Évaluation du lundi 9 Octobre

Durée : 1h30 (tiers-temps : 2h)
Barème indicatif :

- Exercice 1 : 6 points
- Exercice 2 : 14 points

Exercice 1 ().
Soit $n \geq 2$. On rappelle que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n.
On pose J une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on définit alors l'ensemble suivant :

$$\Omega_J = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid JM = MJ\}$$

1. Démontrer que Ω_J est un espace vectoriel.
2. Dans cette question, on prend $n = 2$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) En calculant MJ et JM pour une matrice quelconque $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, déterminer une famille génératrice de Ω_J.
   (b) Justifier que la famille obtenue est une base (ou bien extraire une base de cette famille), puis déterminer $\dim(\Omega_J)$.

Correction

1. *D'une part, $\Omega_J \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel.*
   D'autre part, la matrice nulle 0 appartient à Ω_J car $J \times 0 = 0 = 0 \times J$.
   Enfin, posons $M_1, M_2 \in \Omega_J$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda M_1 + M_2 \in \Omega_J$. Il s'agit de montrer que
   $$J(\lambda M_1 + M_2) = (\lambda M_1 + M_2)J$$
   Calculons :
   $$\begin{aligned} J(\lambda M_1 + M_2) &= \lambda J M_1 + J M_2 && \text{en développant} \\ &= \lambda M_1 J + M_2 J && \text{car } M_1 \in \Omega_J \text{ et } M_2 \in \Omega_J \\ &= (\lambda M_1 + M_2)J \end{aligned}$$
   Ainsi Ω_J est stable par combinaison linéaire et donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. *(a) Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a :*
   $$MJ = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad JM = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

Ainsi, $JM = MJ$ si et seulement si $b = c$ et $a = d$. Et donc les matrices de Ω_J sont les matrices de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Autrement dit de la forme

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\Omega_J = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

et donc $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ *est une famille génératrice de* Ω_J

(b)

Exercice 2 ().

Partie I :
On considère la matrice suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $Q - I_3$ et Q^2.
2. Déterminer v_1, v_2, v_3 tels que
$$\ker(Q - I_3) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2) \qquad \text{et} \qquad \ker(Q) = \mathrm{Vect}(v_3)$$
3. Démontrer que la famille (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Correction

1. *On a :*
$$Q - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
et
$$Q^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
avec en détaillant par exemple le calcul de la première colonne de Q^2 :
$$0 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
2. ***Première méthode avec des arguments de dimensions, vus en outils calculatoires :*** *Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de $Q - I_3$. On observe que $C_1 + C_2 = 0$ et*

$C_1 + C_3 = 0$ donc les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ *sont dans* $\ker(Q - I_3)$*. Toujours grâce au même relation on a* $\mathrm{Im}(Q - I_3) = \mathrm{Vect}(C_1)$ *et donc* $\mathrm{rang}(Q - I_3) = 1$*, et donc d'après le théorème du rang,*

$$\dim\big(\ker(Q - I_3)\big) = 3 - 1 = 2$$

Les deux vecteurs trouvés étant indépendants on a bien $\ker(Q - I_3) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ *avec* $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ *et* $v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

Deuxième méthode par résolution de système linéaire : *Les vecteurs* $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \ker(Q - I_3)$ *sont les vecteurs solutions du système linéaire suivant :*

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

On échelonne en effectuant $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ *et* $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$*, il ne reste plus grand chose :*

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y+z\\y\\z\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

On trouve ainsi $\ker(Q - I_3) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ *avec* $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ *et* $v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

De même, les vecteurs $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \ker(Q)$ *sont les vecteurs solutions du système linéaire suivant :*

$$\begin{cases} \phantom{-x+{}} y + z = 0 \\ x \phantom{{}+y} - z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

soit en effectuant $L_1 \leftrightarrow L_2$ *:*

$$\begin{cases} x \phantom{{}+y} - z = 0 \\ \phantom{-x+{}} y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

On échelonne en effectuant $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ *:*

$$\begin{cases} x \quad - z = 0 \\ \quad y + z = 0 \\ \quad y + z = 0 \end{cases}$$

puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ *:*

$$\begin{cases} x \quad - z = 0 \\ \quad y + z = 0 \end{cases}$$

On a alors z *en paramètre et*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On trouve ainsi $\ker(Q) = \mathrm{Vect}(v_3)$ *avec* $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.

Partie II :
Soit E un espace vectoriel.
Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire telle que $p \circ p = p$, c'est-à-dire que pour tout $x \in E$, $p\big(p(x)\big) = p(x)$.
On considère les ensembles suivants :

$$E_0 = \{x \in E \mid p(x) = 0\}$$

et

$$E_1 = \{x \in E \mid p(x) = x\}$$

1. Montrer que E_0 et E_1 sont des espaces vectoriels.
2. Démontrer que si $x \in E_0$ et $y \in E_1$ sont des vecteurs non nuls, alors la famille (x, y) est libre.
3. Soit $x \in E$.
   (a) Démontrer que $p(x) \in E_1$ et que $x - p(x) \in E_0$.
   (b) À l'aide notamment d'un raisonnement par l'absurde, démontrer qu'il existe une unique écriture de x de la forme

   $$x = x_0 + x_1$$

   avec $x_0 \in E_0$ et $x_1 \in E_1$