CHAPITRE 2

Le moment des forces

Objectifs :

- Savoir calculer le moment d'une force.
- Savoir utiliser la condition d'équilibre de rotation.
- Savoir utiliser la loi des leviers.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au centre de masse d'un objet montre qu'un objet est en équilibre de translation si la somme des forces qui s'appliquent sur lui est nulle. Autrement dit, **l'équilibre de translation** s'écrit :

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}} \tag{2.1}$$

Cependant, pour un objet qui n'est pas ponctuel, l'équilibre de translation ne suffit pas à assurer l'immobilité du corps. La figure 2.1 montre une barre qui, bien qu'en équilibre de translation puisque $\vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{0}$, tourne dans le sens des aiguilles d'une montre sous l'action des forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$.

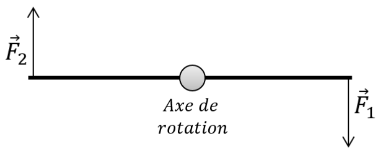

FIGURE 2.1: La barre est en équilibre de translation mais n'est pas immobile. L'équilibre de rotation n'est pas vérifiée.

2.1 Moment d'une force

- L'efficacité d'une force à induire ou à modifier le **mouvement de rotation** d'un corps est donnée par le **moment de la force**.

La figure 2.1 montre que la barre va tourner d'autant plus facilement que les forces qui s'exercent sur la barre sont loin de l'axe. Ainsi le moment d'une force doit dépendre de la distance qui sépare le point d'application de la force à l'axe de rotation.

Outre la distance à l'axe de rotation, le moment de la force dépend également de l'orientation de la force par rapport à la droite reliant le point d'application de la force à l'axe de rotation. Pour étudier cet effet, nous allons considérer l'ouverture d'une porte vue de dessus (figure 2.2). Le cas (a) montre que, pour $\theta = 0$, le vecteur force est incapable de faire tourner la porte, le moment de la force doit donc être nul dans ce cas. Le moment de la force doit par contre être maximal dans le cas (b) lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$ puisque c'est l'orientation du vecteur force qui est la plus efficace pour faire tourner

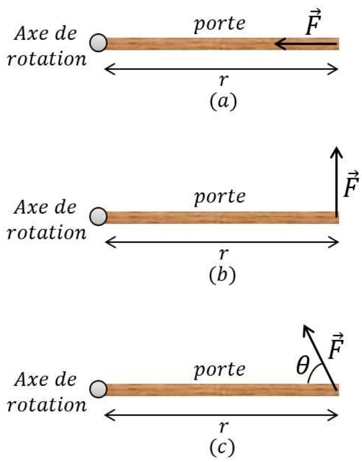

FIGURE 2.2: Vecteur force appliqué sur une porte.

la porte. Autrement dit, le moment de la force dépend de la composante de la force perpendiculaire à la droite qui passe par l'axe de rotation et par le point d'application de la force $\vec{F}$. Ainsi, nous posons :

$$\mathcal{M}_0 = rF\sin\theta$$

où $\mathcal{M}_0$ est le moment de $\vec{F}$ par rapport au point O et θ est l'angle schématisé dans la figure 2.2-(c).

Nous constatons également que la direction de la force change le sens de rotation de l'objet. Dans l'exemple (c) de la figure 2.2, la porte tourne dans l'autre sens si $\theta > \pi$. Nous pouvons donc construire un **vecteur moment d'une force** en utilisant une convention. Nous utilisons la règle de la main droite : si la force entraine une rotation dans le sens anti-horaire donc suivant les indexes de la main droite alors le moment de la force est orienté selon le pouce de la main droite. Cette convention est équivalente à celle du produit vectoriel en utilisant un repère direct qui respecte la règle des trois doigts de la main droite. Nous obtenons donc la définition suivante :

- Le **moment d'une force $\vec{F}$ de point d'application M calculé par rapport au point O** a pour expression :

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}} \tag{2.2}$$

Point notation ! Dans le cas où le système possède un axe de rotation, il est naturel de calculer le moment d'une force par rapport à cet axe mais rien n'interdit de calculer le moment par rapport à un point quelconque. Nous allons donc toujours préciser le point par rapport auquel nous calculons le moment.

