Feuille d'exercices 1

Logique et raisonnements

Exercice 1.1. Écrire les énoncés suivants en utilisant les symboles logiques :
1. Le carré de tout réel est positif.
2. Certains réels sont supérieurs à leur carré.
3. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
4. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
5. Il existe un entier multiple de tous les autres.
6. Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.
7. Étant donné trois réels, il en existe au moins deux de même signe.

Exercice 1.2. Dire si chacun des énoncés suivant est vrai ou faux.
1. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ 2x + y > 0$
2. $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ 2x + y > 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ 2x + y > 0$
4. $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ 2x + y > 0$
5. $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ y^2 > x$
6. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ (2x + y > 0 \text{ ou } 2x + y = 0)$
7. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ (2x + y > 0 \text{ et } 2x + y = 0)$

Exercice 1.3. Tautologies
Montrer que les énoncés suivant sont des tautologies.
1. $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$
2. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$
3. $P \Rightarrow ((\text{non } P) \Rightarrow Q)$
4. $(\forall x\ (P(x) \text{ ou } Q(x))) \Rightarrow ((\forall x\ P(x)) \text{ ou } (\exists x\ Q(x)))$
5. $(\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))) \Rightarrow ((\exists x\ P(x)) \Rightarrow (\exists x\ Q(x)))$

Exercice 1.4. Équivalences
Montrer que :
1. P et Q est équivalent à Q et P
2. P ou P est équivalent à P
3. P ou Q est équivalent à $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$
4. $P \Leftrightarrow Q$ est équivalent à non $((\text{non } P) \Leftrightarrow Q)$

5. $P \Rightarrow (Q \text{ ou } R)$ est équivalent à Q ou $(P \Rightarrow R)$

Exercice 1.5. Négation

1. Montrer que non $(P \Rightarrow Q)$ est équivalent à P et non Q.

2. En utilisant l'écriture $\forall x\ (x \in X \Rightarrow P(x))$ pour $\forall x \in X\ P(x)$, donner une écriture équivalente pour non $(\forall x \in X\ P(x))$.

Exercice 1.6. Négation

Donner des formulations simples des négations des énoncés suivants :

1. $1 \leq x \leq 3$

2. $\forall A \in \mathbb{R}\ \exists x_0 \in \mathbb{R}\ \forall x \geq x_0\ f(x) > A$

3. $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \leq M$

Exercice 1.7. Négation

1. Donner une formulation équivalente de l'énoncé $\exists! x\ P(x)$ (il existe un unique x tel que $P(x)$) sans utiliser le symbole !.

2. Donner une formulation simple de la négation de l'énoncé donné à la question précédente.

Exercice 1.8. Montrer que les énoncés suivants ne sont pas des tautologies (indication : on pourra utiliser pour $P(x)$ et $Q(x)$ des énoncés du type $x \geq a$ pour des valeurs de a bien choisies).

1. $((\exists x\ P(x)) \text{ et } (\exists x\ Q(x))) \Rightarrow (\exists x\ (P(x) \text{ et } Q(x)))$

2. $(\forall x\ (P(x) \text{ ou } Q(x))) \Rightarrow ((\forall x\ P(x)) \text{ ou } (\forall x\ Q(x)))$

Exercice 1.9. Raisonnement par disjonction des cas

1. Montrer que $((P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \text{ ou } Q) \Rightarrow R)$ est une tautologie.

2. Application :

a. Montrer que pour tout entier impair n, il existe un entier k tel que $n = 4k+1$ ou il existe un entier k tel que $n = 4k+3$.

b. En déduire que pour tout entier impair n, il existe un entier m tel que $n^2 = 8m+1$.

Exercice 1.10. Contraposition

Soit un réel x. Montrer que : $(\forall \epsilon > 0\ |x| \leq \epsilon) \Rightarrow x = 0$.

Exercice 1.11. Démonstration par l'absurde

Soit $n \geq 1$ et $x_0, \ldots, x_n$ $n+1$ nombres réels tels que $0 < x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n < 1$. On veut montrer par l'absurde l'énoncé P : il existe deux réels parmi $x_0, \ldots, x_n$ qui sont distants de moins de $\frac{1}{n}$ l'un de l'autre.

1. Réécrire l'énoncé P en utilisant les symboles logiques.

2. Écrire la négation de P.

3. Démontrer par l'absurde que P est vrai.

Exercice 1.12. Démonstrations par récurrence

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0^2 + 1^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $n! \leq n^n$ (on rappelle que $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$).

Exercice 1.13. Une variante des démonstrations par récurrence
1. Soit $P(n)$ un énoncé qui dépend d'un entier $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(0)$ est vrai et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(m)$ est vrai pour tout $m \leq n$, alors $P(n+1)$ est vrai. Montrer que $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. Indication : on pourra introduire l'énoncé $Q(n) : \forall m \leq n \; P(m)$.
2. Application : montrer que tout entier $n \geq 2$ peut être écrit sous la forme d'un produit de nombres premiers.

Exercice 1.14. Soit X un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{N}$. Le but est de montrer que X admet un plus petit élément. On suppose par l'absurde que X n'admet pas de plus petit élément. On pose $P(n) : n \notin X$.
1. Montrer que $P(0)$ est vrai.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(m)$ est vrai pour tout $m \leq n$, alors $P(n+1)$ est vrai.
3. Conclure en utilisant l'exercice précédent.

Exercice 1.15. Les raisonnnements suivants sont ils valides ? On pourra si besoin réécrire les énoncés en utilisant les connecteurs logiques.
1. Si les poules ont des dents, alors les poules sont des mammifères. Or les poules ne sont pas des mammifères. Donc les poules n'ont pas de dents.
2. Pour que Pierre réussisse le cours d'algèbre, il est nécessaire et suffisant que les trois conditions suivantes soient réunies : qu'il assiste au cours, qu'il ne bavarde pas avec sa voisine et qu'il écoute le professeur. Mais s'il écoute le professeur, c'est qu'il assiste au cours et qu'il ne bavarde pas avec sa voisine. Donc il est nécessaire et suffisant que Pierre écoute le professeur pour qu'il réussisse le cours d'algèbre.
3. Si Pierre vient à la fête, alors Marie est triste. Si Marie est triste, alors Jean ne vient pas à la fête. Si Jean ne vient pas à la fête, alors Pierre ne vient pas non plus. Donc Pierre ne vient pas à la fête.

Exercice 1.16. Une énigme
Un voyageur perdu dans le désert arrive à une bifurcation à partir de laquelle la piste se divise en deux. Chaque piste peut soit mener à une oasis, soit se perdre dans le désert. Chaque piste est gardée par un sphinx.
Le sphinx de droite dit : "Une au moins des deux pistes conduit à une oasis."
Le sphinx de gauche dit : "La piste de droite se perd dans le désert."
Soit les deux sphinx disent la vérité, soit ils mentent tous les deux.
Le voyageur voudrait savoir si une piste mène vers une oasis, et si oui, laquelle.
1. Traduire les données du problème en utilisant des connecteurs logiques.
2. Résoudre l'énigme.