Exercices : Feuille 2

Exercice 1 (démonstration d'une propriété de cours).
Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, et soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
Démontrer à l'aide des fonctions de répartitions que

$$\frac{X - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Exercice 2 ().
Soit $\lambda > 0$ et soit X une variable suivant la loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Soit $\mu > 0$.
Démontrer à l'aide des fonctions de répartition que

$$\mu X \sim \mathcal{E}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

Exercice 3 (Calculs d'espérance et variance).
Soit $\lambda > 0$ et soit X une variable suivant la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
Démontrer que

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Exercice 4 ().

1. Montrer qu'il existe un réel c pour lequel la fonction $x \mapsto \frac{c}{1+x^2}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$
2. Une variable aléatoire réelle admettant une telle densité possède-t-elle une espérance ?
3. Montrer que si X est une variable aléatoire réelle de densité f , alors X et $\frac{1}{X}$ ont même loi.

Exercice 5 ().
Dans une station-service, on modélise la demande hebdomadaire en essence, en milliers de litres, par une variable aléatoire X de densité

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x)^4 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de c.
2. La station est réapprovisionnée chaque lundi à 20h. Quelle doit être la capacité du réservoir d'essence pour que la probabilité d'épuiser ce réservoir soit inférieure à 10^{-5} ?

Exercice 6 ().
La taille X d'un homme français tiré au sort dans la population est supposée suivre une loi normale de moyenne 172cm et d'écart-type 14cm.

1. Quelle est la probabilité que X soit inférieure à 160cm ?
2. Quelle est la probabilité qu'un homme tiré au sort mesure plus de deux mètres ?
3. Que vaut $\mathbb{P}(165 < X < 185)$?
4. La taille des femmes françaises est modélisée par une loi gaussienne de moyenne 162cm et d'écart-type 12cm. Quelle est la probabilité qu'un homme tiré au sort soit plus grand qu'une femme choisie au hasard ?

Exercice 7 ().
La mesure de la concentration d'ozone dans l'air (en μg/m^3) est modélisée par une variable aléatoire X de loi $\mathcal{N}\left(m; \sigma^2\right)$ avec $\sigma^2 = 3,1$. Un niveau d'alerte pollution est franchi si la concentration moyenne d'ozone dans l'air dépasse 180μg/m^3.

1. Quelle est l'unité de m ? de σ ? Que représentent m et σ ?
2. On effectue des mesures un jour donné, et l'on suppose que ce jour là la concentration moyenne d'ozone dans l'air est de 178μg/m^3 (mais l'expérimentateur ne le sait pas sinon il n'aurait pas besoin de faire des mesures).
   (a) Quelle est la probabilité qu'une mesure unique soit supérieure à 180 ?
   (b) Quelle est la probabilité que la moyenne de trois mesures soit supérieure à 180 ?
   (c) Combien de mesures faut-il réaliser pour que la probabilité que la moyenne de ces mesures dépasse 180 soit inférieure à 1% ?