Chapitre 1

CONCEPTS FONDAMENTAUX

Alexandra Palacio Morales
alexandra.palacio-morales@universite-paris-saclay.fr

2024-2025

Sommaire

Sommaire

Courant et charges

Introduction. Action sur une charge:
Le sujet de l'électromagnétisme concerne l'origine et l'étude des champs **E**(**r**, *t*) et **B**(**r**, *t*) responsable de la Force de Coulomb-Lorentz:

$$\boldsymbol{F} = q\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

La notion de champ (par exemple électrique, magnétique ou gravitationnel) a été précisément introduite pour caractériser une force exercée sur un objet souvent à distance.

Remarque : le lettres en gras correspondent à des quantités vectorielles

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ correspond à $\vec{E}(\vec{r}, t)$

ainsi il a 3 composantes (E_x, E_y, E_z)

ou $(E_r, E_\theta, E_\varphi)$ si sphériques

Courant et charges

- *La charge électrique*

- La charge est une propriété intrinsèque de la matière au même titre que la masse
- La charge est une grandeur **scalaire quantifiée**; aucune particule connue ne possède une charge qui ne soit pas un **multiple de la charge élémentaire**

$$e = 1,602176634 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

! On omet ici les quarks qui, bien qu'ayant un charge fractionnaire, ne peuvent être séparés

- Il n'y a **pas d'incertitude** sur la valeur de la charge, exprimée en coulomb C, dans le système international SI. Il s'agit en effet d'une des sept constantes définissant le SI.

! Réforme de 2018-2019 où cette valeur était liée à la définition de l'ampère.
Plus de détails au: https ://www.bipm.org/fr/

- Malgré que la charge à **un caractère discret/ponctuel** dans l'espace, il est plus naturel de développer une théorie basée sur une **densité de charges par unité de volume continue, ρ**.

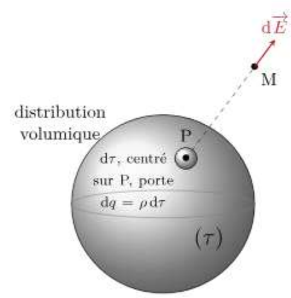
! Concept adapté à une échelle où la matière peut être considérée comme un milieu continu en ignorant sa structure atomique et aussi à une description quantique, car les fonctions d'onde de la mécanique quantique sont continues

Courant et charges

- **Densité de charges par unité de volume:**

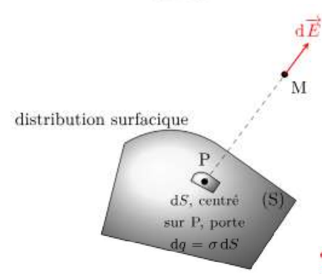
$\rho(\boldsymbol{r}, t)$: *densité de charge volumique* unite: C.m^{-3}

satisfait $\mathrm{Q} = \int_V \rho(\boldsymbol{r})\, d^3r$



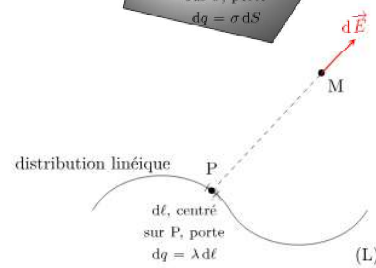
- Si la charge est localisée dans l'espace
  - *Dans une surface* $\sigma_S(\boldsymbol{r})$: *densité de charge surfacique*

$$\mathrm{Q} = \int_S \sigma_S(\boldsymbol{r})\, dS \quad [\mathrm{C.m^{-2}}]$$



  - *Dans un fil* $\lambda(\boldsymbol{r})$: *densité de charge linéique*

$$\mathrm{Q} = \int_l \lambda(\boldsymbol{r})\, dl \quad [\mathrm{C.m^{-1}}]$$



Courant et charges

– *Introduction aux distributions*

Comment concilier l'aspect discret des charges et l'outil de densité de charge ?

