Université Paris-Saclay — **Intégration MDD302**
L3 DD — **2024–2025**

Feuille d'exercices 1 : Révisions

Exercice 1. (Borne supérieure et inférieure).

1. Déterminer la borne supérieure et inférieure dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ des parties suivantes
$$A = \left\{n^3, n \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad B = \left\{\frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad C = \mathbb{Q} \cap \,]1, 10[\,, \quad D = \left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, p, q \in \mathbb{N}^*\right\}.$$
2. Déterminer $||f||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1+x^2}{2+x^2}$ (on pourra commencer par esquisser le graphe de cette fonction). Même question pour la fonction $g = f - 2$.

Exercice 2. (Borne supérieure). Vrai ou faux (justifier en donnant une preuve ou un contre exemple) ? Si vous répondez faux, essayez également de réparer l'énoncé pour qu'il devienne correct.

1. Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$, alors $A \subset B \Rightarrow \sup(A) \leq \sup(B)$.
2. Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$, alors $A \subset B \Rightarrow \inf(A) \leq \inf(B)$.
3. Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$, alors $\sup(A+B) = \sup(A)+\sup(B)$ et $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $||f||_\infty = f(x)$.
5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et M un réel, on suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < M$ alors $||f||_\infty \leq M$.
6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et M un réel, on suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| < M$ alors $||f||_\infty < M$.

Exercice 3. (Borne supérieure) Soient A et B deux parties non-vides de $\mathbb{R}$ telles que pour tous $a \in A$ et $b \in B$, on a $a \leq b$. Démontrer que A est majoré, B est minoré et $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Exercice 4. (Définition de limite). En utilisant uniquement les définitions formelles de limite pour les suites réelles :

— $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $a \in \mathbb{R}$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|x_n - a| < \epsilon$;
— $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si pour tout $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $x_n > A$;

montrer que :

1. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs divergeant vers $+\infty$ alors la suite $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ a pour limite 0.
2. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée, alors $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = 0$.

Exercice 5. (Suites réels) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels qui admet une sous-suite majorée. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 6. (Fonctions indicatrices). Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer $\mathbb{1}_A \circ f = \mathbb{1}_{f^{-1}(A)}$.

2. Montrer que $A \subset B$ si et seulement si $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$.
3. Montrer que $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.
4. Montrer que $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$.

Exercice 7. (Densité). Vrai ou faux ? (On n'oubliera pas de justifier.)

1. $\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{Q}$
2. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble dense dans $\mathbb{R}$ alors $f(A)$ est dense dans $\mathbb{R}$.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble dense dans $\mathbb{R}$ alors $f^{-1}(A)$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 8. (Suites de fonctions). Vrai ou faux (justifier en donnant une preuve ou un contre exemple) ?

1. Une limite simple de fonctions 1-périodiques est 1-périodique.
2. Une limite simple de fonctions paires est paire.
3. Une limite simple de fonctions bornées est bornée.
4. Une limite simple de fonctions continues est continue.
5. Une limite simple de fonctions de limite nulle en $+\infty$ est de limite nulle en $+\infty$.
6. Une limite simple de fonctions strictement croissantes est strictement croissante.

Exercice 9. (Convergence simple). Soient les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{n\sin(x)}{1+n}, \quad g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n}, \quad h_n(x) = \frac{1}{x^4 + nx^2 + 1}, \quad k_n(x) = e^{-nx^2}.$$

1. Rappeler la définition de la convergence simple d'une suite de fonctions.
2. Pour chacune des suites $(f_n)_{n\geq 1}$, $(g_n)_{n\geq 1}$, $(h_n)_{n\geq 1}$ et $(k_n)_{n\geq 1}$:
   (a) Esquisser le graphe de quelques éléments de la suite. (On ne cherchera pas à décrire précisément l'allure de chacune des fonctions mais simplement de présenter graphiquement leur comportement quand n varie.)
   (b) Montrer que ces suites de fonctions convergent simplement et déterminer leur limite simple.

Exercice 10. (Convergence simple). Alice et Bob révisent ensemble leur cours sur la convergence simple des suites de fonctions. Bob dit la chose suivante :

> Étant données deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers u et v respectivement, telles que pour tout n, on a $u_n \leq v_n$, alors la suite de fonctions $\mathbb{1}_{[u_n,v_n]}$ converge simplement vers $\mathbb{1}_{[u,v]}$.

Alice doute de la véracité de ce résultat, et propose à Bob l'exemple suivant : la suite de fonctions réelles $(f_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$f_n : x \mapsto \mathbb{1}_{[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]}(x).$$

1. Montrer que, pour tout $x \geq 1$ et pour tout $x \leq 0$, on a $f_n(x) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
2. Montrer soigneusement que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a $f_n(x) \to 1$ lorsque $n \to +\infty$.
3. Quel est l'intervalle I pour lequel on a convergence simple $\mathbb{1}_{[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]} \to \mathbb{1}_I$?

