CHAPITRE 6

L'éclairement

Objectifs :

- définir la notion d'éclairement.
- utiliser la formule de Fresnel.
- définir le contraste de Michelson.

Jusqu'à présent nous n'avons pas détaillé la quantité physique que nous observions dans les différentes expériences que nous avons vu. Nous allons voir que la réponse à cette question est subtile et va nous conduire à retrouver les conditions d'obtentions d'interférences à deux ondes.

Le saviez-vous ? Le temps de réponse d'un détecteur dépend évidement du type de détecteur. Le temps de réponse de l'œil est de quelques centièmes de seconde. Le temps de réponses des photo-diodes peut descendre jusqu'à 10^{-12} s.

6.1 Définition de l'éclairement

Étant donnée que nous traitons la lumière comme une onde, la quantité physique que nous observons ne peut pas être proportionnelle à son amplitude auquel cas nous n'observerions en moyenne aucun signal. Nous posons donc la définition suivante de **l'éclairement** :

$$\boxed{\varepsilon(M,t) = < a^2(M,t) >} \tag{6.1}$$

où la valeur moyenne est prise sur le temps de détection du détecteur.

Le saviez-vous ? L'éclairement se nomme également l'irradiance. Le terme impropre d'intensité est très utilisé. Nous avons ici présenté l'éclairement comme la valeur moyenne du carré de l'amplitude. Nous verrons dans le cours d'électromagnétisme que l'irradiance est la densité surfacique de puissance rayonnée moyenne (en joules par seconde et par mètre carré), est proportionnelle au carré du champ électrique. Plus précisément, l'irradiance dans un milieu diélectrique homogène et isotrope a pour expression $\varepsilon = \epsilon v E^2$ où ϵ est la permittivité électrique du milieu et v et la vitesse de la lumière dans le milieu. Le fait que l'éclairement soit proportionnel au carré du champ électrique ne doit pas surprendre. En effet, la force $q\vec{v}\wedge\vec{B}$ ne travaille pas, c'est donc le champ électrique qui est détecté.

6.2 Conditions d'obtention d'interférences à deux ondes

Nous considérons deux sources ponctuelles S_1 et S_2 qui émettent une succession de trains d'onde, c'est à dire-à-dire que **la phase à la source ϕ_S varie au cours du temps.** Nous ne pouvons donc plus considérer dans ce cas que la source est purement monochromatique, cependant, nous pouvons continuer à utiliser le postulat en considérant que la fréquence angulaire qui apparait dans la phase de la fonction cosinus est **la fréquence centrale du train d'onde.** On considère que l'extension spatiale du détecteur est petite devant la distance entre le point d'observation et le détecteur. Nous pouvons ainsi considérer que l'amplitude de chaque onde est constante. Le champ total au point M s'écrit, d'après le principe de superposition :

$$a(M,t) = a_1(M,t) + a_2(M,t)$$
$$= A_1 \cos\left(\omega_1 t - 2\pi\frac{(S_1M)}{\lambda_0} - \phi_{S1}(t)\right) + A_2 \cos\left(\omega_2 t - 2\pi\frac{(S_2M)}{\lambda_0} - \phi_{S2}(t)\right)$$

L'éclairement $\varepsilon(M,t)$ a donc pour expression :

$$\varepsilon(M,t) =< (a_1+a_2)^2 >=< a_1^2 > + < a_2^2 > +2 < a_1a_2 >$$

Dans le cas où le terme $< a_1a_2 >$ est nul, l'éclairement au point M est alors la somme de l'éclairement de l'onde 1 et de l'éclairement de l'onde 2. Il ne peut y avoir d'interférences dans ce cas. Le terme $< a_1a_2 >$ correspond donc **au terme d'interférence**. Nous obtenons donc :

$$\varepsilon(M,t) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2A_1A_2$$
$$< \cos\left(\omega_1 t - 2\pi\frac{(S_1M)}{\lambda_0} - \phi_{S1}(t)\right) \cos\left(\omega_2 t - 2\pi\frac{(S_2M)}{\lambda_0} - \phi_{S2}(t)\right) >$$

Nous obtenons donc après développement du produit de cosinus :

$$\varepsilon(M,t) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + A_1A_2$$
$$\left(< \cos\left((\omega_1+\omega_2)t - 2\pi\frac{(S_1M + S_2M)}{\lambda_0} - (\phi_{S1}(t)+\phi_{S2}(t))\right) >\right.$$
$$\left. + < \cos\left((\omega_2-\omega_1)t - 2\pi\frac{(S_2M)-(S_1M)}{\lambda_0} - (\phi_{S2}(t)-\phi_{S1}(t))\right) >\right)$$

