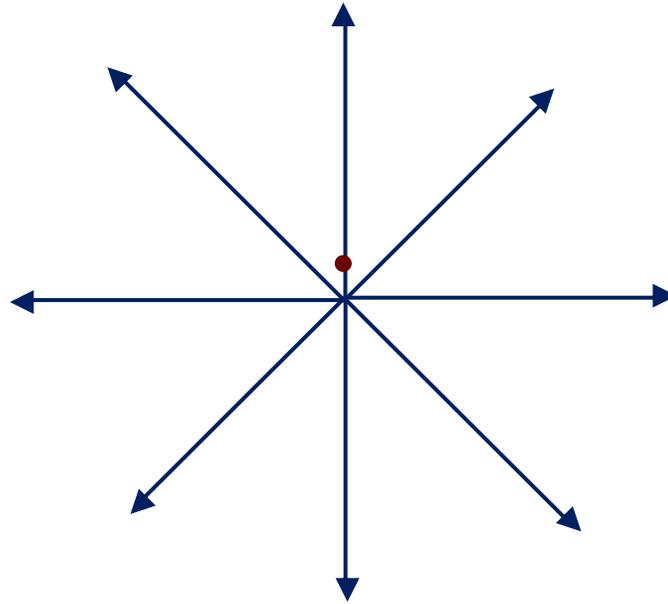
# Sommaire

- **Introduction au rayonnement**
- **Description à partir des équations de Maxwell**
  - Interlude mathématique: fonction de Green
  - Potentiels retardés
  - Champs retardés
- **Sources de rayonnement :**
  - Cas d'une charge ponctuelle accélérée non-relativiste
  - Dipôle Électrique
  - Dipôle Magnétique
  - Généralisation à une source arbitraire
  - Développement multipolaire du champ rayonné
- **Application: Antennes**
  - Antennes filaires
  - Réseau d'antennes rectilignes
  - Théorème d'équivalence champ proche-champ lointain. Principe de Huygens-Fresnel.

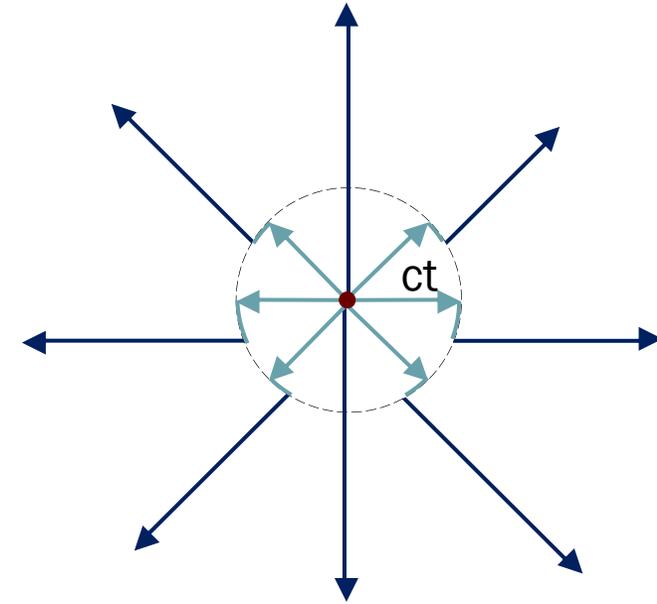
# Introduction au rayonnement



$t_1 < t$



$t$



$t < t_2$

Le mouvement d'une charge à la position  $\mathbf{r}_q$  peut avoir une conséquence sur les champs au point d'observation  $\mathbf{r}_o$  à l'instant  $\frac{|\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_o|}{c}$

# Description à partir des équations de Maxwell

- Eq. Maxwell dans le vide avec des  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  et  $\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$  (charges/courants variables dans le temps)

$$\left(-\Delta + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \rho + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}_f}{\partial t}$$
$$\left(-\Delta + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{j}$$

- Solution :
  - Transformer les champs en potentiels
  - Appliquer la jauge de Lorentz

On obtient:

$$\left(-\Delta + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\left(-\Delta + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}$$

l'outil de calcul pour résoudre ces équations est la fonction de Green. Elle tient compte de  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  et  $\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$  et fait émerger

la retardation des potentiels

# Description à partir des équations de Maxwell

- Interlude mathématique: fonction de Green

# Description à partir des équations de Maxwell

- Potentiels retardés

Dépendance temporelle :