! Expérimentalement, l'électron est considéré comme
une particule ponctuelle avec une charge ponctuelle

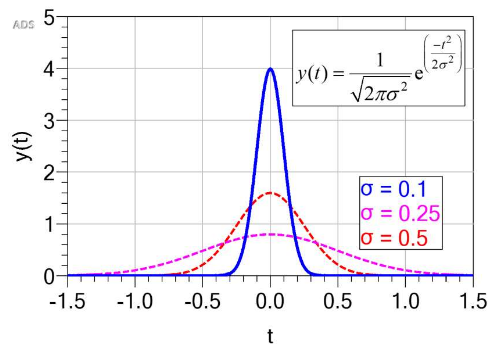
Nous avons besoin d'une fonction définissant une charge finie distribuée sur une région étendue infiniment petite: la ***distribution delta de Dirac*** *notée* $\boldsymbol{\delta}$

Il existe de multiples façons de décrire mathématiquement une fonction de type delta (toutes à partir de fonctions « pic » normalisées :

– $\delta(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \frac{\sin(mx)}{\pi x}$

– $\delta(x) = \lim\limits_{p\to\infty} \frac{p}{\sqrt{\pi}} \exp(-p^2x^2)$

– $\delta(x) = \lim\limits_{\epsilon\to 0} \frac{\epsilon/\pi}{x^2+\epsilon^2}$



Courant et charges

– *Introduction aux distributions*

Comment concilier l'aspect discret des charges et l'outil de densité de charge ?

! Expérimentalement, l'électron est considéré comme
une particule ponctuelle avec une charge ponctuelle

Nous avons besoin d'une fonction définissant une charge finie distribuée sur une région étendue infiniment petite: la ***distribution delta de Dirac*** *notée* $\boldsymbol{\delta}$

Propriétés principales de $\boldsymbol{\delta}$*:*

- à 1D $\quad \delta(x) = 0 \ si \ \ x \neq 0$ $\qquad$ à 3D $\quad \delta(\boldsymbol{r})$

$$\int_a^b \delta(x)dx = 1 \quad si \ \ a < 0 < b$$

- Pour toute fonction *f analytique, à valeur unique dans le domaine et dont la dérivée est finie en tout point*

à 1D $\qquad \int_{\mathbb{R}} f(x')\delta(x-x')dx' = f(x)$

à 3D $\qquad \int_{\mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')d^3r' = f(\boldsymbol{r})$

Courant et charges

Ainsi la densité de charges créée par N particules ponctuelles q_k localisées aux positions $\boldsymbol{r}_k$ sera notée :

$\rho(\boldsymbol{r}) = \sum_{k=1}^{N} q\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_k})$ **où** $\rho(\boldsymbol{r}) = 0 \;\; si\; \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r_k}$

$\int_V \rho(\boldsymbol{r})\, d^3r = q \quad si \quad r_k \in V$

$\int_V \rho(\boldsymbol{r})\, d^3r = Nq = Q \quad si\; V_{total}$

La distributions delta de Dirac en EM :

- permet d'utiliser une seule formulation pour représenter le champ créé par une distribution de charge $\rho(\mathbf{r})$ (régulière ou non) :

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(\boldsymbol{r}') \;\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} d^3r'$$

- vérifie $\Delta \frac{1}{\|r - \boldsymbol{r_0}\|} = 4\pi\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0})$

- permet de décrire mathématiquement les discontinuités (exemple des discontinuités de champ aux interfaces). Ceci est nécessaire si on considère les équations de Maxwell au sens des fonctions, car elles devront être complétées par des conditions de passage aux interfaces

Courant et charges

– *Distribution de Heaviside:*

Courant et charges

- *Le courant électrique:*
- Courant électrique: mouvement organisé de charges
- Si la charge *dQ* traverse une surface fixe *S* par intervalle de temps *dt, nous avons l'intensité électrique* i_S

$$i_S = \frac{dQ}{dt} \text{ , unités C.s}^{-1} \text{ ou A}$$

Par analogie avec les fluides, l'intensité i_S peut s'exprimer à partir d'un champ vectoriel appelé densité de courant **j**(**r**, *t*)

$$i_S = \frac{dQ}{dt} = \iint_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t).\boldsymbol{dS} = \iint_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t).\boldsymbol{n}\mathrm{dS}$$

avec $\boldsymbol{n}$ le vecteur normal orienté à S

- Quand un champ de vitesse **v**(**r**, *t*) caractérise le mouvement d'une densité de charge

