CHAPITRE 3

Le théorème du moment cinétique pour un point matériel

Objectifs :

- utiliser le théorème du moment cinétique pour un point matériel.
- étudier un mouvement à force centrale.
- étudier un mouvement de rotation.

3.1 Le théorème du moment cinétique appliqué à un point matériel

Nous savons qu'un corps est en équilibre de rotation par rapport à un point O quelconque si la somme des moments des forces qui s'appliquent sur le corps par rapport au point O est nulle. Nous pouvons donc en déduire qu'il existe un lien entre le moment des forces qui s'appliquent sur un point matériel et une quantité qui doit être reliée au taux de rotation du point matériel. Nous allons établir ce lien pour un point matériel ou un corps dont la dynamique peut être décrite en le considérant comme un point matériel.

Le **moment cinétique d'un point matériel** situé au point M par rapport à un point O a pour expression $\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$ où m est la masse du point matériel et $\vec{v}$ sa vitesse.

- Le théorème du moment cinétique appliqué à un point matériel par rapport à un point O a pour expression :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F}_{ext})} \tag{3.1}$$

- Ce théorème est valide uniquement si le point O est un **un point fixe**.

Pour prouver ce théorème, nous allons utiliser le principe fondamental

✍ **Vous pouvez maintenant faire l'exercice 1.**

Point notation ! Notons que la notation du moment cinétique est compatible avec ce que représente le moment en physique. Le moment de quelque chose par rapport à un point O a pour expression $\vec{r} \wedge \overrightarrow{qqc}$ où $\vec{r}$ est la distance séparant le point O de quelque chose. Ainsi, le moment cinétique est le moment de la quantité $m\vec{v}$.

de la dynamique. Nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}\right) &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext}\end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F}_{ext})$$

Ainsi, pour un point matériel, le lien entre le théorème du moment cinétique et le principe fondamental de la dynamique est très simple. Il n'en demeure pas moins que les équations de la dynamique du mouvement d'un point matériel peuvent être plus simple à obtenir à partir du théorème du moment cinétique dans certaines situations.

✍ **Vous pouvez maintenant faire l'exercice 2.**

☞ Le théorème du moment cinétique est particulièrement efficace pour étudier les mouvements d'oscillations et de rotations.

3.2 Conservation du moment cinétique

Nous avons conservation du moment cinétique au cours du temps dans deux situations :

- lorsque le système est isolé, il n'est alors soumis à aucune forces extérieures et la somme du moment des forces extérieures est nul. Le moment cinétique se conserve dans ce cas.
- lorsque les forces qui s'exercent sur le système sont non nulles mais la somme de leurs moments est nulle. Dans ce cas, nous avons également conservation du moment cinétique. C'est le cas pour des forces centrales.

3.3 Les mouvements à force centrale

Le théorème du moment cinétique est particulièrement efficace pour étudier la dynamique d'un corps soumis à une **force centrale**. Nous nommons force centrale une force s'appliquant au point M qui **pointe toujours vers un même point fixe O lors du mouvement**. De plus, la norme de cette force dépend que de la **distance r** entre le point O et le point M.

Nous considérons un point matériel M soumis à une force centrale $\vec{F}$ (figure 3.1).Nous nommons $\hat{u}_r$ le vecteur unitaire suivant l'axe $\overrightarrow{OM}$, le théorème du moment cinétique appliqué au point M par rapport au point O a pour expression :

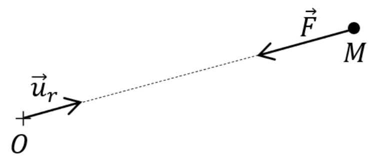

FIGURE 3.1: Point matériel soumis à une force centrale.

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_0}{dt} &= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} \\ &= r\hat{u}_r \wedge F\hat{u}_r \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

- Nous obtenons donc le résultat suivant, **le moment cinétique** d'un point matériel soumis à une force centrale est égale à un **vecteur constant** :

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{C}} \tag{3.2}$$

  où $\vec{C}$ est une constante du mouvement.
- Le moment cinétique d'un point matériel soumis à une force centrale est un vecteur de direction constante, le point matériel se déplace donc dans un plan.

- Dans un système de coordonnées polaires, le moment cinétique a pour expression :

$$\begin{aligned}\vec{L}_0 &= m\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2\dot{\theta} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Nous en déduisons que :

$$\boxed{r^2\dot{\theta} = Cst} \tag{3.3}$$

ce qui constitue la loi des aires puisque $r^2 d\theta$ représente l'aire balayée par le point matériel pendant dt.

✍ **Vous pouvez maintenant faire l'exercice 3.**

Exemple

Les résultats précédents s'appliquent au mouvement d'une planète dans le système solaire puisque la force d'interaction gravitationnelle exercée par le Soleil sur les planètes est une force centrale. Ainsi, les planètes du système solaire orbite dans un plan appelé plan de l'écliptique. La loi des aires montre que la vitesse orbitale d'une planète augmente lorsqu'elle se rapproche du Soleil. Aux points le plus proche et le plus éloignée de son étoile, le périhélie et l'aphélie, la vitesse radiale de la planète est nulle par définition et nous avons donc $v = r\dot{\theta}$ d'où $r_A v_A = r_P v_P$.

✍ **Vous pouvez maintenant faire les exercices 4,5 et 6.**