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}_s, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} d^3r_s$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}_s, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} d^3r_s$$

Dépendance fréquentielle :

$$V(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}_s, \omega) e^{\frac{i\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|}{c}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} d^3r_s$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_s, \omega) e^{\frac{i\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|}{c}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} d^3r_s$$

**Notation :**

$\mathbf{r}_s = \mathbf{r}'$ : réfère à la distance source-origine

$\mathbf{r}$ : distance entre le point d'observation et l'origine

# Description à partir des équations de Maxwell

- Champs retardés

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$
$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

En introduisant la notation retardée :

- $t_{ret} = t - R/c$
- $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|$
- $\rho_{ret}(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}', t_{ret})$  etc...

Champs  
statiques

Équations de Jefimenko

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[ \frac{\rho_{ret} \mathbf{R}}{R^3} + \frac{\mathbf{R}}{cR^2} \frac{\partial \rho_{ret}}{\partial t} - \frac{1}{c^2 R} \frac{\partial \mathbf{j}_{ret}}{\partial t} \right] d^3 r_s$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[ \frac{\mathbf{j}_{ret}}{R^3} + \frac{1}{cR^2} \frac{\partial \mathbf{j}_{ret}}{\partial t} \right] \times \mathbf{R} d^3 r_s$$

! Communication entre deux points demande d'un lapse de temps:  $\frac{|R|}{c}$

!  $\mathbf{E}, \mathbf{B} \propto \frac{1}{r}$

# Sommaire

- **Introduction au rayonnement**
- **Description à partir des équations de Maxwell**
  - Interlude mathématique: fonction de Green
  - Potentiels retardés
  - Champs retardés
- **Sources de rayonnement :**
  - Cas d'une charge ponctuelle accélérée non-relativiste
  - Dipôle Électrique
  - Dipôle Magnétique
  - Généralisation à une source arbitraire
  - Développement multipolaire du champ rayonné
- **Application: Antennes**
  - Antennes filaires
  - Réseau d'antennes rectilignes
  - Théorème d'équivalence champ proche-champ lointain. Principe de Huygens-Fresnel.

# Sources de rayonnement

- Cas d'une charge ponctuelle accélérée non-relativiste

Quelques équations :

Potentiels de Liénard-Wiechert

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|(1 - \boldsymbol{\beta}_s \cdot \mathbf{u}_s)} \right)_{t=t_R}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 c q}{4\pi} \left( \frac{\boldsymbol{\beta}_s}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|(1 - \boldsymbol{\beta}_s \cdot \mathbf{u}_s)} \right)_{t=t_R}$$

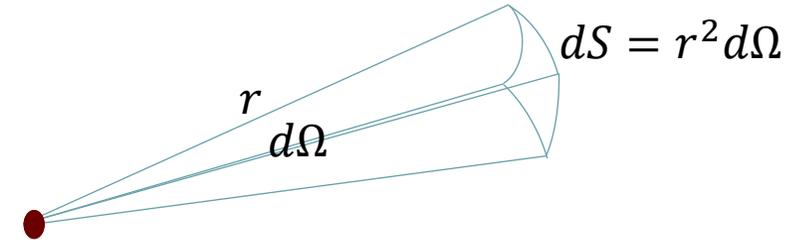
$$\text{avec } t_R = t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t_R)|}{c}, \boldsymbol{\beta}_s = \frac{\mathbf{v}_s}{c}, \mathbf{u}_s = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_s}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|}$$

Formule de Larmor

$$\mathbf{B}_{rad}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mathbf{u}_r}{c} \times \frac{\partial \mathbf{A}_{rad}}{\partial t}$$
$$\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c} \mathbf{a}_s \left( t - \frac{r}{c} \right)^2 (\sin \theta)^2$$

