Séance 3 : Lois de probabilités usuelles et applications

UE Probabilités et Statistiques pour la Biologie

Mélina Gallopin, Alain Virouleau

September 19, 2024

Loi Exponentielle

Définition

Une variable aléatoire X suit la *loi Exponentielle* de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$, notée $\mathcal{E}(\lambda)$ si $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ et X a pour densité la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \; f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$\left(\int_0^{+\infty} \cdot - \right)$$

Utilisée pour modéliser : des temps d'attente, des durées de vie,...

Espérance et Variance :

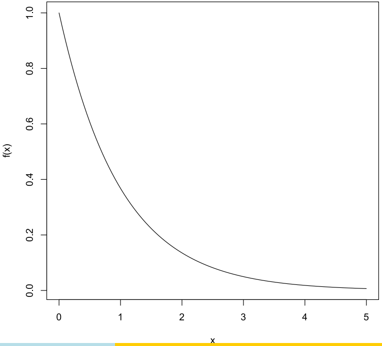
$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Loi Expontielle

Syntaxes R pour la visualisation et/ou la simulation :

```
# Une réalisation avec lambda = 1
rexp(n=1, rate = 1)
# 10 réalisations avec lambda = 1
rexp(n=10, rate = 1)
```

```
grille=seq(0, 5,
    length.out=100)
plot(grille,
    dexp(grille,1),
    type="l",
    ylab="f(x)",
    xlab="x")
```



Loi Normale

Définition

Une variable aléatoire X suit la *loi Normale* de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^\star$, notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et X a pour densité la fonction définie par

moyenne variance

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\mathcal{N}(0,1)$: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}$

Utilisée pour modéliser : TOUT, LA LOI NORMALE C'EST LA VIE

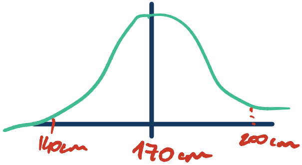
Espérance et Variance :

$$E[X] = \mu \qquad V(X) = \sigma^2$$

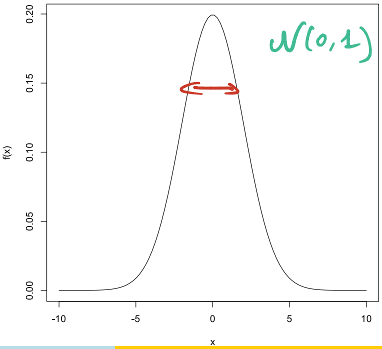
Loi Normale

Syntaxes R pour la visualisation et/ou la simulation :

```
# Une réalisation
rnorm(n = 1, mean = 0, sd = 2)
# 10 réalisations
rnorm(n = 10, mean = 0, sd = 2)
```




```
grille=seq(-10, 10,
    length.out=1000)
plot(grille,
    dnorm(grille,
      mean = 0, sd = 2),
    type="l",
    ylab="f(x)",
    xlab="x")
```



Loi du Chi2

Définition

Une variable aléatoire X suit la *loi du Chi2* de paramètre $n \in \mathbb{N}^\star$, notée $\chi_2(n)$ si

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|^2$$

avec X_i des variables indépendantes toutes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$

Utilisée pour modéliser : ... (pas vraiment utilisée pour modéliser directement un phénomène)

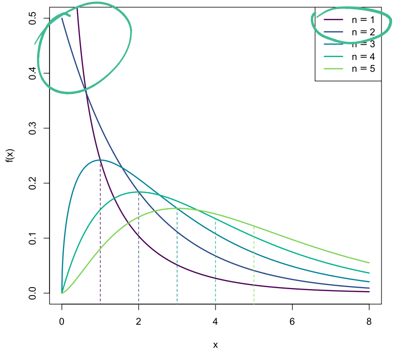
Espérance et Variance :

$$\left(\quad E[X] = n \qquad V(X) = 2n \quad \right)$$

Loi du Chi2

Syntaxes R pour la visualisation et/ou la simulation :

```
# Une réalisation
rchisq(n = 1, df = 3)
# 10 réalisations
rchisq(n = 10, df = 3)
```



Loi de Student (William Gosset)

Définition

Une variable aléatoire X suit la *loi de Student* de paramètre $r \in \mathbb{N}^\star$, notée $\mathcal{T}(r)$ si

$$X = \frac{U}{\sqrt{V/r}}$$

avec $U \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $V \sim \chi_2(r)$ des variables indépendantes.

Utilisée pour modéliser : ... (pas vraiment utilisée pour modéliser directement un phénomène)

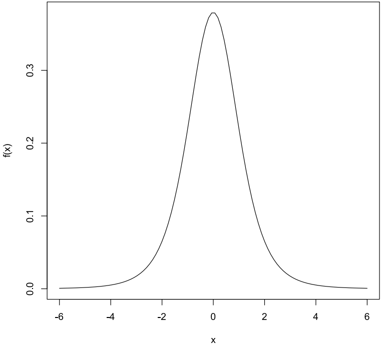
Espérance et Variance :

$$\left(E[X] = 0 \qquad V(X) = \frac{r}{r-2} \text{ si } r > 2 \right)$$

Loi de Student (William Gosset)

Syntaxes R pour la visualisation et/ou la simulation :

```
# Une réalisation
rt(n = 1, df = 3)
# 10 réalisations
rt(n = 10, df = 3)
```



Et il y en a d'autres...

