# Séance 2 : Caractéristiques d'une variable aléatoire

UE Probabilités et Statistiques pour la Biologie

Mélina Gallopin, Alain Virouleau

September 12, 2024

1. Représentations des observations
   - Modélisées par une variable aléatoire discrète
   - Modélisées par une variable aléatoire continue

2. Des observations au formalisme probabiliste

3. Densité, fonction de répartition
   - Propriétés
   - Utilité

# Rappels de définition

**Définition**

Une variable aléatoire $X$ est dite *discrète* si elle a un nombre fini de valeurs possibles, ou bien infini mais que l'on peut énumérer.

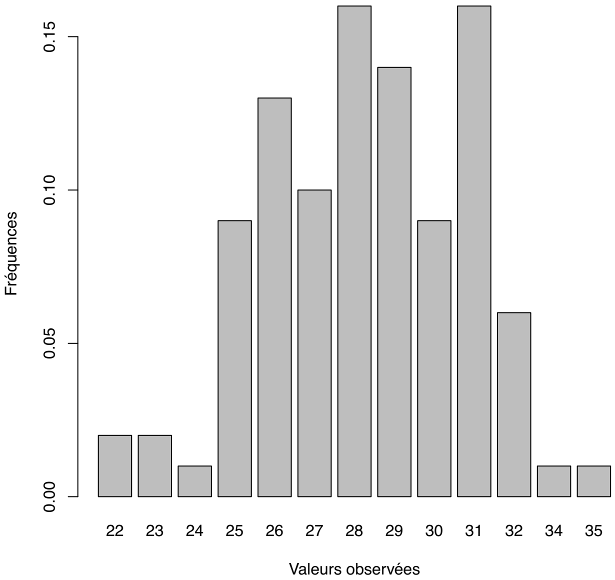
# Rappels de définition

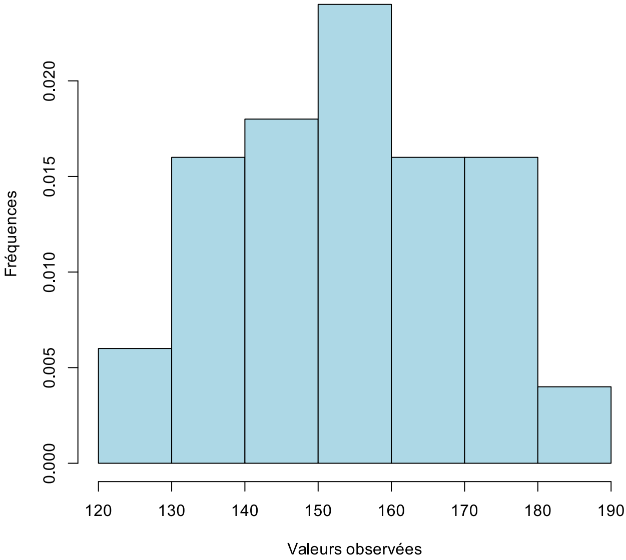
**Définition**

Une variable aléatoire $X$ est dite *discrète* si elle a un nombre fini de valeurs possibles, ou bien infini mais que l'on peut énumérer.

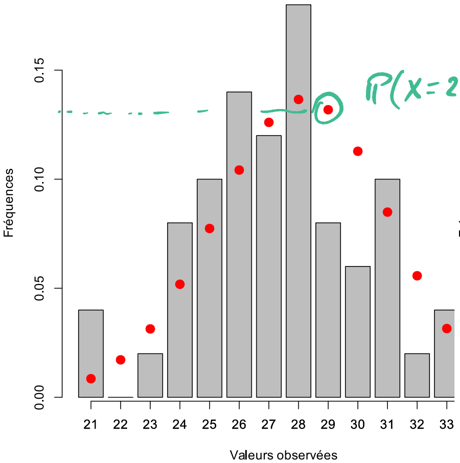
En Statistiques, la manière adoptée pour représenter une répétition d'observations associées à une variable aléatoire discrète est un **diagramme en fréquences** avec :

- en abscisses les valeurs mesurées
- en ordonnée les fréquences auxquelles ces valeurs ont été observées

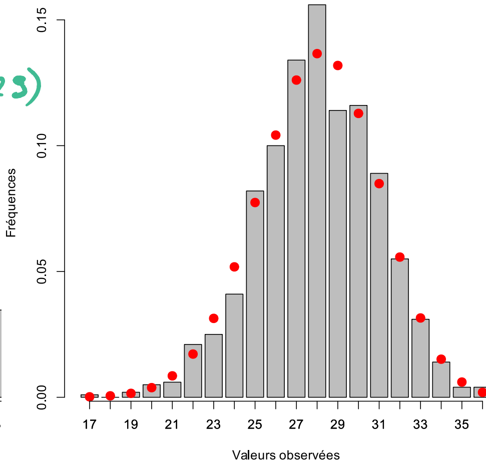

Fréquences
0.00
0.05
0.10
0.15
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
34
35
Valeurs observées


