

## CHAPITRE 10

---

# Diffraction

---

### Objectifs :

- Calculer la figure de diffraction dans les conditions de Fraunhofer.

La diffraction est un phénomène très général qui se produit dès qu'une portion d'onde, quelque soit sa nature, est obstruée de quelque manière que ce soit. Nous allons voir qu'il n'y a pas de différence fondamentale entre le phénomène d'interférence et de diffraction.

Nous allons dans cette partie utiliser une description purement ondulatoire de la lumière. La théorie de la diffraction est à ce titre une théorie effective dans le sens où cette théorie décrit parfaitement les résultats observés mais ne décrit pas la réalité du phénomène physique.

### 10.1 Principe de Huygens-Fresnel

Le principe de Huygens-Fresnel s'énonce ainsi :

**Tout point de l'espace atteint par une onde se met à vibrer et rayonne une ondelette sphérique secondaire de même fréquence et de même phase que l'onde initiale. La propagation de la surface d'onde de même que l'effet d'obstacles interposés se décrit par superposition (ou interférence) de ces ondelettes secondaires.**

Ce principe implique que la diffraction est un phénomène d'interférence.

Appliquons qualitativement le principe de Huygens-Fresnel à la fente de la figure 10.1. Les ondes secondaires sont émises uniquement au niveau de la fente d'après le principe de Huygens-Fresnel. Pour déterminer qualitativement l'état d'interférence des ondes secondaires en un point  $P$ , nous devons considérer la différence de chemin optique  $(AP) - (BP)$  entre les ondes émises par les points les plus extrêmes de la fente. En effet, nous pouvons observer des interférences en un point  $P$  uniquement si cette différence de chemin optique est bien plus faible que la longueur d'onde de la lumière émise, c'est-à-dire si  $(AP) - (BP) \ll \lambda$ . Dans ce cas, toutes les sources entre  $A$  et  $B$  sont en phases et produisent des interférences au point  $P$ . Au point  $P_1$ , la différence de chemin optique est de l'ordre de grandeur de la lar-

geur de la fente, nous pouvons donc observer des interférences constructives au point  $P_1$  uniquement si  $AB \ll \lambda$ . Dans le cas contraire ( $\lambda \ll AB$ ), nous observons des interférences destructives au point  $P_1$  puisque nous pouvons associer à chaque source secondaire de la fente un autre point source située à une distance  $\frac{\lambda}{2}$ . Au point  $P_2$  qui est au centre de la fente, nous observons des interférences constructives quelque soit la largeur de la fente. Autrement dit, le principe de Huygens-Fresnel, nous permet de retrouver qualitativement l'élargissement d'un faisceau lumineux après son passage par une fente de largeur inférieure à sa longueur d'onde. Nous retrouvons également grâce à ce principe que la lumière se comporte purement comme un rayon lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ , c'est la limite de l'optique géométrique.

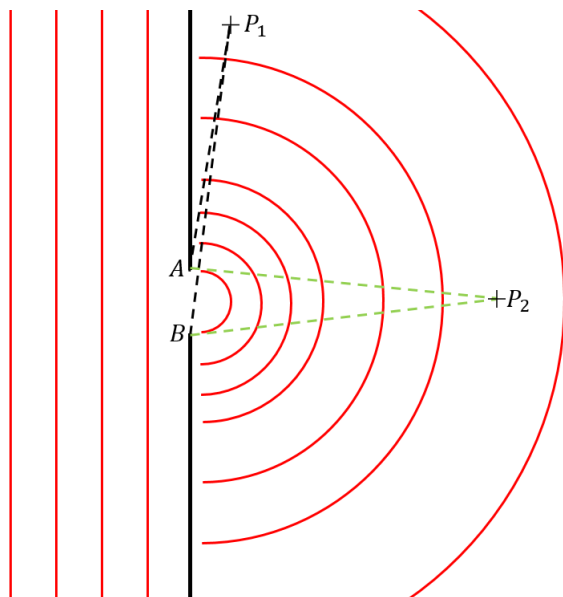


FIGURE 10.1 – Illustration du principe de Huygens-Fresnel.

Nous allons maintenant voir qu'il est possible de déterminer par le calcul la figure de diffraction de la lumière qui passe à travers une ouverture. Nous allons nous limiter **aux conditions d'observation qui simplifient le plus possible le calcul**. Nous nous plaçons alors dans les conditions dites de Fraunhofer.

Nous allons maintenant détailler les approximations qui nous conduisent à l'expression de la diffraction de Fraunhofer.

Nous utilisons les notations et la géométrie détaillée dans la figure 10.2.

