Évaluation du mardi 19 décembre

Durée : 1h30 (tiers-temps : 2h)
Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 ().
Les parties II et III sont indépendantes de la partie I. Les résultats de la partie II peuvent être utilisés dans la partie III.

Un des objectifs de cet exercice est de démontrer le théorème de Cayley-Hamilton (le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est un polynôme annulateur). Il ne peut donc pas être utilisé pour répondre à des questions de cet exercice.

On rappelle que si E est un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, alors

$$\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathcal{L}(E)) = n^2$$

Partie I

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base de $\ker(f)$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?
4. Calculer le polynôme caractéristique de A, puis montrer que c'est un polynôme annulateur de A.
5. La matrice A est-elle diagonalisable ?
6. On pose $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Démontrer que les vecteurs x, Ax et A^2x forment une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Calculer la matrice de f dans la base de la question précédente.
8. On rappelle que la *trace* d'une matrice carrée est la somme de ses coefficients diagonaux et que l'application trace, notée tr, est linéaire.
   On pose $H = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid tr(M) = 0$.
   (a) Démontrer que H est un espace vectoriel.
   (b) Calculer $\dim(H)$.

Partie II

Dans cette partie, on se place dans un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$.

On rappelle que le symbole $\circ$ désigne la composition de deux applications, et que lorsque f est un endomorphisme on peut définir $f^k = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{k \text{ fois}}$ par : $f^k(x) = f\big(f(...f(x))\big)$ pour tout $x \in E$.

1. Dans cette question seulement, on considère un endomorphisme f tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. On pose $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.
   (a) Déterminer un polynôme annulateur de f
   (b) Démontrer que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.
   (c) Calculer $\mathrm{Sp}(f)$ (l'ensemble des valeurs propres de f) et en déduire que f n'est pas diagonalisable.
2. Soit $k \geq 0$ un entier. Démontrer que $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$.
3. En déduire l'existence d'un plus petit entier $j^\star$ tel que pour tout $k \geq j^\star$,
$$\ker(f^{j^\star}) = \ker(f^k)$$
4. Démontrer que $\dim\big(\ker(f^{j^\star})\big) \geq j^\star$

Partie III :
Dans cette partie, on se place dans un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$.

On pose $u \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ un endomorphisme quelconque de E. On pourra utiliser sans démonstration les résultats suivants :

- Si Q est un polynôme, alors $\ker(Q(u))$ est stable par u, c'est-à-dire que pour tout $x \in \ker(Q(u))$, $u(x) \in \ker(Q(u))$.
  On peut alors définir l'endomorphisme induit par u sur cet espace,
$$\hat{u} : \ker(Q(u)) \to \ker(Q(u))$$
  tel que $\hat{u}(x) = u(x)$ pour tout $x \in \ker(Q(u))$.
- Si P_1 et P_2 sont deux polynômes, alors $P_1(u) \circ P_2(u) = P_2(u) \circ P_1(u)$.

1. Démontrer que la famille $(\mathrm{id}, u, u^2, \dots, u^{n^2})$ est liée et en déduire l'existence d'un polynôme annulateur de u.

   Dans la suite, on notera ce polynôme de la manière factorisée suivante : $P(X) = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{d_i}$
2. Justifier que le polynôme caractéristique χ_u est de la forme $\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)^{n_i}$ avec $s \leq r$.
3. Soit $x \in E$.
   (a) Démontrer que :
$$E = \ker(u - \lambda_1 \mathrm{id})^{d_1} \oplus \ker(u - \lambda_2 \mathrm{id})^{d_2} \oplus \cdots \oplus \ker(u - \lambda_r \mathrm{id})^{d_r}$$
   (b) Démontrer que $\chi_u(u)(x) = 0$.