

### Interférences multiples

**Objectifs :**

- comprendre l'intérêt des interférences à ondes multiples
- utiliser la méthode des vecteurs de Fresnel.
- calculer l'éclairement transmis par un interféromètre de Fabry-Perot.

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre aux interférences entre  $N$  ondes cohérentes.

#### 9.1 Des fentes de Young au réseau de diffraction

Nous considérons un faisceau parallèle de longueur d'onde  $\lambda_0$  qui éclaire deux fentes distantes de  $a$  et d'épaisseur de l'ordre de la longueur d'onde. Les fentes se comportent alors comme des sources ponctuelles cohérentes  $S_1$  et  $S_2$ . On observe la figure d'interférence produite sur un écran distant de  $d$  des fentes en un point  $P$ . Les conditions expérimentales sont telles que  $a \ll d$  et  $y \ll d$  ce qui implique que  $\beta \simeq 90^\circ$  dans la figure 9.1. Autrement dit, nous pouvons considérer que les rayons issus des sources  $S_1$  et  $S_2$  sont quasi-parallèles. Expérimentalement, il est plus judicieux d'observer la figure d'interférences dans le plan focal image d'une lentille pour observer les interférences entre des rayons parallèles (figure 9.2). La différence de chemin optique entre les deux rayons est alors donnée par  $\delta = \theta a = \frac{ay}{f}$  où  $f$  est la distance focale de la lentille.

Nous notons  $\underline{a}_1 = A_1$  l'amplitude de l'onde émise par  $S_1$  au point  $P$ , l'amplitude de l'onde émise par  $S_2$  au point  $P$  a donc pour expression  $\underline{a}_2 = A_1 e^{i\Delta\phi}$  avec  $\Delta\phi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$ . l'éclairement au point  $P$  a donc pour expression  $\varepsilon = \frac{1}{2}(\underline{a}_1 + \underline{a}_2)(\underline{a}_1 + \underline{a}_2)^*$  soit :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2}(\underline{a}_1 \underline{a}_1^* + \underline{a}_2 \underline{a}_2^* + \underline{a}_1 \underline{a}_2^* + \underline{a}_2 \underline{a}_1^*) \\ &= 2\varepsilon_1(1 + \cos(\Delta\phi)) \end{aligned}$$

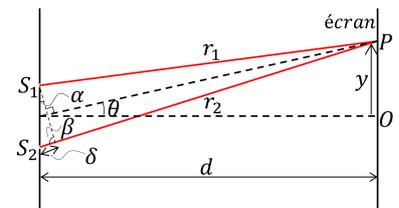


FIGURE 9.1: Schéma de principe et notations utilisées dans l'expérience des fentes de Young. Le schéma n'est pas à l'échelle.

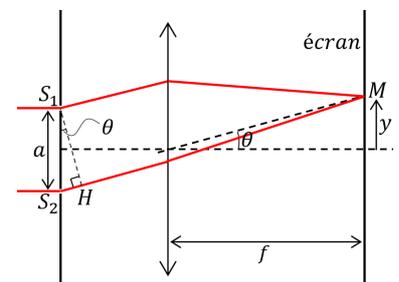


FIGURE 9.2: L'observation de la figure d'interférences dans le plan focal image d'une lentille permet d'observer les interférences produites par des rayons parallèles.

$$= 4\varepsilon_1 \cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)$$

Nous étudions maintenant un système de trois fentes de Young et nous notons  $\underline{a}_1 = A_1$  l'amplitude de l'onde au point  $P$ . L'amplitude des ondes émises par  $S_2$  et  $S_3$  au point  $P$  ont donc pour expression  $\underline{a}_2 = A_1 e^{i\Delta\phi}$  et  $\underline{a}_3 = A_1 e^{i2\Delta\phi}$ . L'amplitude totale au point  $P$  a pour expression :

$$\begin{aligned} \underline{a} &= \underline{a}_1 + \underline{a}_2 + \underline{a}_3 \\ &= A_1 (1 + e^{i\Delta\phi} + e^{i2\Delta\phi}) \\ &= A_1 \frac{1 - e^{i3\Delta\phi}}{1 - e^{i\Delta\phi}} \\ &= A_1 \frac{e^{i\frac{3\Delta\phi}{2}} \sin\left(\frac{3\Delta\phi}{2}\right)}{e^{i\frac{\Delta\phi}{2}} \sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)} \end{aligned}$$

L'éclairement au point  $P$  a donc pour expression :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \frac{\sin^2\left(\frac{3\Delta\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}$$

Un développement limité permet de lever la forme indéterminée et de montrer que  $\varepsilon = 3^2\varepsilon_1$ .

