Université Paris-Saclay, Faculté des Sciences d'Orsay, M1 MFL

TD1 MMC Fluides/Mécanique des Fluides
Analyse dimensionnelle

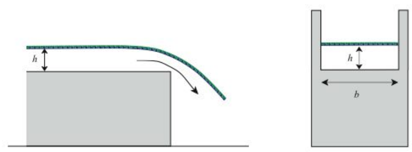
1 Force exercée par un fluide visqueux sur une sphère

On considère le mouvement à la vitesse V constante, d'une particule sphérique de diamètre d dans un fluide visqueux de viscosité dynamique μ. On veut déterminer l'expression de la force de traînée F en fonction de d, V, μ (grandeurs caractéristiques du problème). Les forces d'inertie sont négligeables devant la force de viscosité.

1. Écrire les équations aux dimensions de F, d, V, μ en fonction de $(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{T})$ (masse, longueur, temps).
2. Déduire le nombre minimum r de variables nécessaires pour exprimer les paramètres F, d, V, μ, puis le nombre de paramètres adimensionnés indépendants.
3. Chercher le(s) terme(s) π comme un produit des puissances des r paramètres indépendants et du quatrième paramètre restant.
4. Comparer la relation trouvée avec l'expression de la force $F = 3\pi\mu dV$ établie par G.G. Stokes en résolvant les équations de Navier-Stokes au prix d'un long calcul théorique, et dite "Force de Stokes". Conclure.
5. Que devient l'analyse si on prend en compte aussi la masse volumique du fluide.

2 Débit d'un déversoir

On suppose que le débit volumique Q d'un déversoir rectangulaire, en écoulement permanent, est une fonction de la hauteur h du fluide en amont du déversoir, de la largeur b du déversoir et de l'accélération de la gravité g (le fluide ne s'écoule que sous l'action de son poids).



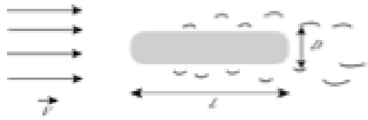
Vue de côté et de face du déversoir

1. Écrire les équations aux dimensions de Q, h, b, g.
2. Déduire le nombre minimum r de grandeurs nécessaires pour exprimer les paramètres Q, h, b, g puis le nombre de paramètres adimensionnés indépendants.
3. A partir de la liste des paramètres Q, h, b, g sélectionner r paramètres indépendantes.
4. Chercher les termes π comme le produit des puissances de ces r paramètres indépendants et d'un autre paramètre.
5. Déduire la relation adimensionnée $\frac{Q}{\sqrt{gh^5}} = \Phi\left(\frac{h}{b}\right)$. Essayer d'imaginer quelle pourrait être la forme de la fonction ϕ. Que peut-on alors en déduire sur la dépendance de Q avec h?
6. Que devient l'expression de Q pour un déversoir de section triangulaire?
7. Que devient l'analyse en considérant que Q devrait dépendre de la masse volumique ρ du fluide. Que devient-elle en considérant maintenant que Q devrait dépendre aussi de la viscosité η du fluide?

3 Modèles et similitudes

Un modèle (ou maquette) est une représentation d'un système physique qu'on peut utiliser pour prévoir le comportement d'un prototype dans certaines conditions. Tous les paramètres adimensionnés correspondants entre modèle et prototype doivent être égaux : c'est la condition de similitude (similitude géométrique, dynamique, cinématique, etc), que nous allons appliquer ici au cas d'un sillage oscillatoire avec génération de tourbillons.

Un corps de section transverse de largeur D et de longueur L, placé dans l'écoulement d'un fluide incompressible à vitesse uniforme V, peut développer dans son sillage des tourbillons qui se détachent régulièrement à la fréquence ω (allée de tourbillons de BÉNARD-VON KÁRMÁN). La structure élastique du corps peut alors se mettre à vibrer en résonance avec la fréquence de forçage ω, et conduire à un endommagement de la structure.



On considère en illustration la structure d'un pont piétonier d'épaisseur $D = 0,1$ m et de longueur transverse $L = 0,3$ m, et l'on veut connaître pour une vitesse du vent $V = 50$ km/h la fréquence ω correspondante de l'allée de tourbillons. On prendra pour masse volumique et viscosité dynamique de l'air respectivement $\rho = 1,3$ kg·m^{-3} et $\mu = 1,8 \cdot 10^{-5}$ Pa·s. Les grandeurs caractéristiques du problème sont les longueurs D et L du corps, la vitesse V, la masse volumique ρ et la viscosité dynamique μ du fluide. La fréquence ω doit donc être une fonction de ces grandeurs:

$$\omega = f(D, L, V, \rho, \mu).$$

A partir d'une maquette à échelle réduite de dimension $D_m = 20$ mm qui a été testée dans un tunnel à eau, on mesure une fréquence des tourbillons $\omega_m = 50$ Hz. On prendra pour masse volumique et viscosité dynamique de l'eau respectivement $\rho_m = 10^3$ kg/m^3 et $\mu_m = 1 \cdot 10^{-3}$ Pa·s.

1. Écrire les équations aux dimensions de $\omega, D, L, V, \rho, \mu$. Déduire le nombre minimum r de variables nécessaires pour exprimer les paramètres $\omega, D, L, V, \rho, \mu$, puis le nombre de paramètres adimensionnées indépendantes.
2. Déterminer les paramètres adimensionnés
3. Déterminer la dimension L_m du modèle (similitude géométrique).
4. Déterminer la vitesse de l'eau dans le modèle (similitude géométrique et similitude du nombre de REYNOLDS $Re = \frac{\rho V D}{\mu}$). A quelle vitesse faudrait-il souffler si l'expérience modèle était faite également dans l'air?
5. Déduire la fréquence des tourbillons sur le prototype (similitude du nombre de STROUHAL $St = \frac{\omega D}{V}$).