

Interférences en lumière non-monochromatique

Objectifs :

- déterminer la figure d'interférence obtenue par une source de profil spectral simple (doublet de longueurs d'onde ou profil rectangulaire).
- comprendre d'où provient l'échelle de teintes de Newton.

Nous avons considéré précédemment le cas d'une onde purement monochromatique, c'est-à-dire d'un signal sinusoïdale qui dure infiniment longtemps.

Nous avons vu qu'une source lumineuse émet des trains d'onde de durée moyenne τ^* , c'est-à-dire de longueur moyenne $l^* = c\tau^*$. Cela revient à considérer qu'une source réelle n'est jamais strictement monochromatique mais possède une certaine **largeur spectrale** $\Delta\omega$. Nous allons calculer l'éclairement qui résulte d'une telle source et étudier le lien entre la largeur spectrale de la source et la longueur typique d'un train d'onde.

Nous allons également voir qu'il existe un lien entre l'évolution de la figure d'interférences produite par un interféromètre de Michelson en fonction de la différence de marche et le spectre de la source. Ce lien peut se comprendre qualitativement. L'idée est que **chaque longueur d'onde produit son propre système de franges avec sa propre interfrange puisque que l'interfrange dépend de la longueur d'onde**. Nous observons sur la figure d'interférences la superposition de ces systèmes de franges qui peut se brouiller pour une certaine valeur de la différence de marche.

8.1 Cas d'un doublet de longueurs d'ondes

8.1.1 Éclairement

Nous considérons un interféromètre de Michelson réglé en configuration anneaux (figure 8.1) et nous plaçons un détecteur pour enregistrer **l'éclairement au centre de la figure d'interférence**. Le retard τ entre le rayon qui passe par le miroir M_2 et le rayon qui passe par le miroir M_1 est relié à

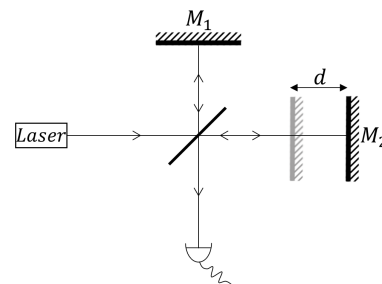


FIGURE 8.1: Interféromètre de Michelson utilisé pour réaliser l'interférogramme de la source lumineuse.

la distance d entre M_2 et l'image de M_1 par $\tau = \frac{2d}{c}$.

Nous étudions dans un premier temps le cas d'une source qui émet **deux longueurs d'ondes voisines λ_1 et λ_2** . Nous nommons λ_0 la longueur d'onde centrale et notons $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$. Nous avons donc $\lambda_2 = \lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}$ et $\lambda_1 = \lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}$ (figure 8.2). Nous considérons le cas où $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \ll 1$. Le principe de superposition nous permet d'écrire que l'éclairement reçu au niveau du détecteur est la somme de l'éclairement correspondant à chaque longueur d'onde. Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 2\varepsilon_0(1 + \cos(\omega_1\tau)) + 2\varepsilon_0(1 + \cos(\omega_2\tau)) \\ &= 2\varepsilon_0(2 + \cos(\omega_1\tau) + \cos(\omega_2\tau)) \end{aligned}$$

En utilisant l'identité $\cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$, nous obtenons :

$$\varepsilon = 4\varepsilon_0 \left(1 + \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\tau\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\tau\right) \right)$$

Nous avons $\omega_1 + \omega_2 = 2\pi c \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) = 2\pi c \left(\frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2}\right)$ et $\omega_1 - \omega_2 = 2\pi c \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = 2\pi c \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2}\right)$.

Or, nous sommes dans l'approximation $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \ll 1$, nous allons donc conserver uniquement les termes d'ordre 1 en $\Delta\lambda$, nous avons donc $\lambda_1 \lambda_2 = \left(\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}\right) \left(\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}\right) = \lambda_0^2 - \frac{(\Delta\lambda)^2}{4}$ d'où $\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_0^2$ à l'ordre 1 en $\Delta\lambda$.