Point notation ! Le moment de quelque chose par rapport à un point O a pour expression $\vec{r} \wedge \overrightarrow{qqc}$ où $\vec{r}$ est la distance séparant le point O de quelque chose. Dans l'expression $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P})$, la grandeur $\vec{\mathcal{M}}(\vec{P})$ est le moment du poids, l'indice O signifie que nous calculons le moment du poids par rapport au point O. C'est-à-dire que le vecteur $\vec{r}$ vaut $\overrightarrow{OM}$ où M est le point d'application du poids.

2.2 Le moment d'une force de contact ponctuel

Nous pouvons utiliser la liberté offerte sur le choix du point O pour **"éliminer" le moment d'une force que nous ne connaissons pas**. C'est le cas en général des forces de contact. Dans le cas où le contact entre deux objets est ponctuel, nous pouvons placer le point O au niveau du point de contact, le moment de la force de contact calculé par rapport à O est alors nul.

Exemple

Considérons une poutre de longueur L encastrée dans un mur et soutenue par un câble de tension $\vec{T}$. Nous notons $\vec{R}$ l'expression de la réaction exercée par le mur sur la poutre. Nous avons donc $\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{R}) = \vec{0}$, $\vec{\mathcal{M}}_{x=L/2}(\vec{P}) = \vec{0}$ et $\vec{\mathcal{M}}_{x=L}(\vec{T}) = \vec{0}$.

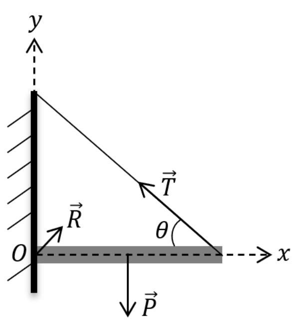

Figure 2.3 – Poutre de longueur L encastrée dans un mur et soutenue par un câble.

✍ **Vous pouvez maintenant faire l'exercice 1.**

2.3 Équilibre de rotation

- **Un objet est en équilibre de rotation par rapport à un axe passant par un point O si la somme des moments des forces extérieurs par rapport au point O est nulle**. Autrement dit, l'équilibre de rotation par rapport à un axe passant par O s'écrit :

$$\boxed{\sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext}) = \vec{0}} \tag{2.3}$$

Notons qu'un corps peut-être en équilibre de rotation par rapport à un axe sans être en équilibre de rotation de manière générale. La figure 2.4 montre un corps soumis à un ensemble de forces qui ont toutes la même intensité F. Le corps est en équilibre par rapport au point O mais n'est pas en équilibre de rotation par rapport au point A. En effet, le moment des forces par rapport au point O a pour expression :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \begin{pmatrix} -d/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le moment des forces par rapport au point A a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_A &= \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d/2 \\ d \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -F_4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -dF_3 - \frac{d}{2}F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3d}{2}F \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le signe négatif montre que le corps va tourner dans le sens des aiguilles d'une montre par rapport au point A.

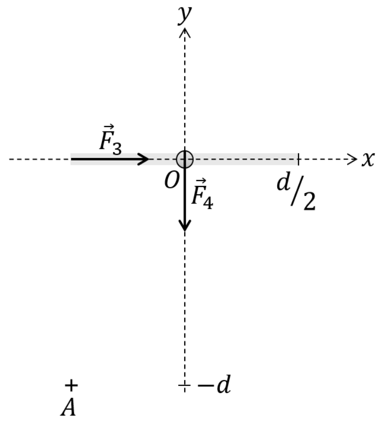

FIGURE 2.4: Un corps en équilibre de rotation par rapport au point O mais pas par rapport au point A. Toutes les forces sont de même intensité.

Exemple

Nous allons montrer que l'équilibre de rotation permet de déterminer l'angle maximal que peut avoir une échelle appuyée contre un mur avec la verticale sans glisser. Nous pouvons négliger la force de frottement statique qu'exerce le mur sur l'échelle. Les forces qui s'exercent sur l'échelle sont représentées sur la figure 2.5.

