Exercice 4 :

W a des valeurs entre 0 et 1.

2) $F_W(t) = \mathbb{P}(W \leq t)$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \int_0^t f_W(w)\,dw = \int_0^t \frac{3}{2}(1 - w^2)\,dw = \frac{3}{2}\left[w - \frac{w^3}{3}\right]_0^t & \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

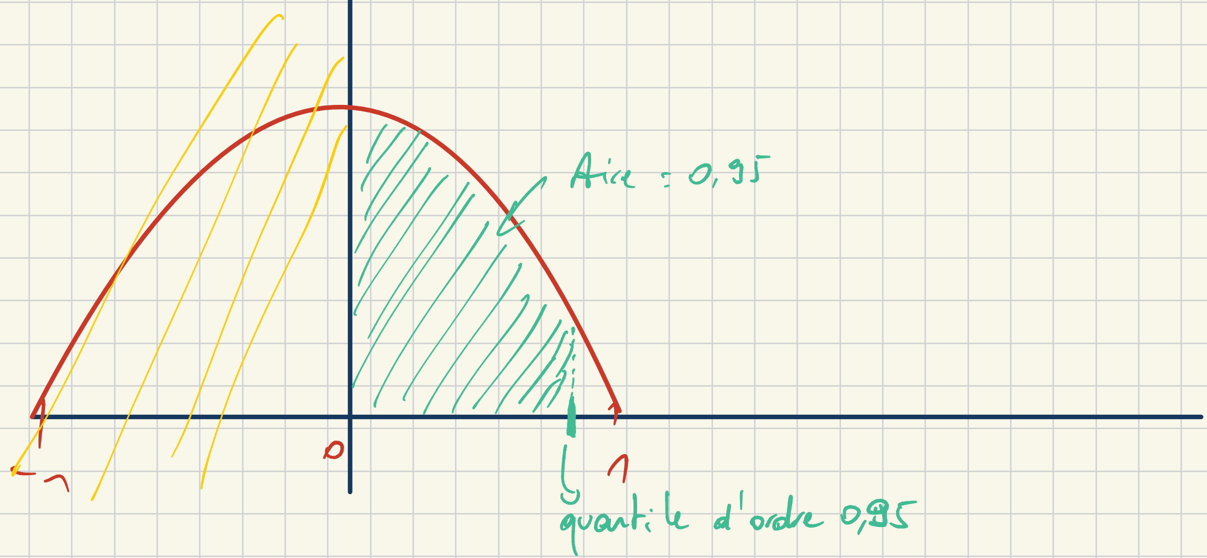
3) $E[W] = \int_0^1 w f_W(w)\, dw = \frac{3}{8}$

3) $V(W) = E[W^2] - E[W]^2$

$$= \int_0^1 w^2 f(w)\, dw - \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

$$= \frac{19}{320}$$

4)



$$\underbrace{\text{Résoudre } F(p) = 0,95}_{\text{compliqué...}}$$

Exercice 5 :

$$F_V(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v < 0 \\ 1 - e^{-v/5} & \text{si } v \geq 0 \end{cases}$$

1) $$f_V(v) = F_V'(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v < 0 \\ \frac{1}{5} e^{-\frac{v}{5}} & \text{si } v \geq 0 \end{cases}$$

2) $$E[V] = \int_0^{+\infty} v f(v)\, dv = \frac{1}{5} \int_0^{+\infty} v e^{-v/5}\, dv$$

v: $\downarrow$ à dérivé

$e^{-v/5}$: à primitivé

Par intégration par parties :

$$E[V] = \frac{1}{5}\left(\left[v \times (-5 e^{-\frac{v}{5}}) \right]_0^{+\infty} + 5 \int_0^{+\infty} 1 \times e^{-\frac{v}{5}} \right.$$

$$\left(\int u' \times v = [u \times v] - \int u \times v' \right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(0 - 0 + 5 \left[-5 e^{-\frac{v}{5}} \right]_0^{+\infty} \right)$$

car $\lim_{v \to +\infty} v e^{-\frac{v}{5}} = 0$ par c.c.

$$= \left[-5 e^{-\frac{v}{5}} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \left(0 - (-5)\right) = 5$$

2) $$\mathrm{Var}(V) = E[V^2] - E[V]^2$$

$$= E[V^2] - 25$$

$$= \underbrace{\int_0^{+\infty} v^2 f(v)\,dv}_{\text{à calculer par IPP.}} - 25$$

