CHAPITRE 4

Le théorème scalaire du moment cinétique

Dans le chapitre précédent, nous avons vu l'expression du théorème du moment cinétique en mécanique du point. Ce théorème est donc valide uniquement pour un solide qui peut être assimilé à un point.

Nous avons notamment montré que le moment cinétique calculé en O d'un point matériel de masse m en rotation autour de O a pour expression :

$$\vec{\mathcal{L}}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ ml\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = ml^2\dot{\theta}\hat{u}_z = ml^2\vec{\omega}$$

où $\vec{\omega}$ est le vecteur vitesse angulaire. Ainsi, le théorème du moment cinétique appliqué à un **mobile ponctuel** montre que **le moment cinétique est orienté dans la direction du vecteur vitesse angulaire**.

Le saviez-vous ? Il est en effet possible d'associer un vecteur à un mouvement de rotation. Considérons par exemple le mouvement de rotation de la terre sur elle-même, nous pouvons associer à ce mouvement un vecteur en utilisant la règle de la main droite par convention. Le sens de rotation est donné par les index et le pouce indique la direction du vecteur $\vec{\omega}$. La norme de ce vecteur correspond à la vitesse angulaire. Notons qu'une convention est nécessaire pour définir le vecteur vitesse angulaire, ce qui indique que ce vecteur est un pseudo-vecteur.

4.1 Le moment cinétique d'un solide

Nous allons dans ce chapitre traiter le cas des solides. Le vecteur moment cinétique d'un solide par rapport à un point fixe O a pour expression dans le cas général $\vec{L}_O = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i\vec{v}_i$ où i est un indice qui représente chaque point du solide (figure 4.1). Tout le problème est d'avoir une expression du moment cinétique qui soit reliée à une grandeur cinématique du solide.

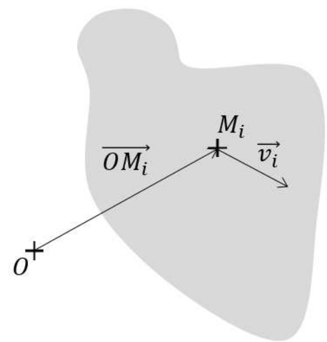

FIGURE 4.1: Calcul du moment cinétique d'un solide par rapport à un point fixe O.

De manière générale, le vecteur moment cinétique d'un solide n'est pas aligné avec le vecteur vitesse angulaire comme le montre la figure 4.2. Cette figure montre un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ. Le vecteur vitesse angulaire du solide est donc porté par l'axe Δ. Étant donnée que le solide n'est pas symétrique, le moment cinétique n'est pas aligné suivant l'axe Δ dans ce cas de figure. Les deux quantités sont donc reliées par un objet mathématique qui permet de changer l'orientation du vecteur. C'est un tenseur appelé tenseur d'inertie.

Afin d'éviter d'avoir à utiliser le tenseur d'inertie, nous allons dans la suite nous intéresser uniquement à des objets en rotation autour d'un axe fixe.

4.2 Projection du moment cinétique et moment d'inertie

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe, la composante du moment cinétique selon l'axe de rotation est proportionnelle à la vitesse angulaire du solide.

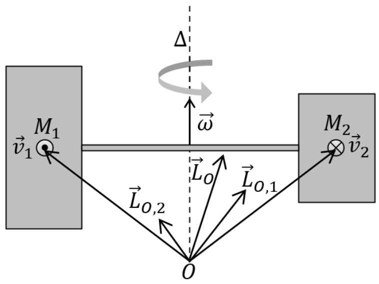

FIGURE 4.2: Calcul du moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe par rapport à un point fixe O. Le moment cinétique d'un solide n'est pas aligné avec le vecteur vitesse angulaire dans le cas général.

- Plus précisément, il est possible de montrer que la **projection du moment cinétique** sur l'axe de rotation $\triangle$ du solide est donnée par :

$$\boxed{L_\triangle = I_\triangle \omega} \tag{4.1}$$

où $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ est la vitesse angulaire de rotation.

- $I_\triangle$ est **le moment d'inertie** du solide par rapport à l'axe fixe $\triangle$ donnée par :

$$\boxed{I_\triangle = \int r^2 \mathrm{dm}} \tag{4.2}$$

où r est la distance qui sépare l'élément de masse dm de l'axe $\triangle$.

Pour effectuer l'intégration, il faut exprimer dm en fonction de la densité de masse. Par exemple, pour un solide à deux dimensions, nous écrivons $dm = \sigma dS$ où dS est l'élément de surface du solide. Dans ce cas, le moment d'inertie s'écrit $I_\triangle = \iint \sigma r^2 \mathrm{d}S$.