ρ(**r**, *t*), on peut écrire

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = \rho(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t) \text{ , unité Am}^{-2}$$

- si les charges sont confinées dans une surface: $\boldsymbol{j_S}(\boldsymbol{r},t) = \sigma_S(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$, unité A.m^{-1}

- si les charges sont ponctuelles: $\boldsymbol{j} \quad (\boldsymbol{r},t) = \sum q_k \boldsymbol{v}_k \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_k,t)$

Courant et charges

- *Conservation de la charge*

Jusqu'à présent, les charges semblent toujours se conserver !

-> la seule façon de modifier la charge Q contenue dans un volume V entouré d'une surface S est de faire entrer ou sortir des charges :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -i_S = -\iint_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t).\boldsymbol{dS}$$

où $\boldsymbol{dS} = \boldsymbol{n}\, dS$ et $\boldsymbol{n}$ le vecteur normal orienté à S

Sachant que $\iint_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t).\boldsymbol{dS} = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3r$

et en utilisant la théorème de Ostrogradski : $\iint_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t).\boldsymbol{dS} = \iiint_V \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) d^3r$

On obtient l'équation locale de la conservation de la charge :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = 0}$$

Courant et charges

– Rappel : Deux formules d'intégration vectorielle

- **Formule d'Ostrogradski ou de la divergence:**

$$\int_V \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{F} d^3r = \int_S \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dS}$$

F(**r**) est une fonction vectorielle (continûment dérivable) définie sur un volume *V* délimité par une surface *S* fermée possédant une normale **n** pointant vers l'extérieur *d***S** = **n***dS*

avec le choix particulière:

- si $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \Psi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{c}$ où $\boldsymbol{c}$ est un vecteur constant : $\int_V \boldsymbol{\nabla}\Psi \quad d^3r = \int_S \Psi\, \boldsymbol{dS}$

- si $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{A}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{c}$: $\int_V \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \; d^3r = -\int_S \mathbf{A} \times \boldsymbol{dS}$

- **Théorème de Stokes:**

$$\int_S \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dS} = \int_C \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dl}$$

F(**r**) est une fonction vectorielle (continûment dérivable) définie sur une surface S délimité par un contour C fermée orienté.

avec le choix particulière $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \Psi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{c}$ où $\boldsymbol{c}$ est un vecteur constant : $\int_S \boldsymbol{\nabla}\Psi \times \boldsymbol{dS} = -\int_C \Psi\, \boldsymbol{dl}$

Sommaire

Équations de Maxwell dans le vide

– *Introduction, le vide, les opérateurs rotationnel, divergence et gradient.*

Introduction. Qu’entend-on par vide ?

- Le vide ne signifie pas vide de charges
- L’expression dans le vide signifie en fait dans un milieu suffisamment dilué pour que la matrice qui permet le transport des charges n’ait pas d’influence à part celle de maintenir des charges en place. Donc, pas d’influence sur **E** et **B**.
- Il est bien évident qu’il faut un milieu pour que les distributions de charges se maintiennent en place

! Les équations de Maxwell dans la matière, i.e. un milieu dense, seront vues ultérieurement.

Équations de Maxwell dans le vide

– *Introduction: le vide, les opérateurs rotationnel, divergence et gradient*

Opérateurs rotationnel, divergence et gradient.

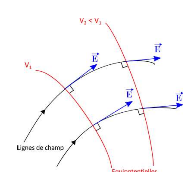
$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x,y,z,t) = \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

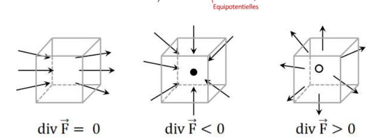
$$\mathrm{div}\overrightarrow{A}(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

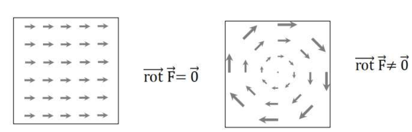
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f \qquad \Delta f = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}} f)$$

$$\Delta\vec{F} = \vec{\nabla}^2\vec{F} \qquad \Delta\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{F}) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F})$$