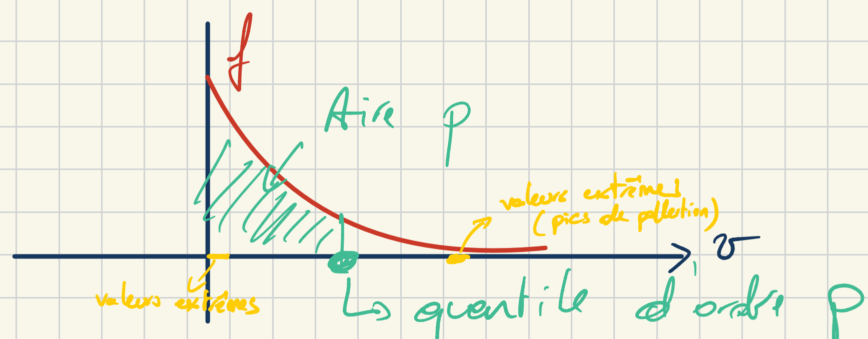
3) $$\mathbb{P}(V \geq 8) = 1 - \underbrace{\mathbb{P}(V < 8)}_{\text{Fonction de répartit° en 8}}$$

$$= 1 - F_V(8)$$

$$= 1 - \left(1 - e^{-\frac{8}{5}}\right)$$

$$= e^{-8/5}$$

4) Rappel quantile :



quantile d'ordre 0,95

→ on considère que les valeurs au-dessus sont extrêmes (et anormales).

Feuille 2

Déterminer la loi d'une variable aléatoire, c'est trouver sa fonction de répartition.

Exo 1 :

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

stratégie : Vérifier que la fdr. de $\frac{X-m}{\sigma}$ est bien la f.d.r de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

connue

Posons $t \in \mathbb{R}$ et calculons

$$F(t) = \mathbb{P}\left(\frac{X - m}{\sigma} \leq t \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(X \leq \sigma t + m \right) \quad \text{car } \sigma > 0$$

$$= F_X\left(\sigma t + m \right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\sigma t + m} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}_{\text{densité de } X} dx$$

$$\left(\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)$$

Posons $y = \frac{x - m}{\sigma}$ (dans ce cas $\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} = \frac{y^2}{2}$)

($dy = \frac{1}{\sigma} dx$)

Alors $F(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi\cancel{\sigma^2}}} e^{-\frac{y^2}{2}} \cancel{\sigma} dy$

c'est bien la fonction de répartit de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ donc

$$\frac{X - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Exo 2 : $\lambda > 0$

Fonction de rép. de $\mathcal{E}(\lambda)$: $1 - e^{-\lambda t}$ avec $t \geq 0$

densité : $\lambda e^{-\lambda t}$ pour $t \geq 0$.

- $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$
- $\mathcal{E}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$: fdr : $1 - e^{-\frac{\lambda}{\mu} t}$, $t \geq 0$

On a, pour $t \geq 0$:

$$\mathbb{P}(\mu X \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t}{\mu}\right) \quad (\text{car } \mu > 0)$$

$$= F_X\left(\frac{t}{\nu}\right)$$

$$= 1 - e^{-\lambda \frac{t}{\nu}}$$

$$= 1 - e^{-\frac{\lambda}{\nu} t}$$

On retrouve bien la fdr de $\mathcal{E}\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)$

Donc $\nu X \sim \mathcal{E}\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)$.

Éxo 4 :

$$f(x) = \frac{c}{1+x^2}$$

1) Il faut que : • $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $c > 0$

• $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+x^2}\,dx$

$\displaystyle = c \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$$= c \left[\arctan(x) \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= c \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$= c \times \pi .$$

Donc $\boxed{c = \frac{1}{\pi}}$ pour que f soit une densité.

2) $E[X]$ existe si $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \, dx$ est bien convergente.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \boxed{\frac{x}{1+x^2}}\, dx \quad ?$$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

pas intégrable (critère de Riemann)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = +\infty$$

3) On compare les fdr. de X et $\frac{1}{X}$

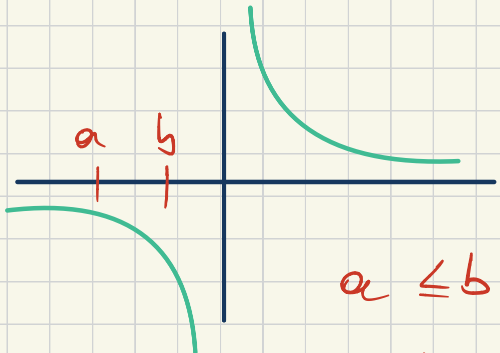
fdr de X : $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}\, dx$

fdr. de $\frac{1}{X}$: $P\left(\frac{1}{X} \leq t\right)$

pour $t<0$: En appliquant la fonction inverse

$$P\left(\frac{1}{X} \le t\right) = P\left(0 \ge X \ge \frac{1}{t}\right)$$

$$= \cancel{\int_{1/t}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}\, dx}$$



$a \le b \le 0$

$0 \ge \frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$

$$= \underbrace{\int_{1/t}^{0} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}\, dx}_{\text{on pose } y = \frac{1}{x} \ \left(x = \frac{1}{y}\right)} + \cancel{\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}\, dx}$$

$$\int_{1/t}^{0} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int_{t}^{-\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{y}\right)^2} \times \frac{-dy}{y^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\pi} \frac{1}{y^2+1}\, dy \qquad dx = -\frac{dy}{y^2}$$

$$\mathbb{P}(X=0) = 0$$