La figure 9.4 montre le graphe de l'éclairement en fonction de  $\Delta\phi$  produit par le système de deux fentes et de trois fentes. Le graphe montre que la position de maximums d'éclairement est identique mais l'augmentation du nombre de fentes a pour effet de générer des pics plus fins.

Dans le cas d'un réseau de  $N$  fentes, l'amplitude complexe totale au point  $P$  a pour expression :

$$\begin{aligned} \underline{a} &= A_1(1 + e^{i\Delta\phi} + e^{i2\Delta\phi} + \dots + e^{i(N-1)\Delta\phi}) \\ &= A_1 \frac{1 - e^{iN\Delta\phi}}{1 - e^{i\Delta\phi}} \\ &= A_1 \frac{e^{i\frac{N\Delta\phi}{2}} \sin\left(\frac{N\Delta\phi}{2}\right)}{e^{i\frac{\Delta\phi}{2}} \sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)} \end{aligned}$$

L'éclairement produit au point  $P$  par les  $N$  fentes a donc pour expression :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \frac{\sin^2\left(\frac{N\Delta\phi}{2}\right)}{\left(\sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)\right)} \quad (9.1)$$

L'éclairement maximal est égale à  $N^2\varepsilon_1$ . La figure 9.5 montre le graphe de l'éclairement produit par 100 fentes.

## 9.2 L'effet Fabry-Perot

Avant d'étudier l'effet Fabry-Perot dans une lame réfléchissante, nous allons établir les relations de Stokes.

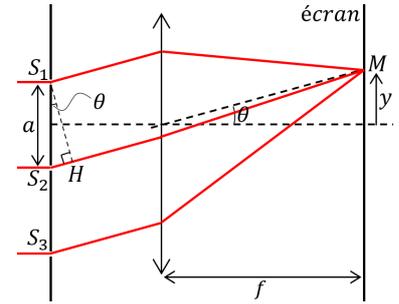


FIGURE 9.3: Montage expérimental permettant l'observation de la figure d'interférences produite par trois fente de Young.

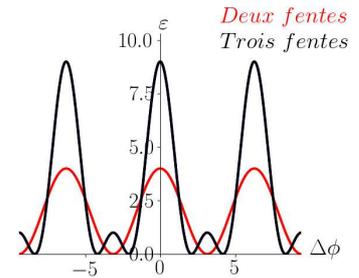


FIGURE 9.4: Graphe de l'éclairement en fonction de  $\Delta\phi$  produit par le système de deux fentes et de trois fentes.

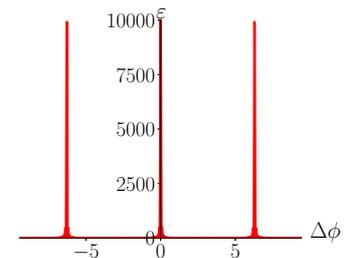


FIGURE 9.5: Graphe de l'éclairement en fonction de  $\Delta\phi$  produit par un système de 100 fentes.

### 9.2.1 Les relations de Stokes

Nous considérons la situation (a) de la figure 9.6. Nous notons  $r$  et  $t$  les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude de l'air vers le verre. Le rayon incident d'amplitude  $a$  donne naissance, au niveau de l'interface, à un rayon réfléchi d'amplitude  $ar$  et à un rayon transmis d'amplitude  $at$ . Renversons maintenant le sens du temps. Les rayons réfléchis et transmis deviennent alors des rayons incidents. Nous notons  $r'$  et  $t'$  les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude du verre vers l'air (figure 9.6-(b)). Puisque nous renversons le sens du temps, nous devons alors re-obtenir le rayon incident. Autrement-dit, nous devons avoir, dans le cas où le rayonnement n'est pas absorbé par l'interface :

$$tt' + r^2 = 1 \tag{9.2}$$

$$r + r' = 0 \tag{9.3}$$

### 9.2.2 Effet Fabry-Perot dans une lame réfléchissante

Nous considérons maintenant une lame de largeur  $L$  d'un milieu d'indice  $n$  (du verre par exemple) dont le coefficient de réflexion de chaque face est très élevé. La lame est éclairée en incidence normale (figure 9.7).