Source: PPTX S. AYRINHAC

Équations de Maxwell dans le vide

– *Les équations de Maxwell dans le vide*

$\nabla . \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, Maxwell–Gauss (MG)

$\nabla . \boldsymbol{B} = 0$, Maxwell–Flux (Mϕ)

$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$, Maxwell–Faraday (MF)

$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$, Maxwell–Ampère (MA)

- On peut ajouter la force exercée par une distribution de charges $\rho_0, \boldsymbol{j_0}$ sur une autre distribution $\rho_1, \boldsymbol{j_1}$:

$$\boldsymbol{F} = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_1(r,t) \boldsymbol{E_0}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{j_1}(\boldsymbol{r},t) \times \boldsymbol{B_0}(\boldsymbol{r},t) d^3 r$$

Équations de Maxwell dans le vide

– *Conditions limites à l'interface entre deux milieux*

- **Champ électrique:**

$$\boldsymbol{E_2} - \boldsymbol{E_1} = \frac{\sigma_S}{\epsilon_0} \boldsymbol{n_{1\to2}}$$

*! La composante tangentiel de **E** est continue* $E_{1T} = E_{2T}$

- **Champ magnétique:**

$$\boldsymbol{B_2} - \boldsymbol{B_1} = \mu_0 \boldsymbol{j_S} \times \boldsymbol{n_{1\to2}}$$

*! La composante normale de **B** est continue* $B_{1n} = B_{2n}$

Équations de Maxwell dans le vide

– Équation de propagation des champs EM

- Pour **E**:

nous prenons le ∇ (MF) et utilisons l'identité $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{F}) - \Delta \boldsymbol{F}$ (a),

on obtient $$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times E) = -\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B})$$

$$\nabla \frac{\rho}{\epsilon_0} - \Delta \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \boldsymbol{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t})$$

soit

$$\Delta \boldsymbol{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{\boldsymbol{\nabla} \rho}{\epsilon_0} + \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t}$$

En l'absence de charge et de courant: $\Delta \boldsymbol{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0$

L'équation de propagation du champ électrique dans le vide

- Pour **B**: $\boldsymbol{\nabla}$ (MA) + identité (a)

$$\Delta \boldsymbol{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\mu_0 \nabla \times \boldsymbol{j}$$

En l'absence de charge et de courant: $\Delta \boldsymbol{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$

L'équation de propagation du champ magnétique dans le vide

Équations de Maxwell dans le vide

– *Symétries des équations de Maxwell*

- **Principe de Curie**

Si une cause présente une certaine symétrie (ou invariance) alors son effet aura la même symétrie (ou invariance) ou une symétrie supérieure (ou invariance supérieure) à condition que la solution soit unique.

- Les *symétries* vont agir sur les directions des grandeurs vectorielles

- Les *invariances* vont agir sur les variables dont dépendent les champs

En EM, les causes sont les distributions ρ et $\boldsymbol{j}$ et la conséquence est la force exercée sur une autre charge (notez donc que ces ne sont pas exactement les champs).

- **Invariances du champ EM:** translation, axiale, cylindrique, sphérique

Exemples: - fil selon z: invariance de translation le long de la direction z →$\boldsymbol{E}(x,y)$
- une spire d'axe Oz parcourue par un courant d'intensité I : distribution de charges invariance axiale/de la rotation le long de l'axe (Oz) →**j**(r,z)
-une charge ponctuelle: symétrie sphérique →$E(r)$

Équations de Maxwell dans le vide

– *Symétries des équations de Maxwell*

- **Parité: -** opération de symétrie par rapport à un origine

  - Introduit 2 types de vecteurs: polaire [P(x)=-x] et pseudo-vecteur [P(x)=x]