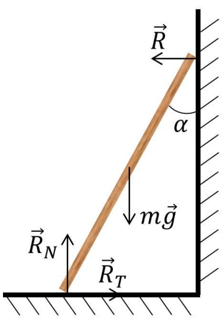

FIGURE 2.5 – Forces exercées sur une échelle appuyée sur un mur.

il est judicieux de choisir le point O de façon à simplifier le plus possible les calculs. Ici, nous négligeons la force de frottement de l'échelle sur le mur, nous avons par contre la réaction normale du sol et la force de frottement statique qu'exerce le sol sur l'échelle à prendre en compte au point de contact entre l'échelle et le sol. Nous allons donc appliquer l'équilibre de rotation par rapport à ce point.

✍ **Vous pouvez maintenant faire l'exercice 2.**

En prenant un repère cartésien d'axe Ox aligné avec l'échelle, nous obtenons donc : $\begin{pmatrix} \frac{L}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -mg\cos\alpha \\ -mg\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -R\sin\alpha \\ R\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ où R est la réaction normale du mur. Cette équation se réécrit $\frac{L}{2}mg\sin\alpha = LR\cos\alpha$.
Le principe d'inertie appliqué à l'échelle implique que $R = R_T$ où R_T est la force de frottement statique qu'exerce le sol sur l'échelle. A la limite du glissement, nous savons que $R_T = \mu_s mg$ où μ_s est le coefficient de frottement statique. Nous obtenons donc $\alpha = \arctan(2\mu_s)$. L'angle limite ne dépend donc pas de la masse de l'échelle.

2.4 Formule de Varignon pour les moments

Nous avons vu dans la section précédente que nous pouvons calculer le moment d'un ensemble de forces par rapport à un point quelconque. Il existe donc un vecteur moment en chaque point de l'espace ce qui nous permet de définir un **champ de moments**.

Nous avons cependant une relation entre l'expression du moment entre deux points quelconques A et B de l'espace. C'est **la relation de Varignon pour les moments qui nous donnent le lien entre deux vecteurs quelconques du champ de moments**.

Par définition, le moment d'un ensemble de forces par rapport à un point A a pour expression $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \overrightarrow{F}_i$ d'où :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{M}}_A &= \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \overrightarrow{F}_i \\ &= \sum_i (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM_i}) \wedge \overrightarrow{F}_i \\ &= \overrightarrow{\mathcal{M}}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \sum_i \overrightarrow{F}_i \end{aligned}$$

En notant $\overrightarrow{R} = \sum_i \overrightarrow{F}_i$ la résultante des forces nous obtenons :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_A = \overrightarrow{\mathcal{M}}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R}} \tag{2.4}$$

2.5 Couple de forces

Nous relation de Varignon montre que le moment est le même en tout point si la résultante des forces qui s'appliquent sur le corps est nulle. Dans ce cas, c'est un **couple de forces qui s'exercent sur le corps**.

☞ Un couple de forces est un ensemble de forces dont la somme est nulle mais dont la somme des moments des forces est non nulle. La somme des moments est également la même en tout point d'après la formule de Varignon.

La figure 2.6 montre un corps soumis à un couple de forces qui ont toutes la même intensité F.

Le moment des forces par rapport au point O a pour expression :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{M}}_0 &= \begin{pmatrix} -d/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ F_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -F_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -dF \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le moment des forces par rapport au point A a pour expression :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \begin{pmatrix}0\\d\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\F_1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}d\\d\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-F_2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-dF\end{pmatrix}$$

Nous avons donc bien $\vec{\mathcal{M}}_0 = \vec{\mathcal{M}}_A$ pour un couple de forces.