La valeur moyenne de l'avant dernier terme est toujours nulle étant donnée que la période d'oscillation du cosinus est très petite devant le temps de détection. Nous obtenons donc :

$$\varepsilon(M,t) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 +$$
$$A_1A_2 < \cos\left((\omega_2-\omega_1)t - 2\pi\frac{(S_2M)-(S_1M)}{\lambda_0} - (\phi_{S2}(t)-\phi_{S1}(t))\right) >$$

Nous cherchons les conditions pour que les deux ondes lumineuses interfèrent au point M. Une condition minimale est d'avoir $\omega_1 = \omega_2$. En effet, dans le cas où la période d'oscillation du cosinus est très petite devant le temps de détection, nous avons $< \cos(\omega t + \phi) >= 0$. La période des ondes lumineuses dans le domaine visible est de l'ordre de 10^{-14} s. Nous avons donc obtenue une première condition pour observer des interférences :

Des ondes cohérentes ont nécessairement la même fréquence centrale.

L'éclairement au point M a maintenant pour expression :

$$\varepsilon(M,t) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 +$$
$$A_1A_2 < \cos\left(2\pi\frac{(S_1M)-(S_2M)}{\lambda_0} - (\phi_{S2}(t)-\phi_{S1}(t))\right) >$$

Nous avons vu au chapitre précédent que la phase à l'origine varie aléatoirement d'un train d'onde à l'autre, c'est-à-dire toutes les 10^{-11} s pour une lampe spectrale classique. Ainsi, dans le cas où les phases à l'origine de chaque source sont indépendantes l'une de l'autre, le déphasage à l'origine

Point notation ! Attention, les symboles sont les mêmes que dans l'onde décrite lors du postulat mais les différences de sens physiques sont importantes. Ainsi la phase à l'origine dépend maintenant du temps. Le signal n'est donc plus monochromatique, la fréquence angulaire qui apparait est donc la fréquence centrale du train d'onde.

Le saviez-vous ? Le terme $< a_1a_2 >$ est appelé la fonction de corrélation. Dans le cas courant où la même onde est divisée en deux faisceaux de même amplitude qui interfèrent, nous parlons de fonction d'autocorrélation.

☞ Rappelons la formule de trigonométrie $\cos A \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B))$.

☞ Par définition, la valeur moyenne temporelle d'une fonction $f(t)$ sur un intervalle de temps T a pour expression $< f >= \frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(t)dt$. Si le terme $\int_t^{t+T} f(t)dt$ est négligeable devant la durée T alors $< f >\to 0$.

$\phi_{S2}(t) - \phi_{S1}(t)$ varie aléatoirement sur la durée d'intégration et nous avons $< \cos\left(2\pi\frac{(S_1M)-(S_2M)}{\lambda_0} - (\phi_{S2}(t) - \phi_{S1}(t))\right) >= 0$. Plus concrètement, cela revient à observer pendant une durée très supérieure à $\tau^\star$ une figure d'interférence qui se décale dans le temps tous les $\tau^\star$, nous observons ainsi la moyenne de toutes ces figures d'interférences, c'est-à-dire un écran dépourvu de franges d'interférences. Pour observer des interférences, il faut donc que les deux sources ponctuelles S_1 et S_2 soient issues de la même source de telle sorte que $\phi_{S1}(t) = \phi_{S2}(t)$ ou tout du moins il faut que $\phi_{S2}(t) - \phi_{S1}(t) = cst$. Autrement dit :

Il faut que les phases à l'origine ne soient pas décorrélées sur la durée de détection.

Nous avons ainsi retrouvé les règles énumérées au chapitre précédent.

6.3 Formule de Fresnel

Nous obtenons finalement l'expression suivante de l'éclairement au point M :

$$\varepsilon(M,t) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + A_1A_2\cos\left(2\pi\frac{(S_1M)-(S_2M)}{\lambda_0}\right)$$

Nous pouvons exprimer l'amplitude de chaque onde en fonction de l'éclairement produit par chaque source. En effet :

$$\varepsilon_1 = A_1^2 < \cos\left(\omega_1 t - 2\pi\frac{(S_1M)}{\lambda_0} - \phi_{S1}(t)\right)\cos\left(\omega_1 t - 2\pi\frac{(S_1M)}{\lambda_0} - \phi_{S1}(t)\right) >$$