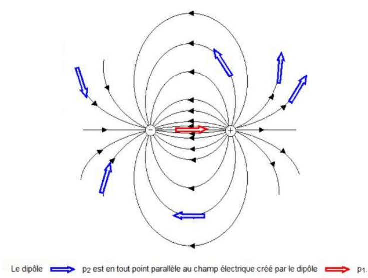
En effet, le vecteur **polaire** est symétrique par rapport à l'origine et le **pseudovecteur** ou **vecteur axial** est un vecteur de dimension 3 dont le sens dépend de l'orientation de l'espace

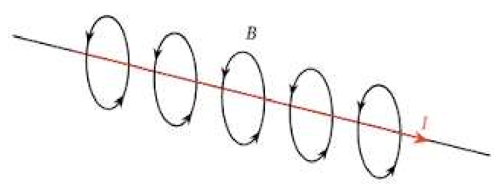
Exemple: dans $\boldsymbol{F} = q\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\,)$:

F et **v** sont des vecteurs polaires → même symétrie que les causes.

E aussi vecteur polaire.

B est un pseudo-vecteur ou vecteur axial, car son orientation dépend du produit vectoriel.





Si I est inversé, B change de sens

Équations de Maxwell dans le vide

– *Symétries des équations de Maxwell*

- ***Plan de symétries***
- ***Inversion spatiale et temporelle***
- ***Changements d'échelle***

Sommaire

Potentiels, potentiels vecteurs

- *Introduction*

Quelle est l'intérêt de travailler avec les potentiels ?

Ici nous allons remplacer **E** et **B**, par leurs potentiels respectives V et **A**

1. Passer de $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$ à $(V,\boldsymbol{A})$, on réduit le nombre de composantes de 6 à 4
2. Dans certains problèmes, il est possible de découpler les différentes composantes des potentiels, rendant les équations particulièrement simple à resoudre.

Pour définir ces potentiels, on va introduire un théorème très général de l'analyse vectoriel, le **théorème d'Helmholtz**

Potentiels, potentiels vecteurs

– *Théorème d'Helmholtz*

Tout champ vectoriel, **F**(**r**), à dérivées continues et défini sur $\mathbb{R}^3$ et décroissant à l'infini plus vite que 1/*r* peut toujours se décomposer comme la somme d'un champ rotationnel, **F**⊥, et d'un champ irrotationnel, **F**∥.

F = F⊥+F∥

où **F**∥$= -\boldsymbol{\nabla}\mathrm{V}(\boldsymbol{r})$ est un champ de gradient avec $\boldsymbol{\nabla} \times$ **F**∥ $= 0$

et **F**⊥$= \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ est un champ de rotation avec $\boldsymbol{\nabla}.$**F**⊥ $= 0$.

Plus précisément en EM, lorsque les intégrales suivantes convergent, on a :

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{\nabla}\mathrm{V}(\boldsymbol{r})$$

dont la decomposition est unique avec:

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r'}}.\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r'})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} d^3r' \quad \text{et} \quad \mathbf{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r'}} \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r'})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} d^3r'$$

où $V(\boldsymbol{r})$ est le potentiel et $\mathbf{A}(\boldsymbol{r})$ est le potentiel vecteur.

Potentiels, potentiels vecteurs

– *Potentiel, potentiel vecteurs*

Résultat :

1. Si on connaît ∇r ·**F**(**r**) et ∇r ×**F**(**r**) on peut alors calculer les integrals de V(**r**) et **A**(**r**) et en déduire le champ **F**(**r**). La donnée du rotationnel et de la divergence suffit à caractériser les champs **E** et **B**.

2. (MΦ) donne $\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{B} = 0$; le potentiel vecteur **A**(**r**) n'est défini que par son rotationnel $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\mathbf{x}\mathbf{A}(\mathbf{r})$, il reste donc une indétermination sur sa définition.

3. Puis, introduissant **B**=∇ ×**A**(**r**) en (MF), on obtient $\boldsymbol{\nabla} \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = 0$ ainsi, $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$

⟹ **A**(**r**)= **A'**(**r**)+$\nabla\Lambda$ et V(**r**)= V'(**r**)+ $\frac{\partial \Lambda}{\partial t}$ sont définies à unes constate près

4. Les équations de Maxwell deviennent:

$$\Delta V + \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}.\left(\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0 \boldsymbol{j}$$

! Remarque: le choix de jauge facilitera la résolution des équations couplées.

où $\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{A}$ doit être définie (càd la jauge).