Exercice 11. (Convergence simple). Soient les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{[-n,n]}(x), \quad g_n(x) = \mathbb{1}_{[0,n]}(x)x, \quad h_n(x) = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{n},+\infty[}(x) \quad k_n(x) = \mathbb{1}_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}[}(x).$$

Pour chacune des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

1. Esquisser le graphe de quelques éléments de la suite.
2. Montrer que ces suites de fonctions convergent simplement et déterminer leur limite simple.

Exercice 12. (Convergence uniforme).

1. Rappeler la définition de la convergence uniforme d'une suite de fonctions réelles.
2. Soient les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{n\sin(x)}{1+n}, \quad g_n(x) = \mathbb{1}_{[0,n]}(x)x, \quad h_n(x) = e^{-nx^2}.$$

   On a vu dans les exercices précédents que ces suites de fonctions convergeaient simplement. La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 13. (Convergence simple et convergence uniforme). Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = 0$ si $x < 0$, $f_n(x) = x^n$ lorsque $0 \leq x \leq 1$ et $f_n(x) = 1$ lorsque $x > 1$ ($n \geq 1$).

1. Esquisser les graphes de f_1, f_2 et f_3.
2. Les fonctions f_n sont-elles continues ?
3. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que l'on déterminera.
4. La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 14. (Convergence uniforme) Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \cos^n(x)\sin(x)$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.
2. Montrer que $\|f_n\|_\infty = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.
3. En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle.

EXERCICES BONUS

Exercice 15. (Borne supérieure et inférieure). Vrai ou faux (justifier en donnant une preuve ou un contre exemple) ? Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. (Commencer par étudier quelques exemples pour vous faire une intuition.)

1. $A \subset B \Leftrightarrow \inf(B) \leq \inf(A)$ et $\sup(A) \leq \sup(B)$;
2. $\sup(A \cap B) = \min(\sup(A), \sup(B))$ (on suppose $A \cap B \neq \emptyset$) ;
3. $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.

Exercice 16. (Borne supérieure). Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application croissante. On note $E = \{x \in [0,1], f(x) \geq x\}$.

1. Montrer que E admet une borne supérieure b.

2. Prouver que $f(b) = b$.

Exercice 17. (Borne supérieure et inférieure). Soient $X = \{x \in \mathbb{Q} : \ x \geq 0 \text{ et } x^2 < 2\}$ et $Y = \{y \in \mathbb{Q} : \ y > 0 \text{ et } y^2 > 2\}$. On cherche à montrer qu'il n'existe pas $\sup(X)$ ni $\inf(Y)$ dans $\mathbb{Q}$.

1. Montrer que $X \subset [0, 2]$ est qu'il n'admet pas un maximum.
2. Montrer que $Y \subset]0, +\infty[$ et qu'il n'admet pas un minimum.
3. En utilisant les questions précédentes, montrer qu'il n'existe pas $\sup(X)$ ni $\inf(Y)$ dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 18. (Convergence simple et convergence uniforme). Soient les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies pour $n \geq 1$ par

$$f_n = \mathbb{1}_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}, \quad g_n = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}, \quad h_n = \mathbb{1}_{]0, \frac{1}{n}]}, \quad k_n = (-1)^n \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}, \quad l_n = \frac{(-1)^n}{n} \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}.$$

Pour chacun des suites $(f_n)_{n\geq 1}$, $(g_n)_{n\geq 1}$, $(h_n)_{n\geq 1}$, $(k_n)_{n\geq 1}$ et $(l_n)_{n\geq 1}$:

1. Esquisser le graphe de quelques éléments de la suite.
2. Déterminer si la suite converge simplement ou uniformément (ou ne converge pas). Le cas échéant, déterminer la limite.

Exercice 19. (Dénombrabilité).

1. On considère l'ensemble M des mots (de longeur arbitraire, finie) qui peuvent s'écrire avec les lettres a et b (par exemple les mots à exactement deux lettres sont aa, ab, ba et bb). Montrer que M est dénombrable.
2. Est-ce que l'ensemble M' des mots *infinis* qui peuvent s'écrire avec les lettres a et b (par exemple $aaaa$...) est dénombrable ? On pourra montrer qu'il existe une application injective du segment $[0, 1[$ dans M'.
3. Rappeler pourquoi $\mathbb{Q}$, et plus généralement $\mathbb{Q}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, sont dénombrables, puis pourquoi une réunion dénombrable d'ensemble dénombrables est dénombrable. En déduire que l'ensemble $\mathcal{A}$ des zéros (dans $\mathbb{R}$) de polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$ est dénombrable.