Analyse approfondie: voir TD11

Note: angle solide



# Sources de rayonnement

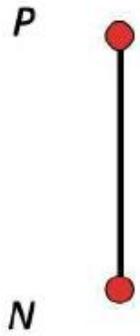
## - Dipôle Électrique

### Dipôle de Hertz

Voir TD12

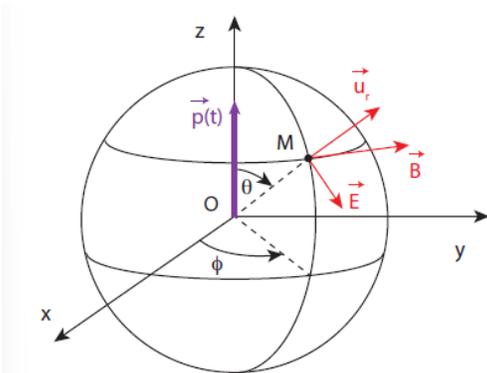
Portion de conducteur parcourue par

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

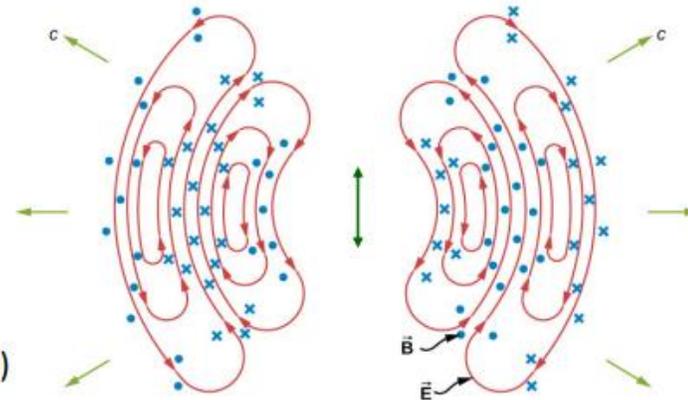
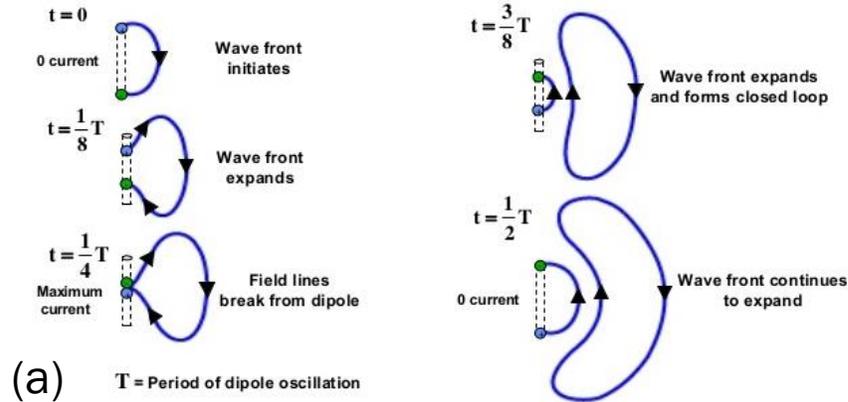


P ●  $q_P(t) = q \cos(\omega t)$

N ●  $q_N(t) = -q \cos(\omega t)$

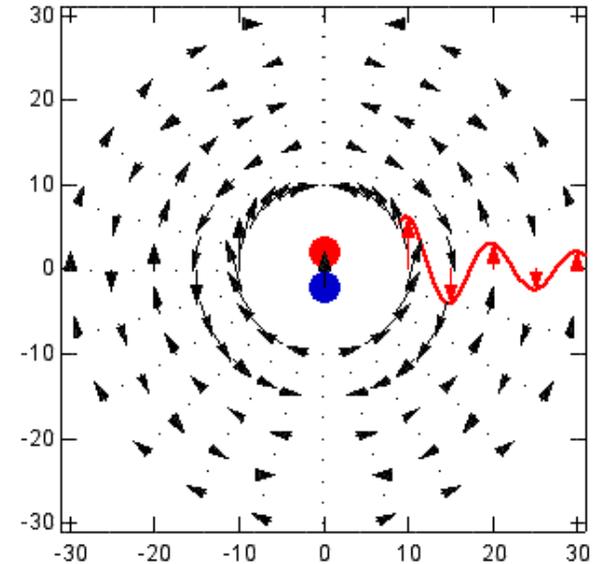


### Illustration de la formation des lignes de champ et propagation



Ming-Che Chang

FIG. 6 (a) Field lines from an oscillating electric dipole. A field line would reconnect to form a closed loop and expand outward. Note: The space-time coordinate of the connection point is not necessarily at  $(0, T/4)$ . (b) The distribution of magnetic field is shown with blue dots and blue crosses.