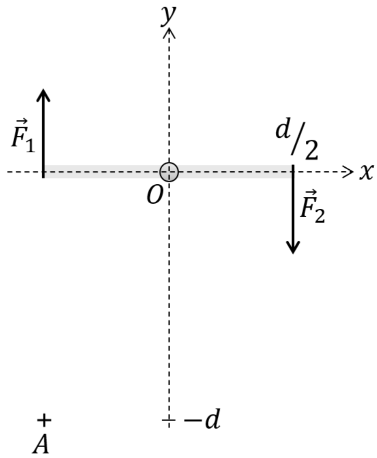

FIGURE 2.6: Corps soumis à un couple de forces.

2.6 La loi du levier

La figure 2.7 montre une charge R sur un levier. On exerce une force $\vec{F}_M$ sur le levier pour que la charge soit à la limite de bouger.

On exerce la force nécessaire pour que la charge soit à la limite de se soulever. La somme des moments qui s'exercent sur le levier est donc nulle.

Le levier repose sur un axe. L'axe exerce donc une force sur le levier, c'est la réaction du support. Puisque nous ne connaissons pas l'expression de cette force, nous allons calculer les moments par rapport au point O de telle sorte que le moment de la réaction du support soit nul.

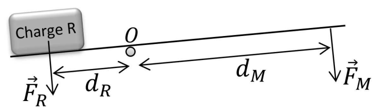

FIGURE 2.7: Notations utilisées pour étudier le levier.

L'équilibre de rotation a pour expression $\sum \mathcal{M}_O(\vec{F}_{ext}) = \vec{0}$. Nous utilisons un repère cartésien centré en O dont l'axe Ox est aligné avec le levier pour obtenir $\begin{pmatrix}d_M\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-F_M\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-d_R\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-F_R\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ soit $-d_M F_M + d_R F_R = 0$.

- La **loi des leviers** a donc pour expression :

$$\boxed{d_M F_M = d_R F_R} \tag{2.5}$$

- Nous avons ainsi $F_M < F_R$ si $d_M > d_R$.

Le **gain mécanique** d'un levier est défini comme le rapport entre l'intensité de la force de résistance et l'intensité de la force motrice à fournir pour faire basculer le levier. Ce gain mécanique vaut donc :

$$G = \frac{F_R}{F_M} = \frac{d_M}{d_R}$$

En divisant en bas et en haut par $\frac{d\theta}{dt}$ où $d\theta$ est le déplacement angulaire du levier lorsque ce dernier bouge. Le gain mécanique peut donc également s'écrire :

$$G = \frac{v_M}{v_R}$$

où v_M est la vitesse du point d'application de la force F_M et v_R est la vitesse du point d'application de la force F_R.

Nous pouvons donc distinguer deux modes de fonctionnement d'un levier :

1. $G > 1$. Dans ce cas, le levier permet de gagner de la force puisque F_R est plus grand que F_M. Les pieds de biche, freins à main de voiture ... sont des exemples de ce type de leviers nommé leviers de type I. Notons que l'association de deux leviers de type I permet de fabriquer des ciseaux, des pinces.
2. $G < 1$. Dans ce cas, le levier permet de gagner de la vitesse puisque v_R est plus grand que v_M. Autrement dit, l'extrémité du levier du côté résistant va plus vite que l'extrémité du levier du côté moteur.

✍ Vous pouvez maintenant faire les exercices 3, 4 et 5.

Exemple

Les mâchoires des animaux fonctionnent sur le principe d'un levier comme le montre la figure 2.8. Le levier permet de gagner de la force pour mastiquer. Le gain de force est maximal près de l'axe de rotation, c'est à dire au niveau des molaires.

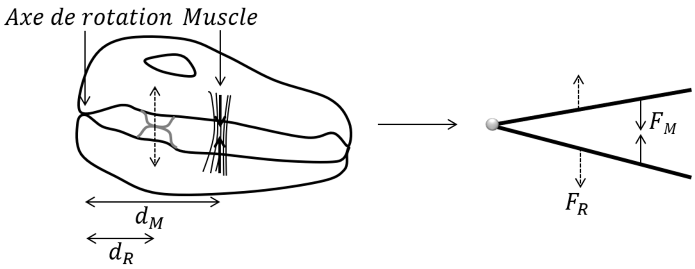

FIGURE 2.8 – Mâchoire d'un animal.