Point notation ! Attention à ne pas confondre la fréquence angulaire et la vitesse angulaire. La vitesse angulaire est donnée par $\omega = \frac{d\theta}{dt}$.

Exemple

Le moment d'inertie d'une barre par rapport à un axe Oz perpendiculaire à la barre et passant par une de ces extrémités (figure 4.3). Nous introduisons alors la densité linéique de masse λ et nous écrivons $dm = \lambda dx$. Le moment d'inertie a alors pour expression $I_\Delta = \int_0^L \lambda x^2 dx = \lambda \frac{L^3}{3} = m\frac{L^2}{3}$.

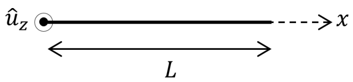

FIGURE 4.3 – Calcul du moment d'inertie d'une barre par rapport à un axe $0z$.

Le saviez-vous ? Le moment d'inertie intervient également dans la déformation des solides. Il est plus facile de déformer un solide par flexion si celui-ci a un moment d'inertie faible par rapport à l'axe subissant la déformation. Ainsi, il est plus facile de tordre un réglet en métal qu'une barre du même métal.

Exemple

Calculons l'expression du moment d'inertie d'une barre de longueur L par rapport à un axe perpendiculaire à la barre et passant par le centre de la barre. Nous introduisons la densité linéique de masse λ et nous écrivons $dm = \lambda dx$. Le moment d'inertie a alors pour expression $I_\Delta = \int_{-L/2}^{L/2} \lambda x^2 dx = m\frac{L^2}{12}$.

La relation 4.1 se démontre à partir de l'expression du moment cinétique d'un solide projeté sur l'axe fixe de rotation. Nous avons $L_\Delta = \vec{L}_0.\hat{u} = \sum_i (\overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \vec{v}_i).\hat{u}$ où $\hat{u}$ est le vecteur unitaire orienté suivant l'axe de rotation.

Puisque nous pouvons choisir arbitrairement le point O, nous choisissons un point O sur l'axe de rotation. Soit H_i le projeté orthogonal du point M_i sur l'axe de rotation. Nous avons $\overrightarrow{OM_i} = \overrightarrow{OH_i} + \overrightarrow{H_iM_i}$ d'où $L_\Delta = \sum_i \left((\overrightarrow{OH_i} + \overrightarrow{H_iM_i}) \wedge m_i \vec{v}_i \right).\hat{u}$. Nous utilisons l'invariance du produit mixte par permutation circulaire pour écrire :

$$\begin{aligned} L_\Delta &= \sum_i \left(\hat{u} \wedge (\overrightarrow{OH_i} + \overrightarrow{H_iM_i})\right).m_i\vec{v}_i \\ &= \sum_i (\hat{u} \wedge \overrightarrow{H_iM_i}).m_i\vec{v}_i \end{aligned}$$

Le vecteur vitesse d'un point du solide a pour expression $\vec{v}_i = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{H_iM_i}$ d'où $L_\Delta = \sum_i m_i(\hat{u} \wedge \overrightarrow{H_iM_i}).(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{H_iM_i})$. La formule du double produit vectoriel $(\vec{a} \wedge \vec{b}).(\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{d}) - (\vec{a}.\vec{d})(\vec{b}.\vec{c})$ conduit à $L_\Delta = \sum_i m_i(H_iM_i)^2\omega$ soit $L_\triangle = I_\triangle\omega$ avec $I_\triangle = \sum_i m_i(H_iM_i)^2$ le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ. Pour un distribution continue de masse, le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ a pour expression $I_\triangle = \int r^2 \mathrm{d}m$

4.3 Théorème de Huygens

Soit un solide de masse m en rotation par rapport à un axe fixe $\triangle$. Le **théorème de Huygens**, qui s'appelle également le théorème des axes parallèles, permet de calculer le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe $\triangle$ parallèle à un axe passant par le centre de masse du solide et situé à une distance h de ce dernier.

- Ce théorème s'écrit :

$$\boxed{I_\triangle = mh^2 + I_{CM}} \tag{4.3}$$

- G est le centre de masse du solide de masse m donnée par :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \sum_i \frac{m_i\overrightarrow{OM_i}}{m}} \tag{4.4}$$

Dans le cas où ce solide est placé dans un champ de pesanteur uniforme à l'échelle du solide, nous pouvons montrer que le poids s'applique au centre de masse du solide qui s'appelle dans ce cas le **centre de gravité** du solide.

En effet, le point d'application M_i du poids $\vec{p}_i$ qui s'exerce sur une masse m_i est donné par $\vec{p}_i = m_i\frac{d^2\overrightarrow{OM_i}(t)}{dt^2}$. Le point d'application du poids total $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$ est donc donné par $\vec{P} = \sum_i m_i\frac{d^2\overrightarrow{OM_i}(t)}{dt^2} = \sum_i \frac{d^2 m_i\overrightarrow{OM_i}(t)}{dt^2} = m\frac{d^2\overrightarrow{OG}(t)}{dt^2}$.