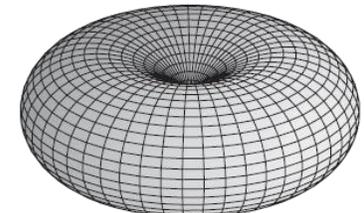


Alain Jonas, UCLouvain

Notez:

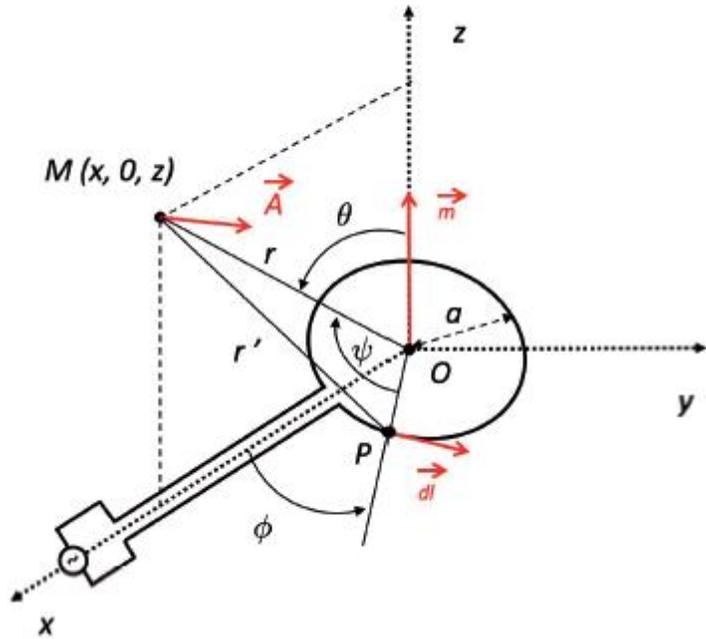
- l'amplitude du champ électrique diminue de l'équateur aux pôles, et qu'il n'y a pas de champ émis dans l'axe du dipôle
- l'amplitude du champ diminue avec la distance à la source en  $1/r$

### Distribution angulaire de $P_{\text{rayonnée}}$



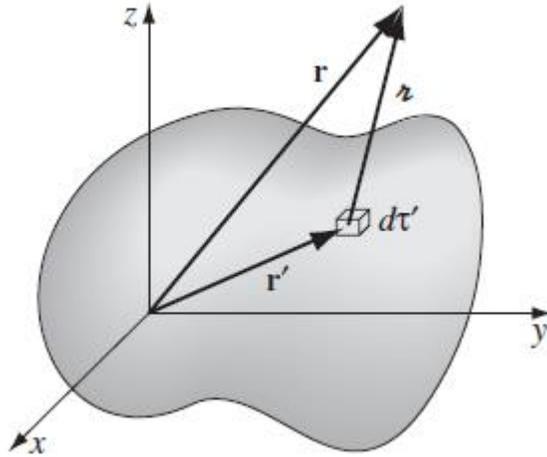
# Sources de rayonnement

- Dipôle Magnétique



# Sources de rayonnement

- Généralisation à une source arbitraire



Griffiths

$$\mathbf{A}_{rad}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{j}_{ret} d^3 r_s \quad \text{avec } t_{ret} = t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}_s}{c}$$

On obtient alors:

$$\mathbf{B}_{rad}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mathbf{u}_r}{c} \times \frac{\partial \mathbf{A}_{rad}}{\partial t}$$

$$\mathbf{E}_{rad} = -c(\mathbf{u}_r \times \mathbf{B}_{rad})$$

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = \langle \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t) \rangle r^2 = \frac{r^2}{\mu_0 c} |\mathbf{E}_{rad}|^2 = \frac{r^2 c}{\mu_0} |\mathbf{B}_{rad}|^2 = \frac{1}{\mu_0 c} |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{A}}_{rad}|^2$$

Si les sources sont harmoniques :

$$\mathbf{A}_{rad}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\mu_0}{4\pi r} e^{ikr} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}_s, \omega) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_s} d^3 r_s \quad \text{avec } \mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{u}_r, \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r} e^{ikr} \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega)$$

où  $\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega)$  est la T.F. 3D spatiale de  $\mathbf{j}_{ret}(\mathbf{r}_s, \omega)$  prise dans  $\mathbf{k}$  !