Nous obtenons donc $\omega_1 + \omega_2 = 2\pi \frac{2c}{\lambda_0}$ et $\omega_1 - \omega_2 = 2\pi c \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}\right)$ d'où $\omega_1 - \omega_2 = 2\pi c \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$ et $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega_0$ d'où :

$$\varepsilon = 4\varepsilon_0 \left(1 + \cos\left(\frac{\pi c \Delta\lambda}{\lambda_0^2} \tau\right) \cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda_0} \tau\right) \right) \quad (8.1)$$

soit, en fonction de la distance d entre M_2 et l'image de M_1 :

$$\varepsilon = 4\varepsilon_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi \Delta\lambda}{\lambda_0^2} d\right) \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda_0} d\right) \right) \quad (8.2)$$

La figure 8.3 montre le graphe de la fonction précédente. Puisque $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \ll 1$, le terme $\cos\left(\frac{\pi c \Delta\lambda}{\lambda_0^2} \tau\right)$ oscille avec une période $\frac{2\lambda_0^2}{c \Delta\lambda}$ beaucoup plus grande que la période $\frac{\lambda_0}{c}$. Nous pouvons donc voir le terme $\cos\left(\frac{\pi c \Delta\lambda}{\lambda_0^2} \tau\right)$ comme **un terme de modulation de l'éclairement**.

8.1.2 Contraste

Nous pouvons exprimer le contraste de la figure d'interférences. Posons $V(\delta) = \cos\left(\frac{\pi c \Delta\lambda}{\lambda_0^2} \tau\right)$. Comme $\Delta\lambda \ll \lambda_0$, la fonction $V(\delta)$ peut-être considérée comme constante à l'échelle de λ_0 . Nous avons donc $\varepsilon_{max} = 4\varepsilon_0(1 + |V(\delta)|)$ et $\varepsilon_{min} = 4\varepsilon_0(1 - |V(\delta)|)$.

Le contraste a donc pour expression $C = \frac{\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}}{\varepsilon_{max} + \varepsilon_{min}} = \frac{8\varepsilon_0 |V(\delta)|}{8\varepsilon_0}$ d'où :

$$C = \left| \cos\left(\frac{\pi c \Delta\lambda}{\lambda_0^2} \tau\right) \right| \quad (8.3)$$

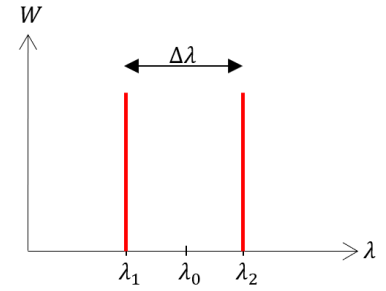


FIGURE 8.2: Spectre d'une source qui émet deux longueurs d'ondes voisines λ_1 et λ_2 .

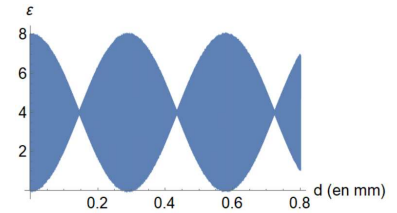


FIGURE 8.3: Interférogramme correspondant au graphe de $\varepsilon = 4\varepsilon_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi \Delta\lambda}{\lambda_0^2} d\right) \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda_0} d\right) \right)$.

Le contraste est donc nul lorsque le terme $\cos(\frac{\pi c \Delta \lambda}{\lambda_0^2} \tau)$ s'annule. Nous nommons ainsi **visibilité** le terme $\cos(\frac{\pi c \Delta \lambda}{\lambda_0^2} \tau)$ et notons :

$$\varepsilon = 4\varepsilon_0 \left(1 + V(d) \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda_0} d\right) \right)$$

où $V(d)$ est la visibilité.