Nous obtenons donc :

$$\varepsilon_1 = \frac{A_1^2}{2} < \cos\left(2\omega_1 t - 2\pi\frac{2S_1M}{\lambda_0} - 2\phi_{S1}(t)\right) > + \frac{A_1^2}{2} = \frac{A_1^2}{2}$$

Nous obtenons donc l'expression suivante de l'éclairement, appelée formule de Fresnel :

$$\boxed{\varepsilon(M) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\cos(\Delta\phi)} \tag{6.2}$$

avec :

$$\boxed{\Delta\phi = 2\pi\frac{(S_1M)-(S_2M)}{\lambda_0}} \tag{6.3}$$

La fonction cosinus est comprise entre -1 et 1. La valeur minimale de l'éclairement a donc pour expression $\varepsilon_{min} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ et sa valeur maximale a pour expression $\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$. Dans le cas où les deux ondes ont la même amplitude, nous obtenons $\varepsilon_{min} = 0$ et $\varepsilon_{max} = 4\varepsilon_1$. Autrement dit :

☞ Attention, il faut bien voir que le phénomène d'interférence ne viole pas le principe de conservation de l'énergie. La répartition spatiale de l'énergie lumineuse est différente en présence d'interférences mais l'énergie lumineuse totale émise par les sources est constante.

La visibilité des figures d'interférence est maximale dans le cas où les sources ont la même amplitudes.

Nous avons vu précédemment que des interférences peuvent uniquement être obtenues entre deux sources de même fréquence centrale et de différence de phase à la source constante. Nous pouvons donc retrouver rapidement la **formule de Fresnel** en posant directement :

$$a_1 = A_1\cos(\phi_1) \quad \text{et} \quad a_2 = A_2\cos(\phi_2) \tag{6.4}$$

avec $\phi_1 = \omega t - 2\pi\frac{(S_1M)}{\lambda_0} + \phi_{S1}$ et $\phi_2 = \omega t - 2\pi\frac{(S_2M)}{\lambda_0} + \phi_{S2}$ où ϕ_{S1} et ϕ_{S2} sont des déphasages supplémentaires dues à des réflexions éventuelles des rayons lumineux sur une interface. Nous avons donc $\varepsilon =< a_1^2 > + < a_2^2 > +2 < a_1a_2 >= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2A_1A_2 < \cos(\phi_1)\cos(\phi_2) >= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\cos(\Delta\phi)$.

6.4 Utilisation de la notation complexe

L'idée de la notation complexe est d'utiliser **la simplicité des calculs que permet la fonction exponentielle complexe**. Ainsi, nous pouvons utiliser les équations 6.4 en notations complexes pour faire les calculs si nous prenons à la fin la partie réelle du résultat trouvé qui elle seule à une signification physique. Nous posons donc :

$$\underline{a_1} = A_1 e^{-i\phi_1} \quad \text{et} \quad \underline{a_2} = A_2 e^{-i\phi_2}$$

Nous avons montré précédemment que $< a_1^2 >= \frac{1}{2}A_1^2$ or $\frac{1}{2}\underline{a_1}\underline{a_1^\star} = \frac{1}{2}A_1 e^{-i\phi_1} A_1 e^{i\phi_1} = \frac{1}{2}A_1^2$. Ainsi, le calcul de **l'éclairement en notation complexe** revient à calculer $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\underline{a_1}\underline{a_1^\star}$.

L'éclairement est donc donné par :

$$\begin{aligned}
\varepsilon =< (a_1 + a_2)^2 > &= \frac{1}{2}\left((\underline{a_1} + \underline{a_2})(\underline{a_1} + \underline{a_2})^\star\right) \\
&= \frac{1}{2}A_1^2 + \frac{1}{2}A_2^2 + \frac{1}{2}(\underline{a_1}\underline{a_2^\star} + \underline{a_2}\underline{a_1^\star}) \\
&= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \frac{1}{2}A_1 A_2 \left(e^{-i(\phi_2-\phi_1)} + e^{i(\phi_2-\phi_1)}\right) \\
&= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + A_1 A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)
\end{aligned}$$

soit :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\cos(\Delta\phi)$$

Le saviez-vous ? Nous appliquons ici le formalisme de la notation complexe à une onde sinusoïdale. Nous pouvons ainsi écrire directement que $< a_1^2 >= \frac{1}{2}\underline{a_1}\underline{a_1^\star}$. Si nous voulons mesurer la cohérence d'une onde, nous devons considérer une onde éventuellement non sinusoïdale et nous ne pouvons pas "enlever" la valeur moyenne en utilisant la notation complexe. Nous obtenons dans ce cas $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\Re < \underline{a_1^\star a_2} >$ où la fonction $< \underline{a_1^\star a_2} >$ est la fonction de de corrélation de l'onde 1 avec l'onde 2.