Pour une directivité élevée,  $\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega)$  doit être très étroit (« pic »), donc  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega)$  doit être grand. Contrairement, si l'antenne est petite, elle rayonne dans toutes les directions (comme un dipôle).

# Sources de rayonnement

- Développement multipolaire du champ rayonné

Dans le regime harmonique et tenant compte de :  $e^{-ik \cdot r_s} = 1 - ik \cdot r_s - \dots$

$$A_{rad}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\mu_0}{4\pi r} e^{ikr} \left[ \int \mathbf{j}(\mathbf{r}_s, \omega) d^3r_s - ik \int (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}_s) \mathbf{j}(\mathbf{r}_s, \omega) d^3r_s + \dots \right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r} e^{ikr} \left[ -i\omega \mathbf{p}(\omega) + ik \times \mathbf{m}(\omega) + \dots \right]$$

## Dipôle électrique

$$\mathbf{B}_{E1}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi c r} \mathbf{u}_r \times \mathbf{p} e^{-i(\omega t - kr)}$$

$$\mathbf{E}_{E1}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi r} \mathbf{u}_r \times (\mathbf{u}_r \times \mathbf{p}) e^{-i(\omega t - kr)}$$

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle_{E1} = \frac{\mu_0 \omega^4}{32\pi^2 c} |\mathbf{u}_r \times \mathbf{p}|^2$$

$$\frac{P_{M1}}{P_{E1}} = \left( \frac{m}{c\rho} \right)^2 \sim \left( \frac{j}{c\rho} \right)^2 \sim \left( \frac{v}{c} \right)^2$$

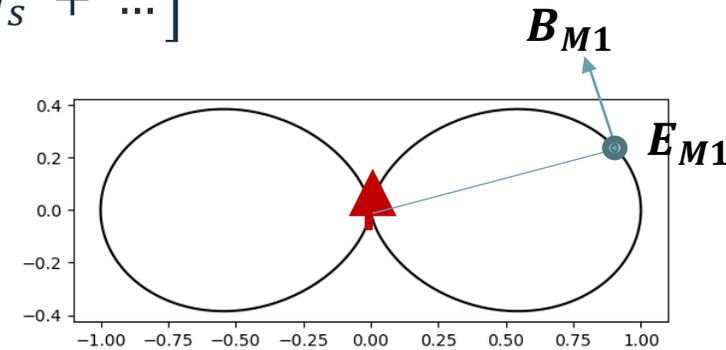
Le dipôle électrique domine si limite non-relativiste et  $\mathbf{p} \neq 0$ .

## Dipôle magnétique

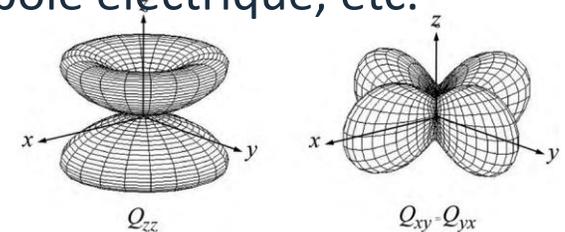
$$\mathbf{B}_{M1}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi c^2 r} \mathbf{u}_r \times (\mathbf{u}_r \times \mathbf{m}) e^{-i(\omega t - kr)}$$

$$\mathbf{E}_{M1}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi c r} \mathbf{u}_r \times \mathbf{m} e^{-i(\omega t - kr)}$$

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle_{M1} = \frac{\mu_0 \omega^4}{32\pi^2 c^3} |\mathbf{u}_r \times \mathbf{m}|^2 \quad \text{Même distribution que } \mathbf{p}.$$



Autres termes : Quadrupole électrique, etc.  
(pas rayonnants)



# Sommaire

- **Introduction au rayonnement**
- **Description à partir des équations de Maxwell**
  - Interlude mathématique: fonction de Green
  - Potentiels retardés
  - Champs retardés
- **Sources de rayonnement :**
  - Cas d'une charge ponctuelle accélérée non-relativiste
  - Dipôle Électrique
  - Dipôle Magnétique
  - Généralisation à une source arbitraire
  - Développement multipolaire du champ rayonné
- **Application: Antennes**
  - Antennes filaires
  - Réseau d'antennes rectilignes
  - Théorème d'équivalence champ proche-champ lointain. Principe de Huygens-Fresnel.