Il y a transmission à travers la lame si la condition d'interférence constructive est respectée soit :

$$2nL = m\lambda \tag{9.4}$$

où  $m$  est un entier naturel.

Il y a donc transmission à travers la lame pour certaines valeurs du déphasage entre deux rayons consécutifs. Comme pour le cas des fentes de Young, nous allons voir que la valeur très élevée du coefficient de réflexion provoque une augmentation du nombre de rayons qui interfèrent ce qui a pour effet d'augmenter la finesse de pics. C'est l'effet Fabry-Perot. Pour étudier plus précisément cet effet, nous devons obtenir l'expression mathématique des coefficients de réflexion et de transmission de la lame. L'absorption dans la longueur d'onde utilisé est négligeable.

Le déphasage entre deux rayons consécutifs a pour expression  $\Delta\phi = 4\pi \frac{nL}{\lambda}$ . Nous notons  $a$  l'amplitude de l'onde incidente, l'amplitude totale de l'onde réfléchie a pour expression :

$$\begin{aligned} \underline{a} &= ar + att'r'e^{i\Delta\phi} + att'r'^3e^{i2\Delta\phi} + att'r'^5e^{i3\Delta\phi} + \dots \\ &= ar + ar'tt'e^{i\Delta\phi} (1 + r'^2e^{i\Delta\phi} + r'^4e^{i2\Delta\phi} + \dots) \\ &= ar + ar'tt'e^{i\Delta\phi} \frac{1}{1 - r'^2e^{i\Delta\phi}} \end{aligned}$$

Nous reconnaissons la somme des éléments d'une suite géométrique de raison  $r'^2e^{i\Delta\phi}$ . Puisque le nombre de terme est infini et que le module de la raison est strictement inférieur à 1, nous obtenons :

$$\underline{a} = ar + ar'tt'e^{i\Delta\phi} \frac{1}{1 - r'^2e^{i\Delta\phi}}$$

Les relations de Stokes conduisent à :

$$a_{\text{réfléchi}} = ar \frac{1 - e^{i\Delta\phi}}{1 - r'^2e^{i\Delta\phi}}$$

L'onde réfléchie est nulle si  $e^{i\Delta\phi} = 1$  d'où  $\Delta\phi = m2\pi$  où  $m$  est un entier naturel.

☞ En notation complexe, les coefficients  $r$  et  $t$  peuvent être des nombres complexes.

☞ Les équations de Maxwell sont les équations qui décrivent la propagation d'une onde électromagnétique. Or, ces équations sont symétriques par renversement du sens du temps en l'absence de courant donc dans un milieu non conducteur.

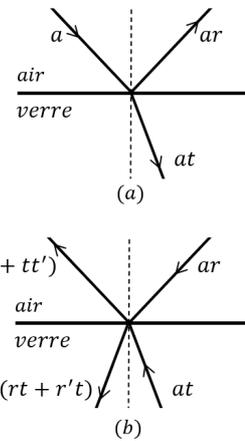


FIGURE 9.6: (a) - amplitude des rayons incidents réfléchis en transmis à travers une interface air/verre. (b) - amplitude des rayons incidents réfléchis en transmis à travers une interface verre/air après renversement du sens du temps.

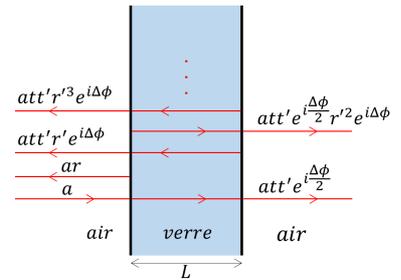


FIGURE 9.7: lame en verre parfaitement plane dont les faces ont été rendues très réfléchissantes.

l'amplitude totale de l'onde transmise a pour expression :

$$\begin{aligned} \underline{a} &= att'e^{i\frac{\Delta\phi}{2}} (1 + r'^2 e^{i\Delta\phi} + r'^4 e^{i2\Delta\phi} + \dots) \\ &= att'e^{i\frac{\Delta\phi}{2}} \frac{1}{1 - r'^2 e^{i\Delta\phi}} \end{aligned}$$

Les relations de Stokes conduisent à :

$$a_{transmis} = ae^{i\frac{\Delta\phi}{2}} \frac{1 - r^2}{1 - r^2 e^{i\Delta\phi}}$$

Le coefficient de réflexion en énergie de la lame est donnée par  $|\frac{a_{reflechi}}{a}|^2$  et a pour expression :

$$|\frac{a_{reflechi}}{a}|^2 = rr^* \frac{1 - e^{i\Delta\phi}}{1 - r^2 e^{i\Delta\phi}} \frac{1 - e^{-i\Delta\phi}}{1 - r^{*2} e^{-i\Delta\phi}}$$

d'où :

$$|\frac{a_{reflechi}}{a}|^2 = \frac{4R \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)} \tag{9.5}$$

avec  $R = |r|^2$ .