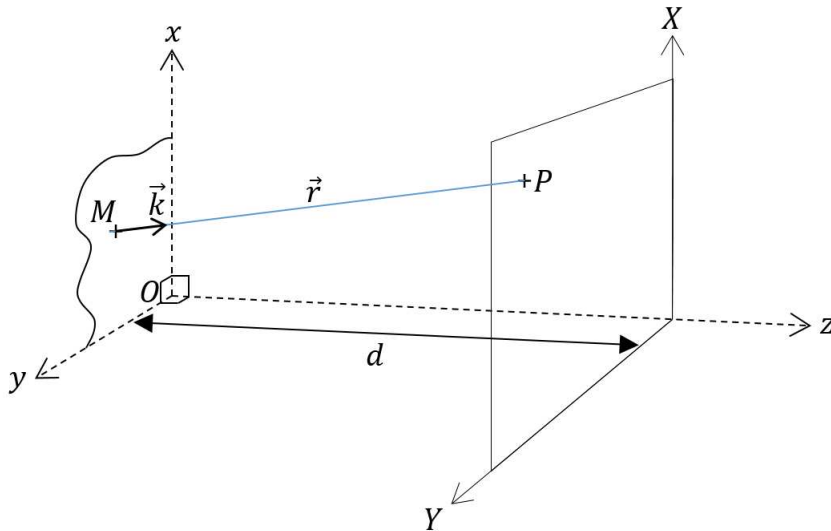


FIGURE 10.2 – Notations utilisées pour déterminer la figure de diffraction.

Suivant le principe de Huygens-Fresnel, l'amplitude complexe de l'onde en un point  $P$  après une ouverture de surface  $S$  a pour expression :

$$\underline{a}(X, Y) = \iint_S \mathcal{A}(x, y) \frac{1}{r} e^{i(kr - \omega t - \phi_S)} dS \quad (10.1)$$

Où  $\mathcal{A}(x, y)$  est l'amplitude complexe de la source secondaire émise par unité de surface.

Nous nous plaçons dans le cas où l'onde incidente est plane et ne fait pas d'angle avec l'axe  $Oz$ . Il n'y a donc pas de déphasage entre les sources secondaires qui ont donc toutes la même phase à l'origine. Nous pouvons supprimer ce terme dans l'expression de l'amplitude au point  $P$  ainsi que la dépendance temporelle qui disparaîtront ultérieurement lors du calcul de l'éclairement et écrire :

$$\underline{a}(X, Y) = \iint_S \frac{\mathcal{A}(x, y)}{r} e^{ikr} dS \quad (10.2)$$

Nous allons maintenant étudier la figure de diffraction obtenue dans des conditions d'observations particulières.

## 10.2 Diffraction de Fresnel

Nous allons dans un premier temps nous placer dans **les conditions de Gauss**. C'est-à-dire que les rayons sont peu inclinés par rapport à l'axe optique et demeurent proche de l'axe. Dans cette approximation, nous avons  $r \simeq d$ . Attention cependant au terme exponentielle complexe, nous pouvons avoir un terme petit qui implique une grande variation de ce terme. Nous devons être plus vigilant sur les approximations faites dans le terme  $e^{ikr}$ .

Le traitement du terme  $kr$  doit donc se faire avec soin et il faut bien identifier les approximations faites à chaque étape. L'approximation  $kr \simeq kd$  est trop forte puisque l'argument de l'exponentielle ne dépend plus des coordonnées du points d'observation et d'émission. Nous devons être plus fin dans notre traitement de ce terme.

Nous considérons une source secondaire  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  et un point d'observation  $P$  sur l'écran de coordonnées  $(X, Y)$ . La distance  $r$  qui sépare les points  $M$  et  $P$  a pour expression :

$$r = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = \sqrt{(\vec{OP} - \vec{OM}) \cdot (\vec{OP} - \vec{OM})} = \sqrt{d^2 + (Y - y)^2 + (X - x)^2}$$

Nous nous plaçons dans les conditions d'observation telles que  $d \gg x, y$ , les conditions de Gauss impliquent alors également  $d \gg X, Y$ . Nous pouvons donc écrire la distance  $r$  sous la forme :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{d^2 + (Y - y)^2 + (X - x)^2} \\ &= d \sqrt{1 + \frac{(Y - y)^2}{d^2} + \frac{(X - x)^2}{d^2}} \\ &\simeq d \left( 1 + \frac{(Y - y)^2}{2d^2} + \frac{(X - x)^2}{2d^2} \right) \\ &\simeq d \left( 1 + \frac{x^2 + y^2}{2d^2} - \frac{xX + yY}{d^2} + \frac{X^2 + Y^2}{2d^2} \right) \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\underline{a}(X, Y) = \frac{1}{d} e^{ikd} e^{ik \frac{x^2 + y^2}{2d}} \iint_S \mathcal{A}(x, y) e^{-ik \frac{xX + yY}{d}} e^{ki \frac{x^2 + y^2}{2d}} dS \quad (10.3)$$

L'expression précédente constitue l'expression de la **diffraction de Fresnel**. Cette expression donne l'amplitude diffractée en champ proche, c'est-à-dire pour  $P$  à proximité de  $M$ .

