Exercices : Feuille 1

Exercice 1 ().
Soit B une variable aléatoire positive ($\Omega(B) = \mathbb{R}_+$) telle que la densité de B s'écrive, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$f_B(t) = \exp(-t).$$

1. Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire B.
2. Calculer $\mathbb{P}(B \geq 4)$.

Exercice 2 ().
Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{1}{2}t & 0 \leq t \leq 2 \\ 1 & t \geq 2 \end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de F_X.
2. Calculer la densité f_X de X.
3. Calculer $\mathbb{P}(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4})$.
4. Calculer $\mathbb{P}(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4})$.

Exercice 3 (). Soit A une variable aléatoire avec $\mathbb{P}(A = 1) = \frac{1}{10}, \mathbb{P}(A = 2) = \frac{3}{10}$ et $A(\Omega) = \{1, 2, 4\}$.

1. Donner la distribution de A.
2. Calculer et représenter la fonction de répartition de la variable aléatoire F_A de A.
3. Calculer $\mathbb{P}(2 < A \leq 4)$ et $\mathbb{P}(2 \leq A \leq 4)$

Exercice 4 ().
Dans le cadre d'une analyse de pratiques agricoles, on contrôle sur une parcelle la proportion d'engrais utilisé par rapport à une norme recommandée. Cette proportion, notée W, est mesurée en pourcentage de la quantité maximale autorisée. Par conséquent, W varie entre 0 (aucun engrais utilisé) et 1 (utilisation maximale recommandée).
Les résultats de ces contrôles varient en raison de nombreux facteurs : les pratiques des agriculteurs, la variabilité des besoins selon les cultures, et les conditions environnementales. Ces variations rendent le pourcentage de conformité de l'utilisation d'engrais un phénomène aléatoire.
On modélise la proportion W d'engrais utilisé par hectare par une variable aléatoire continue sur l'intervalle $[0, 1]$ avec une densité de probabilité donnée par :

$$f_W(w) = \begin{cases} k(1 - w^2) & \text{si } \ 0 \leq w \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où k est une constante de normalisation.

1. Déterminez la valeur de la constante k.
2. Déterminez la fonction de répartition F_W.
3. Calculez l'espérance $E[W]$ et la variance $Var(W)$ de la proportion d'engrais utilisé.
4. Sur un graphique, représenter le quantile d'ordre 0,95. Que penser d'une parcelle sur laquelle on a mesuré une proportion d'engrais supérieure à ce quantile ?

Exercice 5 ().
L'exposition à la pollution atmosphérique est variable dans le temps et dans l'espace, en fonction de nombreux facteurs tels que la circulation, les conditions météorologiques, l'emplacement géographique, et les émissions industrielles. Ce caractère aléatoire est inhérent à la nature changeante et complexe des sources de pollution.
L'exposition à la pollution atmosphérique (mesurée en $\mu g/m^3$ de PM2.5) est modélisée par une variable aléatoire V continue dont la fonction de répartition est donnée par :

$$F_V(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ v < 0 \\ 1 - e^{-\frac{v}{5}} & \text{si } \ v \geq 0 \end{cases}$$

1. Déterminez la fonction de densité de probabilité $f_V(v)$ de V.
2. Calculez l'espérance $E[V]$ et la variance $Var(V)$ de l'exposition à la pollution.
3. Quelle est la probabilité que l'exposition dépasse $8\mu g/m^3$?
4. Expliquer comment la notion de quantile pourrait permettre de définir un pic anormal de pollution.

Exercice 6 (Théorème de König-Huygens).
Soit X une variable aléatoire admettant une espérance et une variance.
Démontrer que

$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

Exercice 7 (Inégalité de Markov).
Soit X une variable aléatoire à valeurs strictement positives, à densité, et admettant une espérance.
Démontrer que pour tout réel $a > 0$:

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$$

Cette inégalité est en fait valide même si X n'admet pas de densité.

Exercice 8 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev).
Soit X une variable aléatoire d'espérance $E[X]$ et de variance σ^2.
En appliquant l'inégalité de Markov à une variable bien choisie, démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}[X]\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\,.$$