Évaluation du vendredi 17 novembre

Durée : 1h30 (tiers-temps : 2h)
Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 ().
Les parties II et III sont indépendantes de la partie I. Les résultats de la partie II peuvent être utilisés dans la partie III.

Partie I

On considère l'application suivante :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -2x-4y-2z \\ x+2y+z \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On rappelle que I_3 désigne la matrice identité : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 puis A^3.
2. Déterminer une base de $\ker(A^2)$, puis trouver un vecteur $v_1 \in \ker(A^2)$ tel que $v_1 \notin \ker(A)$.
3. Calculer $v_2 = Av_1$ et démontrer que $v_2 \in \ker(A)$.
4. Déterminer v_3 tels que
$$\ker(A - I_3) = \mathrm{Vect}(v_3)$$
5. Démontrer que la famille (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Calculer la matrice de g dans cette base.

Solution sans rédaction

1. *On trouve*
$$A^3 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
2. *En résolvant le système liénaire associé, on trouve :*
$$\ker(A^2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$
On a ainsi une famille génératrice de $\ker(A^2)$*, et libre puisque les deux vecteurs ne*

sont pas colinéaires. On a donc une base de $\ker(A^2)$.

De plus, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \ker A$ *puisque* $Av_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$

3. $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. *On trouve* $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. *La famille possède 3 vecteurs et* $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ *donc il suffit de montrer qu'elle est libre. Ou encore que la matrice formée par ses vecteurs en colonne est inversible. Or, puisque cette matrice est triangulaire on a immédiatement*

$$\begin{vmatrix} 1-2 & 2 & \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Donc la famille est bien une base

6.

Partie II

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E, tel que $f^3 = f^2$, c'est-à-dire que $f \circ f \circ f = f \circ f$, ou encore que pour tout $x \in E$, $f\big(f\big(f(x)\big)\big) = f\big(f(x)\big)$.

On rappelle que id désigne l'application identité, vérifiant pour tout $x \in E$ $\mathrm{id}(x) = x$.

1. Soient $x \in E$ et $y \in E$ tels que $f(f(x)) = 0$ et $f(y) = y$. Démontrer que si $x + y = 0$ alors $x = 0$ et $y = 0$.
2. À l'aide de l'écriture $z = z - f^2(z) + f^2(z)$, démontrer que tout élément de z peut s'écrire comme la somme d'un élément de $\ker(f^2)$ et d'un élément de $\ker(f - \mathrm{id})$.
3. Déduire des questions précédentes que si $\mathcal{B}_1$ est une base de $\ker(f^2)$ et $\mathcal{B}_2$ est une base de $\ker(f - \mathrm{id})$, alors la concaténation de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ (la famille formée par les vecteurs de $\mathcal{B}_1$ ainsi que ceux de $\mathcal{B}_2$) forme une base de E.

Solution sans rédaction

1. *Supposons que* $x + y = 0$. *Alors en appliquant* f *on obtient* $f(x + y) = f(0)$ *Or* $f(0) = 0$ *puisque* f *est linéaire, et également par linéarité côté gauche on obtient :* $f(x) + f(y) = 0$. *Or* $y = f(y)$ *donc :*

$$f(x) + y = 0$$

En appliquant de nouveau f*, on a par linéarité et puisque* $f(f(x)) = 0$ *:*

$$f(y) = f(0) = 0$$

Or $y = f(y)$ *donc* $y = 0$. *Et finalement,* $0 = x + y = x + 0$ *donc on a aussi* $x = 0$.

2. *Soit $z \in E$. Démontrons que $z - f^2(z) \in \ker f^2$ et que $f^2(z) \in \ker(f - \mathrm{id})$. La décomposition donnée dans l'énoncé permettra alors de conclure.*

   On a :

$$\begin{aligned}
f^2(z - f^2(z)) &= f^2(z) - f^4(z) && \textit{par linéarité} \\
&= f^2(z) - f(f^3(z)) \\
&= f^2(z) - f(f^2(z)) && \textit{car } f^3 = f^2 \\
&= f^2(z) - f^3(z)) \\
&= f^2(z) - f^2(z)) && \textit{car } f^3 = f^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

   Ainsi, on a bien $z - f^2(z) \in \ker f^2$.

   De plus,

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{id})(f^2(z)) &= f(f^2(z)) - \mathrm{id}(f^2(z)) \\
&= f^3(z) - f^2(z) \\
&= 0 && \textit{car } f^3 = f^2
\end{aligned}$$

   Ainsi, on a bien $f^2(z) \in \ker(f - \mathrm{id})$ et donc z s'écrit bien comme la somme d'éléments de ces deux noyaux.

3. *Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\ker(f^2)$ et $\mathcal{B}_2$ une base de $\ker(f - \mathrm{id})$. Notons $\mathcal{F}$ la concaténation de ces deux bases et montrons que $\mathcal{F}$ est une base de E.*

   D'une part, elle est génératrice : en effet, posons $z \in E$. D'après la question précédente, z s'écrit sous la forme $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \ker(f^2) = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_1)$ et $x_2 \in \ker(f - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_2$. Ainsi z peut bien s'obtenir par combinaison linéaire de vecteur de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

   D'autre part, elle est libre : en effet, notons $e_1, \ldots, e_k$ les vecteurs de $\mathcal{B}_1$ et $f_1, \ldots, f_p$ les vecteurs de $\mathcal{B}_2$, supposons que

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j f_j = 0$$

   et montrons que

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = \alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$$

   Or, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \in \ker(f^2)$ et $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j f_j \in \ker(f - \mathrm{id})$ donc d'après la question 1) de cette partie, on a :

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = 0 \qquad \textit{et} \qquad \sum_{j=1}^{p} \alpha_j f_j = 0$$

   On conclut immédiatement par liberté des familles $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ que tous les coefficients doivent être nuls.