### 10.3 Diffraction de Fraunhofer

Nous simplifions encore cette expression en nous plaçant dans l'approximation  $e^{-ik \frac{x^2 + y^2}{2d}} \simeq 1$  soit  $d \gg \frac{x^2 + y^2}{\lambda}$ . La diffraction de Fraunhofer correspond donc à la figure de diffraction observée à une distance très grande devant la taille de l'obstacle.

Concrètement, nous respectons cette condition en observant la figure de diffraction à l'infini. Attention, bien que  $d$  tende vers l'infini, le rapport  $\frac{X}{d}$  et  $\frac{Y}{d}$  reste fini puisque le point  $P$  s'éloigne du centre de l'écran quand  $d$  augmente dans les mêmes proportions..

L'amplitude complexe diffractée a donc pour expression dans l'approximation de Fraunhofer :

$$\underline{a}(X, Y) = K \iint_S \mathcal{A}(x, y) e^{-ik \frac{xX + yY}{d}} dS \quad (10.4)$$

où  $K$  est un facteur de proportionnalité complexe et  $\mathcal{A}(x, y)$  l'amplitude de l'onde incidente.

On peut introduire les angles  $\theta_X = \frac{X}{d}$  et  $\theta_Y = \frac{Y}{d}$  sous lesquels le point  $P$  est vue depuis le point  $O$  pour obtenir :

$$\underline{a}(X, Y) = K \iint_S \mathcal{A}(x, y) e^{-ik(x\theta_X + y\theta_Y)} dS \quad (10.5)$$

Dans les conditions de Gauss,  $\sin \theta = \theta$ , et nous pouvons donc réécrire l'expression de l'amplitude diffractée sous la forme :

$$\underline{a}(X, Y) = K \iint_S \mathcal{A}(x, y) e^{-i\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM}} dS \quad (10.6)$$

Cependant, pour obtenir l'écriture la plus importante de la diffraction de Fraunhofer, nous introduisons les fréquences spatiales :

$$u = \frac{X}{\lambda d} = \frac{\theta_X}{\lambda} \quad \text{et} \quad v = \frac{Y}{\lambda d} = \frac{\theta_Y}{\lambda} \quad (10.7)$$

pour obtenir :

$$\underline{a}(u, v) = K \iint_S \mathcal{A}(x, y) e^{-i2\pi(u x + v y)} dx dy \quad (10.8)$$

$$= K \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(x, y) \mathcal{A}(x, y) e^{-i2\pi(u x + v y)} dx dy \quad (10.9)$$

où  $t(x, y)$  est la transmission de l'ouverture. C'est-à-dire que  $t = 1$  pour  $M$  dans l'ouverture et  $t = 0$  pour  $M$  en dehors de l'ouverture. Nous obtenons donc :

$$\underline{a}(u, v) = K TF(t\mathcal{A}) \quad (10.10)$$

où  $TF$  est la transformée de Fourier. L'éclairement diffracté a donc pour expression :

$$\varepsilon(u, v) = \varepsilon_0 |TF(t\mathcal{A})|^2 \quad (10.11)$$

## 10.4 Réalisation expérimentale de la diffraction de Fraunhofer

On peut se placer dans les conditions de Fraunhofer en observant l'amplitude diffractée dans le plan focal d'une lentille. On suppose cette lentille "parfaite", c'est-à-dire stigmatique et de grand diamètre (pour éviter la diffraction par les bords de la lentille).

Supposons une onde incidente plane (source ponctuelle à l'infini) et que l'on mette la lentille  $L$  juste après la surface diffractante, alors dans le plan image de  $L$ , chaque rayon diffracté dans la direction  $(u, v)$  sera focalisé à une position particulière. Autrement dit, on obtient une image de la figure de diffraction à l'infini : la distribution du champ dans le plan focal de la lentille est donnée par l'expression de la diffraction de Fraunhofer. La lentille effectue donc une transformée de Fourier spatiale de l'ouverture diffractante : c'est ce que l'on appelle la propriété de transformation de Fourier de la lentille.