# Application: Antennes

## – Antennes :

Dispositif qui convertit une onde guidée en une onde se propageant dans l'espace libre et réciproquement.

Processus d'envoi/réception demande la dissipation d'énergie EM

$$P_{ray} = \frac{1}{2} R_{ray} I^2$$

avec  $Ia = p\omega$  et  $R_{ray} = 790 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$

### ■ Zone de travail:

Zone lointaine:  $r \gg \lambda \gg d$ ; dépend de  $\vec{p}''$

### ■ Type d'antennes:

$\nu < 100\text{MHz}$

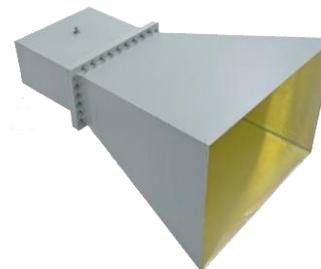
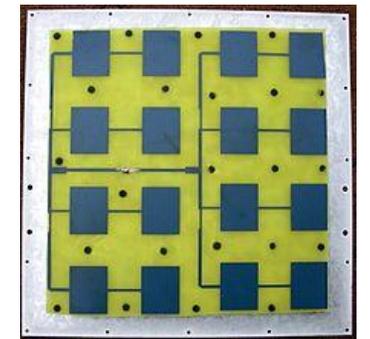
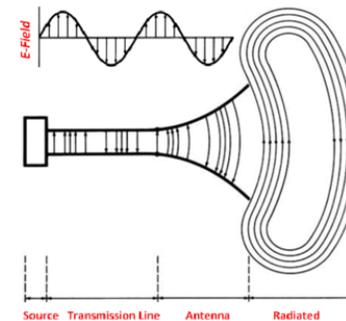
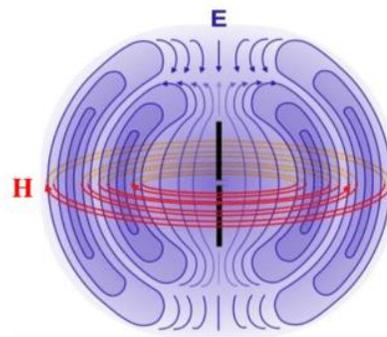
- Filière , arrays
- Boucle

$\nu : 300\text{ MHz} - 10\text{ GHz}$

- Cornet
- Antenne patch

$\nu < 300\text{GHz}$

- Guide d'onde avec orifice
- À réflexion : parabole



**Contactless, High Resolution Characterization of Current and Voltage Waveforms Within High Power Communication Amplifiers,**  
 Ali Mahdi Lafta Al-Ziayree  
 et wikipedia

# Application: Antennes

- Antennes filaires (cas  $d=\lambda/4$ )

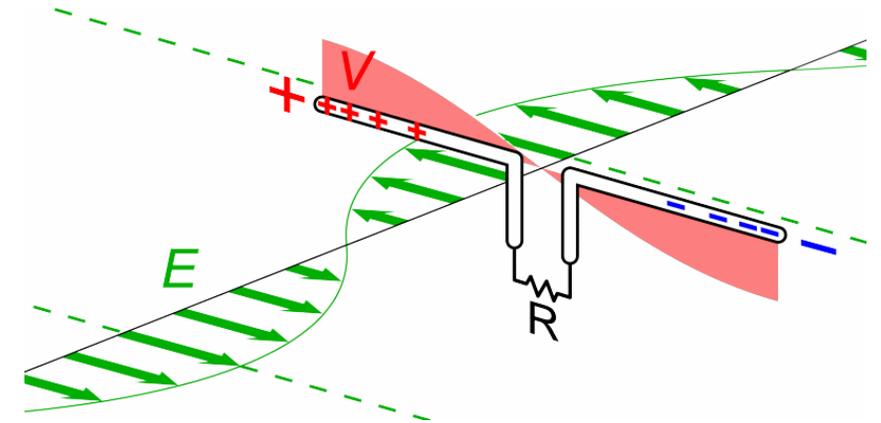
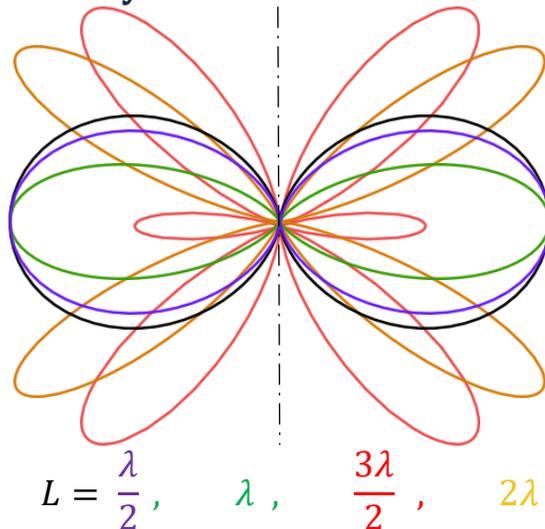
$$V(z, t) = V_0(z)e^{-i\omega t}$$