De même, on trouve que :

$$|\frac{a_{transmis}}{a}|^2 = \frac{(1 - R)^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)} \tag{9.6}$$

Pour  $R = 0.98$ , la valeur maximale du coefficient de transmission de la lame vaut  $|\frac{a_{transmis}}{a}|_{max}^2 = \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2} = 1$  et sa valeur minimale vaut  $|\frac{a_{transmis}}{a}|_{min}^2 = \frac{(1-R)^2}{(1+R^2)} = 10^{-4}$ . Nous arrivons à la conclusion que deux lames très réfléchissantes peuvent avoir une transmission égale à 1 pour certaines valeurs de  $\Delta\phi$ . C'est l'effet Fabry-Perot. Le graphe 9.8 montre le graphe du coefficient de transmission en fonction de  $\Delta\phi$ . Puisque  $\Delta\phi$  dépend de la fréquence de l'onde incidente, nous pouvons utiliser l'effet Fabry-Perot pour **filtrer la lumière**. Supposons par exemple que le verre soit coloré et laisser passer un ensemble de fréquence autour d'un pic. L'effet Fabry-Perot laisse donc passer une seule fréquence très précise et ce d'autant plus précise que le coefficient de réflexion est élevé.

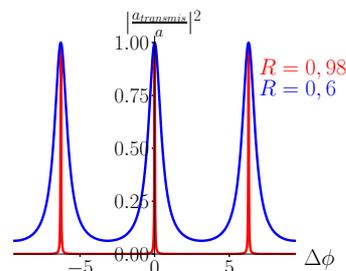


FIGURE 9.8: lame en verre parfaitement plane dont les faces ont été rendues très réfléchissantes.

### 9.3 L'interféromètre de Fabry-Perrot

La vidéo <https://www.youtube.com/watch?v=cpIVTXNC2s8> montre le fonctionnement d'une cavité Fabry-Perrot éclairée par un faisceau ponctuel. La vidéo <https://www.youtube.com/watch?v=goPg4-iVa1s> montre le fonctionnement d'une cavité Fabry-Perrot éclairée par un faisceau divergent.

La video <https://www.youtube.com/watch?v=Ju-3Eu133KE> montre un dispositif expérimental permettant l'observation de l'effet Zeeman grâce à un interféromètre de Fabry-Perrot.

Nous avons étudié dans le chapitre sur les systèmes interférentiels la formation de franges d'interférences produites par une couche mince en considérant uniquement le premier rayon réfléchi. Pour des surfaces dont

le coefficient de réflexion est très élevé nous devons prendre en compte tous les rayons réfléchis. C'est le cas dans l'interféromètre de Fabry-Perrot.

Un interféromètre de Fabry-Perrot est constitué d'une lame d'air d'épaisseur  $e$  comprise entre deux lames de verre dont les faces en regard planes et parallèles ont été rendues très réfléchissantes (figure 9.9).

Les franges d'interférences des rayons transmis par un Fabry-Perrot sont donc situés à l'infini et doivent être observées dans le plan focal image d'une lentille (figure 9.10).

On désigne par  $R$  et  $T$  les coefficients de réflexion et de transmission en énergie des lames et par  $r$  et  $t$  les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude. On éclaire le Fabry-Perrot par une source étendue monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  dans le vide, d'amplitude complexe  $a_0$  et d'éclairement  $\varepsilon_0$ .

La figure 9.11 montre les premiers rayons transmis et réfléchis ainsi que l'amplitude de chaque rayon transmis. La figure montre également que la différence de chemin optique entre deux rayons adjacents a pour expression  $\delta = (IJK) - (IH) = 2e \cos i$ . Le déphasage entre deux rayons adjacents a donc pour expression  $\Delta\phi = \frac{4\pi e}{\lambda} \cos i$ .