On définit alors le plan de Fourier d'un système optique : c'est le plan dans lequel on obtient par diffraction la transformée de Fourier de l'ouverture du système.

## 10.5 Diffraction par une fente rectangulaire

Nous considérons la diffraction d'une onde plane d'amplitude  $A = A_0$  par une fente rectangulaire de largeur  $a$  et de hauteur  $b$  contenue dans le

plan  $xOy$ . Le centre de la fente coïncide avec le point  $O$ . L'ouverture est donc décrite par la fonction  $t = \text{rect}(x/a)\text{rect}(y/b)$ . Nous observons dans le plan focal d'une lentille de distance focale  $L$ .

L'expression de l'amplitude diffractée dans la direction  $(u, v)$  devient donc :

$$\underline{a}(P) = K A_0 \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i2\pi ux} dx \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik\pi vy} dy \quad (10.12)$$

soit :

$$\underline{a}(P) = K A_0 ab \frac{\sin(\pi ub)}{\pi ua} \frac{\sin(\pi vb)}{\pi vb} \quad (10.13)$$

L'éclairement a donc pour expression :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \text{sinc}^2(\pi ua) \text{sinc}^2(\pi vb) \quad (10.14)$$

Avec  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ . La figure suivante montre le graphe de la fonction sinus cardinal.

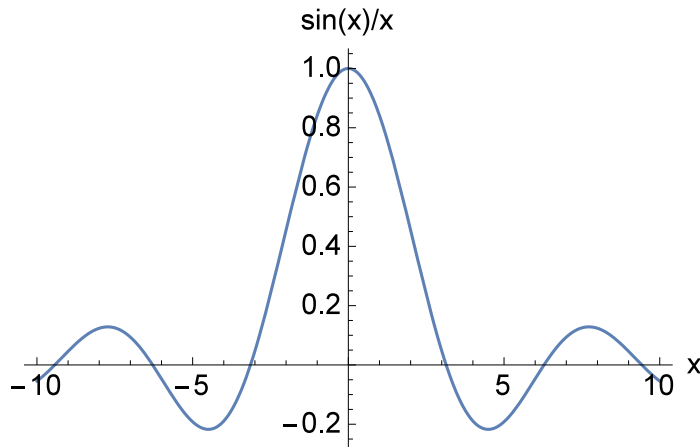


FIGURE 10.3 – Graphe du sinus cardinal.

La première extinction de l'éclairement est donc obtenue à  $X = \frac{\lambda f}{2a}$  et  $Y = \frac{\lambda f}{2b}$ . La tache centrale est donc un rectangle de largeur  $\frac{\lambda f}{b}$  et de hauteur  $\frac{\lambda f}{a}$ . Notons que plus la fente est fine dans une direction, plus la tache de diffraction est grande dans cette direction.

La figure suivante montre l'image de la figure de diffraction observée sur l'écran :

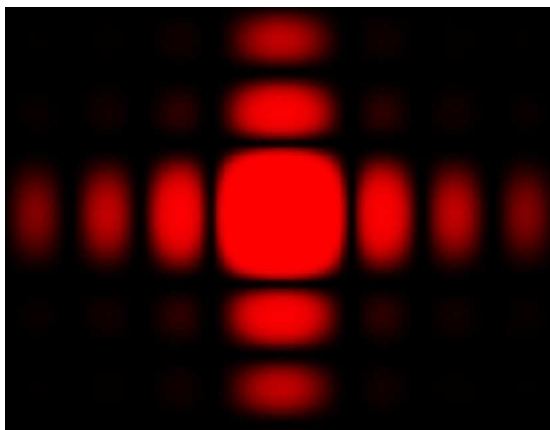


FIGURE 10.4 – Figure de diffraction d'une fente rectangulaire observée sur un écran.

## 10.6 Rappel sur la transformée de Fourier

On définit la transformée de Fourier ( $F(u) = TF(f)$ ) de la fonction  $f : x \rightarrow f(x)$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{C}$  par :

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i2\pi ux} dx$$

On définit la transformée de Fourier inverse ( $f(x) = TF^{-1}(F)$ ) de la fonction  $F : u \rightarrow f(u)$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{C}$  par :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)e^{i2\pi ux} du$$

Nous en déduisons que  $TF^{-1}(TF(f)) = f$

Transformée de Fourier à deux dimensions de la fonction  $f : x, y \rightarrow f(x, y)$  :

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)e^{-i2\pi ux} e^{-i2\pi vy} dx dy$$