☞ Notons que $\underline{a_2}\underline{a_1^\star} + \underline{a_1}\underline{a_2^\star} = (\underline{a_2}\underline{a_1^\star}) + (\underline{a_2}\underline{a_1^\star})^\star = 2\Re(\underline{a_1^\star}\underline{a_2})$.

6.5 Contraste

Le contraste des franges d'interférence est une fonction de ε_{min} et ε_{max} et se calcule en utilisant la formule du contraste de Michelson :

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}}{\varepsilon_{max} + \varepsilon_{min}}} \tag{6.5}$$

En utilisant les expressions $\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ et $\varepsilon_{min} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ obtenues à partir de l'équation de Fresnel, nous obtenons :

$$\boxed{C = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_2}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \tag{6.6}$$

Cette expression montre que le contraste des franges est maximal pour $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

6.6 Un exemple simple

Nous allons utiliser un interféromètre de Michelson pour mettre en évidence l'utilisation de la formule de Fresnel. La figure 6.1 montre le schéma simplifié d'un tel montage. Un Laser fait office de source S. L'image de S à travers le miroir M_1 est la source S_1 tandis que l'image de S à travers le miroir M_2 est la source S_2. La séparatrice et la compensatrice sont représentés par un unique trait. Le miroir M_1 est fixe et le miroir M_2 est mobile. L'amplitude du rayon lumineux incident est divisé en deux par la séparatrice. Le rayon qui frappe le miroir M_2 parcourt une distance $2d$ supplémentaire par rapport au rayon qui frappe le miroir M_1. Le rayon qui frappe le miroir M_2

arrive donc avec un retard $\tau = \frac{2d}{c}$ sur le détecteur par rapport au rayon qui frappe le miroir M_1. Nous considérons que le retard est inférieur au temps de cohérence.

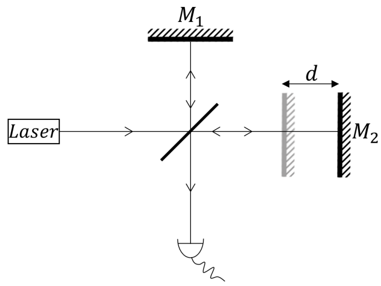

FIGURE 6.1: Interféromètre de Michelson.

Nous cherchons l'expression de l'éclairement au niveau du détecteur. Nous utilisons la formule de Fresnel (équation 6.2) et l'expression du déphasage. La séparatrice divise l'amplitude du faisceau incident en deux faisceaux d'amplitude égale. La formule de Fresnel s'écrit donc :

$$\boxed{\varepsilon = 2\varepsilon_1(1 + \cos(\Delta\phi)) = 4\varepsilon_1 \cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)} \tag{6.7}$$

Le déphase s'écrit ici $\Delta\phi = 2\pi 2d\lambda_0 = 2\pi\frac{c}{\lambda_0}\tau = 2\pi f\tau = \omega\tau$. L'éclairement au niveau du détecteur a donc pour expression :

$$\varepsilon = 2\varepsilon_1(1 + \cos(\omega\tau)) = 4\varepsilon_1 \cos^2(\frac{\omega}{2}\tau)$$

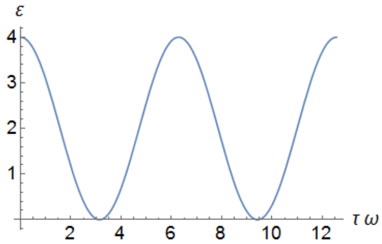

FIGURE 6.2: Graphe de l'éclairement $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$ en fonction de $\omega\tau$.

Le figure 6.2 montre le graphe de l'éclairement au niveau du détecteur en fonction de τ.

L'éclairement pour une position donnée du miroir M_2 correspond à une valeur donnée sur le graphe précédent. Pour $d = 0$, l'éclairement vaut $4\varepsilon_1$. La valeur de l'éclairement varie ensuite en augmentant la distance d.

Dans le cas de l'interféromètre de Michelson éclairé par un Laser, le contraste de Michelson vaut 1 quelque soit la valeur de τ. Cela signifie que la cohérence entre les sources S_1 et S_2 est totale. C'est bien le cas puisque nous avons considéré une source S purement monochromatique.