Fréquences
0.000
0.005
0.010
0.015
0.020
120
130
140
150
160
170
180
190
Valeurs observées

# Loi/Distribution discrète




$\mathbb{P}(X=29)$



# Loi/Distribution discrète

La loi d'une variable aléatoire discrète $X$ pouvant prendre les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ est la donnée des probabilités $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ telles que pour tout $i$ :

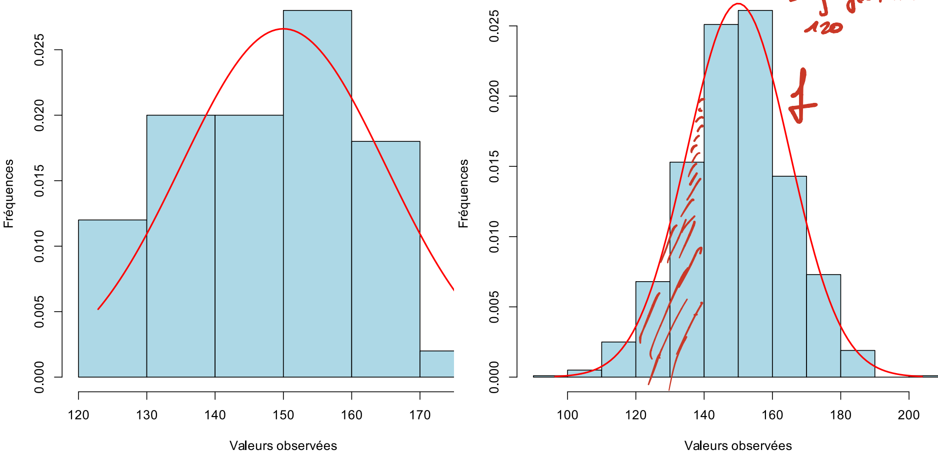
$$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$$

$X(\Omega)$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1$$

# Loi/Distribution continue

$$\mathbb{P}(120 \leq X \leq 140) = \int_{120}^{140} f(x)\,dx$$



# Loi/Distribution continue

La loi d'une variable aléatoire continue $X$ est la donnée d'une fonction $F$, appelée *fonction de répartition*, telle que :

$$\mathbb{P}(X \leq x) = F(x) \quad \rightsquigarrow \mathbb{P}(X \in ]-\infty, x])$$

ou de sa dérivée $f$, appelée *densité*, qui vérifie alors :

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$f = F'$$

### Caractérisation d'une densité

Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable vérifiant :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$
2. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$$

est une densité de probabilité.

## Caractérisation d'une densité

Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable vérifiant :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$

est une densité de probabilité.

## Lien Densité - Fonction de répartition

Si $X$ est une variable aléatoire admettant une fonction $f$ comme densité, alors la fonction de répartition de $X$ est :

. $F_X$ est croissante

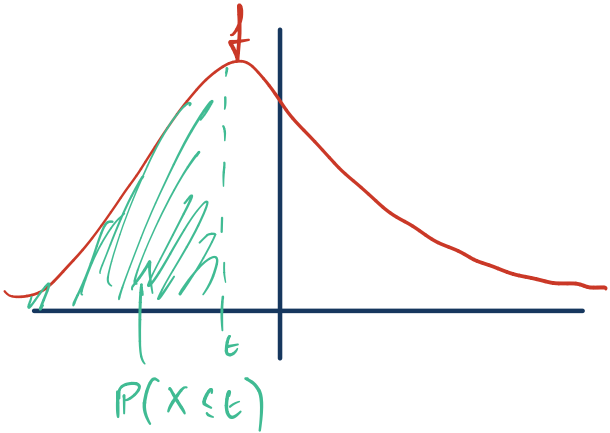
. $F_X \xrightarrow[+\infty]{} 1$

. $F_X \xrightarrow[-\infty]{} 0$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x \quad = \mathbb{P}(X \leq t)$$

Réciproquement, si $X$ est une variable aléatoire dont la fonction de répartition $F_X$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et si $F_X'$ est d'intégrale 1, alors c'est la densité de $X$.

# Calculs de probabilités



# Calculs de probabilités

La fonction de répartition ou la densité permettent en particulier de calculer les probabilités des formes suivantes :

$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

$$\mathbb{P}(X \leq a) = F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\mathbb{P}(X > a) = 1 - \mathbb{P}(X \leq a) = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

$$\left( = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx \right)$$

# Calculs de probabilités

La fonction de répartition ou la densité permettent en particulier de calculer les probabilités des formes suivantes :

$$\mathbb{P}(X \leq a) = F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\mathbb{P}(X > a) = 1 - F_X(a) = \int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx = F_X(b) - F_X(a)$$

# Calculs de probabilités

La fonction de répartition ou la densité permettent en particulier de calculer les probabilités des formes suivantes :

$$\mathbb{P}(X \leq a) = F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\mathbb{P}(X > a) = 1 - F_X(a) = \int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

En particulier, si $X$ a une densité, $\mathbb{P}(X = a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

$\left( \Rightarrow \ \mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(X < a) \right)$