Exemple

Calculons l'expression du moment d'inertie d'une barre de longueur L par rapport à un axe perpendiculaire à la barre et passant par son extrémité à l'aide du théorème de Huygens. Nous avons $I_\triangle = m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + I_{CM} = m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m\frac{L^2}{12} = m\frac{L^2}{3}$.

4.4 Le théorème scalaire du moment cinétique

Pour un système fermé, le théorème du moment cinétique a pour expression $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{ext,O}$. Dans le cas où le solide est en rotation autour d'un fixe, nous pouvons obtenir une expression qui porte sur la projection du moment cinétique $L_\triangle$ le long de l'axe fixe. Soit $\hat{u}$ le vecteur unitaire selon l'axe Δ, puisque Δ est un axe fixe, nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{dL_\triangle}{dt} &= \frac{d\vec{L}_0.\hat{u}}{dt}\\ &= \frac{d\vec{L}_O}{dt}.\hat{u}\\ &= \vec{\mathcal{M}}_{ext,O}.\hat{u}\\ &= \mathcal{M}_{ext,\triangle}\end{aligned}$$

où $\mathcal{M}_{ext,\triangle}$ est la projection du moment des forces sur l'axe Δ.

- Le théorème scalaire du moment cinétique s'énonce ainsi. Dans un référentiel Galiléen, la projection du moment cinétique $L_\triangle$ d'un système fermé sur un axe fixe $\triangle$ avec $\hat{u}$ un vecteur unitaire le long de Δ vérifie :

$$\boxed{\frac{dL_\triangle}{dt} = \mathcal{M}_{ext,\triangle}} \tag{4.5}$$

Attention, pour ne pas avoir de problème de signes, il faut tenir compte de l'orientation $\vec{\mathcal{M}}_{ext,\triangle}$ par rapport à l'orientation $\vec{L}_0$. L'orientation de ces vecteurs est donnée par la règle de la main droite. On peut également retenir que le moment d'une force qui s'oppose au mouvement est orienté dans le sens opposé au vecteur moment cinétique.

Dans le cas où le moment d'inertie du solide ne varie pas au cours du temps, le théorème scalaire du moment cinétique a donc pour expression :

$$\boxed{I_\triangle\frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_{ext,\triangle}} \tag{4.6}$$

Nous constatons donc que plus le moment d'inertie d'un solide est élevé, plus la mise en rotation du solide est difficile.

Exemple

Considérons un système dont le moment des forces extérieures est nulle, dans ce cas nous avons $I_\triangle\omega = cst$. Ainsi, si le moment d'inertie d'un tel système diminue alors la vitesse de rotation angulaire augmente. C'est ce que nous pouvons observer pour une patineuse artistique par exemple.

Exemple

Un Pulsar est le reste du cœur d'une étoile massive qui s'est effondrée gravitationnellement sur elle-même. Les pulsars émettent un signal électromagnétique périodique. Nous pouvons déduire de cette période T la fréquence angulaire de rotation $\omega = \frac{2\pi}{T}$ d'un pulsar et en déduire l'ordre de grandeur de sa taille par conservation du moment cinétique. En effet, dans le cas où le moment des forces extérieures qui s'applique au système est nul, le théorème scalaire du moment cinétique s'écrit $I_\triangle\frac{d\omega}{dt} = 0$ soit $I_\triangle\omega = cst$.
Nous considérons une étoile de masse M et de rayon R en rotation à vitesse angulaire constante. La quantité $\frac{MR^2}{T}$ est donc constante avec T la période de rotation de l'étoile. Si nous supposons qu'une étoile comme le soleil de rayon 700 000 km et de période de rotation de 300 jours donne un pulsar de période 1 s. Alors, la conservation du moment cinétique implique que l'ordre de grandeur du rayon d'un pulsar est de 10 km.

Le saviez-vous ? Les mouvements de rotation autour d'un axe fixe sont des mouvements très courant dans la nature (rotation des planètes sur elle-même par exemple) et dans les objets technologiques (les moteurs, les roues ...).

Le saviez-vous ? Ce théorème montre qu'il faut exercer un moment des forces d'autant plus élevé que le moment d'inertie est élevé pour mettre en rotation un solide. La matière située loin de l'axe de rotation parcourt une distance plus grande que la matière près de l'axe lors de la rotation du solide. La vitesse de la matière située loin de l'axe est donc plus grande et il faut donc fournir une plus grande énergie à la matière loin de l'axe de rotation pour lui faire parcourir le même angle.