"centrer la variable"

Si X est une variable aléatoire, on dit que $Y = \frac{X - E[X]}{\sqrt{V(X)}}$ est la version "réduire" "centrée-réduite" de la variable X. En particulier, $E[Y] = 0$ et $V(Y) = 1$.

Remarque : la connaissance de la loi de X est équivalente à la connaissance de celle de sa version centrée-réduite.

Propriété spécifique à la loi Normale

Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors

$$\frac{X - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Stabilité de la loi Normale

Si $X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ sont indépendantes, alors

$$X + Y \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

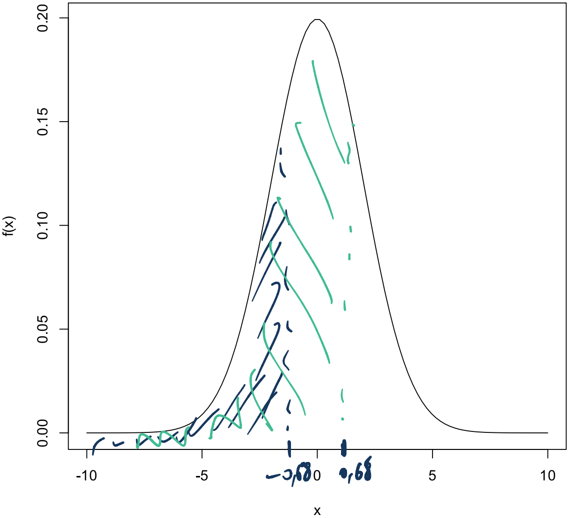
$P(X \leq t_1 \cap Y \leq t_2)$
$= P(X \leq t_1) \times P(Y \leq t_2)$

Rappel de la définition

Soit X une v.a. et $p \in [0;1]$. Le quantile d'ordre p est défini de la manière suivante :

$$F_X^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R}; F(x) \geq p\}$$

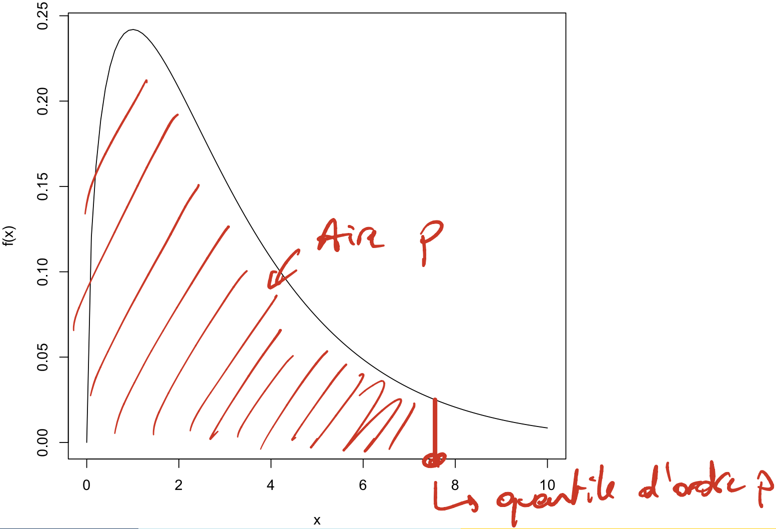
Sur une loi continue



$F_Z(-t)$

$= 1 - F_Z(t)$

Sur une loi continue



Lecture de tables

Calculer les probabilités suivante lorsque $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$:

- $\mathbb{P}(0 < Z < \frac{1}{2}) =$ $F_Z(\frac{1}{2}) - F(0)$
- $\mathbb{P}(-0,68 < Z < 0) =$ $\underbrace{F_Z(0)}_{=\frac{1}{2}} - \boxed{F_Z(-0,68)} = 1 - F_Z(0,68)$
- $\mathbb{P}(-0,46 \leq Z < 2,21) =$
- $\mathbb{P}(0,81 \leq Z \leq 1,94) =$

Calculer les quantiles d'ordre 0.95 de :

- La loi $\mathcal{N}(0,1)$:
- La loi $\mathcal{B}(30, 0.3)$:
- La loi $\mathcal{T}(10)$:
- La loi $\chi_2(20)$:

Exemple d'utilisation 1

?

Déterminer le plus petit $a \in \mathbb{R}$ tel que $\underbrace{\mathbb{P}(X > \boxed{a}) < 0,05}_{\text{lien avec un quantile}}$ lorsque :

- $X \sim \mathcal{N}(0,1)$:
- $X \sim \mathcal{T}(15)$:
- $X \sim \mathcal{N}(2,4)$:
- $X \sim \chi_2(10)$:

$\iff 1 - \mathbb{P}(X \leq a) < 0,05$

$\iff \mathbb{P}(X \leq a) > 0,95$

↳ quantile d'ordre 0,95

quantile d'ordre p : chercher b tq $\mathbb{P}(X \leq b) = p$