Il y a donc un brouillage régulier de la figure d'interférence qui correspond au cas $\cos(\frac{\pi c \Delta \lambda}{\lambda_0^2} \tau) = 0$ lorsque nous augmentons la distance entre les deux miroirs en "charriotant". Un tel phénomène est un **phénomène de battement**.

Il y a brouillage de la figure d'interférence lorsque le retard vaut $\tau = (n + \frac{1}{2}) \frac{\lambda_0^2}{c \Delta \lambda}$ où n est un entier. Il faut donc déplacer les deux miroirs d'une distance $\frac{c\tau}{2} = \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda}$ pour passer d'un brouillage à l'autre. Autrement dit, une mesure de macroscopique du déplacement du miroir permet de **déterminer l'écart entre les deux longueurs d'onde**.

Si nous observons avec le montage précédent une lampe à vapeur de sodium de longueur d'onde $\lambda_0 = 589.3\text{nm}$, nous observons un brouillage des franges tous les 0.29 mm. Cela signifie que la lampe à vapeur de sodium émet deux longueurs d'onde séparées de 0.6 nm.

Cet écart de longueur d'onde correspond à un écart d'énergie entre deux niveaux de l'atome de sodium. Le Michelson sert dans ce cas de "microscope" pour aller **sonder l'écart d'énergie entre deux niveaux de l'atome de sodium!**

Le saviez-vous ? Le dédoublement des raies spectrales s'appelle la structure fine. Le sodium possède ainsi une raie d'émission jaune à 589.0 nm et à 589.6 nm.

8.2 Source à profil spectral rectangulaire

Dans la section précédente, nous avons analysé la figure d'interférences produite par deux longueurs d'onde. Toujours avec le même système optique, nous considérons maintenant une source dont l'éclairement se répartit sur une plage spectrale de largeur $\Delta\omega$. Nous notons $W(\omega)$ la densité spectrale d'éclairement. L'éclairement au niveau de la source entre ω et $\omega + d\omega$ a donc pour expression $d\varepsilon_0 = W(\omega)d\omega$. Nous utilisons à nouveau le principe de superposition pour écrire l'expression de l'éclairement reçu **au niveau du détecteur** :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 2W(\omega) \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} (1 + \cos(\omega\tau)) d\omega \\ &= 2W(\omega)\Delta\omega + \frac{2W(\omega)}{\tau} [\sin(\omega\tau)]_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \\ &= 2W(\omega)\Delta\omega + \frac{4W(\omega)}{\tau} \sin(\tau\Delta\omega) \cos(\omega_0\tau) \end{aligned}$$

soit :

$$\varepsilon = 2W(\omega)\Delta\omega (1 + V(\omega) \cos(\omega_0\tau)) \tag{8.4}$$

avec $V(\omega) = \frac{\sin(\frac{\tau}{2}\Delta\omega)}{\frac{\tau}{2}\Delta\omega}$. La figure d'interférences obtenues pour une source de profil spectral rectangulaire est différente de la figure d'interférences obtenues pour un doublet de longueur d'onde. Autrement dit, il y a un lien entre **la figure d'interférence et la densité spectrale d'énergie de la source**. Ainsi, l'enregistrement de la figure d'interférence permet de déterminer la densité spectrale d'énergie de la source, c'est le principe de la spectroscopie par l'interféromètre de Michelson.

Comme $\Delta\omega \ll \omega_0$, nous pouvons considérer que $V(\omega)$ est constant sur une période λ_0 . Nous avons donc $\varepsilon_{max} = 4\varepsilon_0(1 + |V(\delta)|)$ et $\varepsilon_{min} = 4\varepsilon_0(1 - |V(\delta)|)$.

☞ Nous utilisons la relation trigonométrique $\sin A - \sin B = 2 \sin(\frac{A-B}{2}) \cos(\frac{A+B}{2})$.