$$i(z, t) = i_0 \sin\left(k\left(\frac{L}{2} - |z|\right)\right) e^{-i\omega t}$$

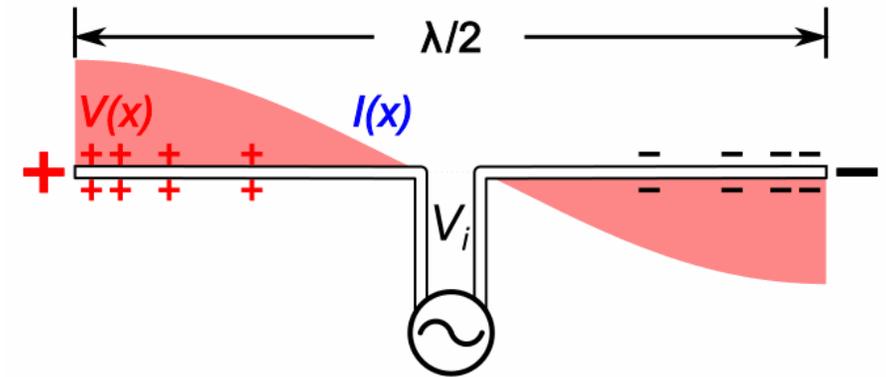
$$A_{rad}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\mu_0}{4\pi r} e^{ikr} \int \mathbf{j}(z, \omega) e^{-ik \cdot \mathbf{r}_s} dV'$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 c i_0^2}{8\pi^2} \left[ \frac{\cos(kL \cos \theta / 2) - \cos(kL/2)}{\sin \theta} \right]^2$$

- Distribution du rayonnement:



wikipedia



# Application: Antennes

- Réseau d'antennes rectilignes

# Application: Antennes

- Théorème d'équivalence champ proche-champ lointain. Principe de Huygens-Fresnel.

# À retenir

Rayonnement :

- Expressions en champ lointain de  $\mathbf{A}_{\text{ray}}$ ,  $\mathbf{B}_{\text{ray}}$ ,  $\mathbf{E}_{\text{ray}}$  dans le domaine temporel.
- Expression de la puissance rayonnée instantanée  $\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega}(\theta, \varphi)$ .
- Potentiel vecteur rayonné  $\mathbf{A}_{\text{ray}}$  dans le domaine de Fourier.
- Décomposition multipolaire des charges et des distributions de courant.

Potentiels retardés :

- La fonction de Green retardée de l'équation des ondes.
- Les potentiels scalaires et vectoriel retardés.
- Champs retardés.

Les champs lointains rayonnés par un dipôle (électrique et magnétique) oscillant. La dépendance en  $1/r^2$ ,  $\sin^2 \theta$ ,  $\omega^4$  du Poynting en champ lointain.

Rayonnement d'une charge en mouvement :

- Connaître l'existence des potentiels de Liénard-Wiechert.
- Limite non relativiste : Formule de Larmor.

Antennes :

- Application du rayonnement aux distributions filaires de courants
- Définition de la résistance au rayonnement
- Possibilité d'accorder le diagramme d'émission avec des formes ou des réseaux d'antennes