Potentiels, potentiels vecteurs

- *Gauges*

- Le choix d'un autre potentiel vectoriel de la forme $\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A}(\mathrm{r}, \mathrm{t}) + \boldsymbol{\nabla}\Lambda(\mathrm{r}, \mathrm{t})$ ne modifie pas **B** .
- Choisir alors le potentiel transformé $V \to V' = V - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$ ne modifie pas non plus **E**.

  ⟹ Choisir le $\Lambda(\mathbf{r}, \mathrm{t})$, donc fixer **A** et V, s'appelle fixer une transformation de jauge.

Cas particuliers:

- **jauge de Coulomb** : $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}$=0 , le potentiel suit les lois électrostatiques

$$\Delta V_C = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad et \qquad \Delta \boldsymbol{A_C} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A_C}}{\partial t^2} = -\mu_0 \boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial \ \ V_C}{\partial t}$$

si $\mathrm{V_C}$ vérifie l'équation de poisson et $\mathrm{V_C}$ est nul à l'infinie, on retombe sur l'équations V d'électrostatique et **j**= **j**⊥. Cette jauge est utilisée dans la QED

- **jauge de Lorentz** : $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, on obtient 4 équations des ondes identiques découplées:

$$\Delta V_L - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V_L}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \text{et} \qquad \Delta \boldsymbol{A_L} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A_L}}{\partial t^2} = -\mu_0 \boldsymbol{j}$$

Juage utilisée dans les problèmes de propagation et de rayonnement, ainsi qu'en relativité.

Sommaire

Énergie, quantité de mvt et moment angulaire du champ EM

– *Énergie - conservation de l'énergie*

- **Energie électrostatique**: le travail fourni par un opérateur pour construire une distribution de charges $\rho(\mathbf{r})$ en amenant les charges de l'infini

$$U_E = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\boldsymbol{r})V(\boldsymbol{r})\, d^3r = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{E}^2(r)\, d^3r$$

- **Énergie magnétostatique**: le travail fourni par un opérateur pour construire une distribution de courant $\mathbf{j}(\mathbf{r})$

$$U_B = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{r})\, d^3r = \frac{1}{2\mu_0}\int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{B}^2(r)\, d^3r$$

! Les démonstrations seront faites en électrostatique et magnétostatique

- **Puissance mécanique**: le taux auquel le champ **E** et **B** travaillent sur une collection de particules confinées dans un volume V

$$P_{mech} = \frac{dW_{meca}}{dt} = \boldsymbol{F}_L \cdot \boldsymbol{v} = q\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}; \qquad \boldsymbol{B} \text{ ne travaille pas } (\boldsymbol{B} \perp \boldsymbol{v})$$

s'il existe une densité de charge $\rho(\mathbf{r}, t)$ et une densité de courant de charges libres $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ non nulles

$$P_{mech} = \int_V (\rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)\, d^3r = \int_V \boldsymbol{jE}\, d^3r$$

Énergie, quantité de mvt et moment angulaire du champ EM

- **Puissance mécanique**:

$$P_{meca} = \int_V (\rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)\, d^3r = \int_V \boldsymbol{jE}\, d^3r$$

En utilisant MA,
$$= \int_V \left(\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{B} - \boldsymbol{\varepsilon_0}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\cdot\boldsymbol{E}d^3r$$

En utilisant l'identité vectorielle:

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}.(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E}.(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{B}.\frac{\boldsymbol{\partial B}}{\boldsymbol{\partial t}} - \boldsymbol{E}.(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})$$

On obtient
$$P_{meca} = -\int_V \left(\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial\boldsymbol{B^2}}{\partial t} + \frac{\epsilon_0}{2}\frac{\partial\boldsymbol{E}^2}{\partial t}\right) d^3r + \int_V \frac{1}{\mu_0}\nabla.(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})d^3r$$

Par substitution et réorganisation des termes, on obtient:

<u>**Le théorème de Poynting**</u>

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B^2} + \frac{\epsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2\right) d^3r = -\int_V \boldsymbol{j}.\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)d^3r - \int_S \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\boldsymbol{dS}$$

càd
$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{u_{EM}\ dans\ V}) = -\begin{pmatrix}\mathrm{P_{mecanique}} \\ \text{donnée aux charges}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Flux d'énergie} \\ \text{sortant à travers la surface S}\end{pmatrix}$$

Énergie, quantité de mvt et moment angulaire du champ EM

- **Le théorème de Poynting**:
  - On identifie l'énergie électromagnétique à $u_{EM} = \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B^2} + \frac{\epsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2$ *[Jm-3]*
  - On introduit le vecteur de Poynting:

$\Pi = \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})$ *[énergie/volume · vitesse= W/m2]*

densité de courant d'énergie

où $\int_S \boldsymbol{\Pi dS} = -\frac{\boldsymbol{dU_{meca}+U_{EM}}}{\boldsymbol{dt}} = -\frac{\boldsymbol{dU_{total}}}{\boldsymbol{dt}}$

On peut écrire la **loi locale de conservation de l'énergie :**

$$\frac{\partial}{\partial t}u_{EM} + \boldsymbol{j.E(r}, t) = -\boldsymbol{\nabla.\Pi}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_{EM} + \boldsymbol{\nabla.\Pi} = -\boldsymbol{j.E(r}, t)$$

À quelle loi resemble t-elle ?

Énergie, quantité de mvt et moment angulaire du champ EM

  - *Quantité de Mouvement du champ EM - Conservation de la quantité de mouvement*

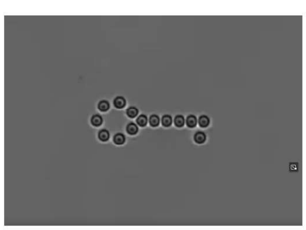
Énergie, quantité de mvt et moment angulaire du champ EM

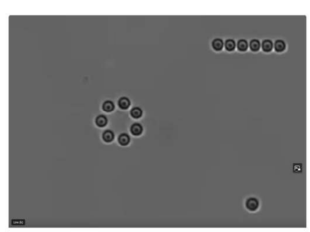
– *Moment cinétique du champ EM - Conservation du moment cinétique*

Énergie, quantité de mvt et moment angulaire du champ EM

– *Applications: Pinces optiques*

- « The 2018 Nobel Prize in Physics was awarded "for groundbreaking inventions in the field of laser physics" with one half to Arthur Ashkin "for the optical tweezers and their application to biological systems. »
- Le moment porté par le champ électromagnétique permet de « piéger » des microparticules et de les déplacer





Images de particules piégées par laser et déplacées : pince optiques. Elliot Scientific Ltd.

Deux exemples de pinces optiques :

- youtu.be/3SJiKr8LbP8 ?t=167
- youtu.be/Sq7GaO8iqu8 ?t=67 et youtu.be/Sq7GaO8iqu8 ?t=244

Résumé de contenues à retenir

- **Courants et charges**
  - *Principales propriétés de la distribution de Dirac et manipulations de base*
  - *Transition discret/continuum grâce aux distributions*
  - *Divergence et formule de Stokes*
  - *Équation de conservation de la charge*
- **Équations de Maxwell dans le vide**
  - *Équations de Maxwell dans le vide et conditions de passage à l'interface*
  - *Symétries des équations de Maxwell*
  - *Trouver et savoir utiliser les symétries pour simplifier les champs*
  - *Comment dériver les équations de propagation*
- **Potentiels, potentiels vecteurs**
  - *Décomposition de Helmholtz* $\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{\nabla}V+\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ *(pas les expressions A et V)*
  - *Définitions du potentiel et du potentiel vectorie*
  - *Jauge de Coulomb, jauge de Lorentz et équations pour* V *et* $\boldsymbol{A}$ *dans les deux cas*
- **Énergie, quantité de mouvement et moment angulaire du champ électromagnétique**
  - *Théorème de Poynting, intégrale et forme locale*
  - *Densités de moment linéaire et angulaire*
  - *Existence d'un tenseur des contraintes et d'équations de conservation de la quantité de mouvement*