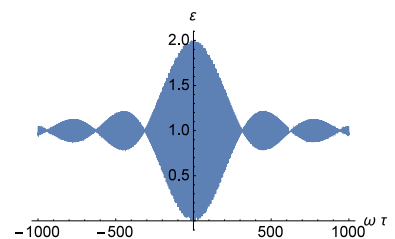


FIGURE 8.4: Éclairement observé en fonction du retard τ dû à l'écart entre les deux miroirs. Cette figure dans son ensemble constitue l'interférogramme.

Le facteur de contraste a donc pour expression :

$$C = |V(\omega)| = \frac{\sin(\frac{\tau}{2}\Delta\omega)}{\frac{\tau}{2}\Delta\omega} \quad (8.5)$$

Le premier brouillage est obtenu pour $\frac{\tau}{2}\Delta\omega = \pi$. La durée τ d'un train d'onde est donc reliée à la largeur spectrale de la source par :

$$\tau\Delta\omega = 2\pi \quad (8.6)$$

La longueur de cohérence a donc pour expression $\frac{2\pi c}{\Delta\omega}$.

8.3 Interférences en lumière blanche

Nous avons montré dans la section précédente que la largeur spectrale de la source est reliée à la longueur de cohérence temporelle de la source. Ainsi, nous pouvons observer des franges en lumière blanche tant que la différence de marche entre deux rayons lumineux est inférieure à la longueur de cohérence temporelle de la source. Nous pouvons ainsi observer des franges d'interférences en lumière blanche à la surface d'une lame mince d'épaisseur inférieure à la longueur de cohérence de la lumière blanche.

La figure 8.5 montre les franges observées à la surface d'une bulle d'eau savonneuse.

La différence de marche δ au point M situé sur le film d'eau savonneuse d'épaisseur $e(M)$ entre deux rayons issus d'une source ponctuelle monochromatique est donnée en réflexion par $\delta = \frac{\lambda}{2} + 2ne(M) \cos i$ où i est l'angle de réfraction dans le film. En incidence quasi-normale, la différence de marche a donc pour expression $\delta = \frac{\lambda}{2} + 2ne(M)$. Il en résulte que l'interfrange dépend de la longueur d'onde et de l'épaisseur locale du film.

Chaque longueur d'onde crée donc **son propre système de frange** avec sa propre interfrange. **Le mélange des différentes couleur en fonction de l'épaisseur donne l'échelle de teintes de Newton.**

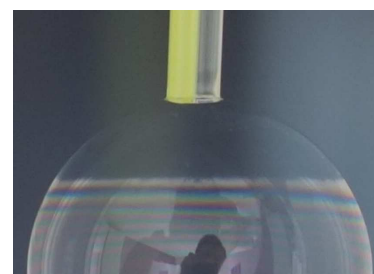


FIGURE 8.5: Photo d'une bulle de savon réalisée à l'aide d'une paille.

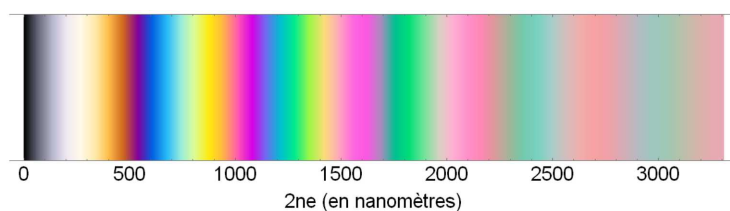


FIGURE 8.6 – Couleurs observées à la surface d'un film d'eau savonneuse en fonction de l'épaisseur de ce film. Attention, l'axe des abscisses représente $2ne$.

Lorsque l'épaisseur du film est suffisamment importante, on observe que les franges deviennent très pâles puis ne sont plus distinguables à l'œil nu bien qu'il manque certaines couleurs dans le blanc observé. On parle alors de **blanc d'ordre supérieur**.