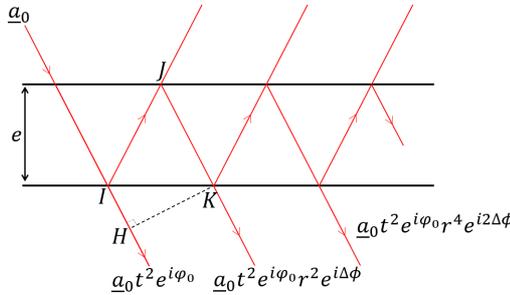


FIGURE 9.11 – Schéma des premiers rayons transmis et réfléchis.

Notons  $a_0$  l'amplitude de l'onde incidente et  $\phi_0$  la phase prise par la première onde transmise sans réflexion. La figure 9.11 montre que l'amplitude transmise a pour expression  $a = a_0 t^2 e^{i\phi_0} (1 + r^2 e^{i\Delta\phi} + r^4 e^{i2\Delta\phi} + \dots)$ . Nous reconnaissons la somme des éléments de  $N$  termes d'une suite géométrique. Étant donné que le module du coefficient de réflexion est strictement inférieur à 1 et que  $N \gg 1$ , nous obtenons  $a = a_0 t^2 e^{i\phi_0} \frac{1}{1 - r^2 e^{i\Delta\phi}}$ .

L'éclairement dans la direction  $i$  a pour expression  $\varepsilon = \frac{1}{2} a a^*$  d'où :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos(\Delta\phi)}$$

avec  $R = r^2$  et  $T = t^2$ .

L'expression précédente montre que l'éclairement maximal dans la direction  $i$  a pour expression  $\varepsilon_{max} = \varepsilon_0 \frac{T^2}{(1-R)^2}$ . Nous obtenons le résultat à priori étonnant, pour un milieu d'absorption négligeable, l'éclairement maximal vaut  $\varepsilon_0$ . Autrement dit, l'éclairement est totalement transmis à travers le Fabry-Perrot alors que les lames ont des coefficients de réflexions très élevés. Ce phénomène est dû aux interférences qui sont totalement constructives en transmission pour certaines valeurs de  $\Delta\phi$ . Dans le même temps, les interférences des ondes réfléchies sont totalement destructives d'où une transmission du Fabry-Perrot proche de 1 dans ce cas. La valeur minimale de l'éclairement a pour expression  $\varepsilon_{min} = \varepsilon_0 \frac{T^2}{(1+R)^2}$ . Le contraste est donc donné par  $C = \frac{\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}}{\varepsilon_{max} + \varepsilon_{min}} = \frac{2R}{1+R^2}$ .

En utilisant la relation  $\cos(\Delta\phi) = 1 - 2 \sin^2(\frac{\Delta\phi}{2})$ , l'expression précé-



FIGURE 9.9: Schéma de principe d'un Fabry-Perrot. Les faces en regard doivent être plates avec un très haut degré de précision, parfaitement parallèles et séparées d'une distance  $e$  qui ne varie pas au cours du temps.

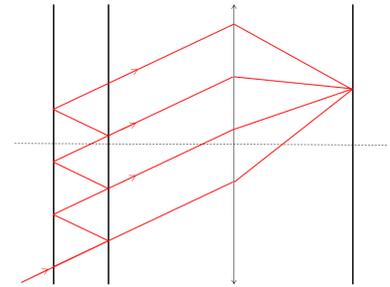


FIGURE 9.10: Les franges d'interférences des rayons transmis par un Fabry-Perrot sont donc situés dans le plan focal image d'une lentille.

dente peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_0 \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R(1 - 2 \sin^2 \frac{\Delta\phi}{2})} \\ &= \varepsilon_0 \frac{T^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\Delta\phi}{2}}\end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left( \frac{T}{1 - R} \right)^2 \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\Delta\phi}{2}} \quad (9.7)$$

avec  $F = \frac{4R}{(1-R)^2}$ .

La finesse d'un pic est défini par  $\mathcal{F} = \frac{2\pi}{\Delta\phi}$  où  $\Delta\phi$  est donnée par  $\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + F \sin^2(\frac{\Delta\phi}{4})}$ . Dans le cas d'une finesse élevée, nous avons  $\Delta\phi \ll 1$  d'où :

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1 - R} = \frac{\pi}{2} F^{1/2} \quad (9.8)$$

La valeur numérique de la finesse représente la distance en nombre de pics entre deux pics.