CHAPITRE 1

# Vecteurs, pseudo-vecteurs et produit vectoriel

**Objectifs :**

- savoir distinguer un vecteur d'un pseudo-vecteur.
- savoir calculer un produit vectoriel.

## 1.1 Les vecteurs en physique classique

Nous avons déjà utilisé à de nombreuses reprises les vecteurs que nous avons définis de la façon suivante :

- Les vecteurs sont représentés par des **flèches** sur un schéma (figure 1.1), nous pouvons les multiplier par un réel et les additionner.
- Le choix d'un repère nous permet de repérer la position de l'extrémité de la pointe de la flèche avec trois nombres dans un espace à trois dimensions. Il s'agit des **composantes** du vecteur $\overrightarrow{V}$ que nous écrivons en colonne $\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$.
- La longueur de la flèche est la **norme du vecteur** qui nous obtenons grâce au théorème de Pythagore $||\overrightarrow{V}|| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}$. Un vecteur unitaire est un vecteur dont la norme est égale à 1.
- Nous pouvons exprimer un vecteur en fonction des vecteurs unitaires du repère choisi $\overrightarrow{V} = V_1\widehat{u}_1 + V_2\widehat{u}_2 + V_3\widehat{u}_3$.

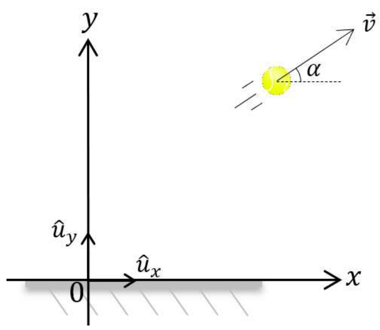


FIGURE 1.1: Tracé du vecteur vitesse d'une balle de tennis lancé depuis l'origine du repère cartésien.

Nous allons affiner la définition précédente car un triplet de nombres quelconques ne constitue pas un vecteur de manière générale. Pour constituer un vecteur, le triplet de nombres $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$ doit se **transformer en un autre vecteur sous l'effet d'une rotation du système d'axe** du repère. Mathématiquement parlant, nous devons avoir $\overrightarrow{V}' = \mathbf{R}\overrightarrow{V}$ où $\mathbf{R}$ est une matrice de rotation.

☞ Autrement dit, les composantes d'un vecteur changent lorsque nous "tournons la tête". Ainsi, la température, la densité et la pression du gaz d'une pièce ne constitue pas un vecteur car les valeurs mesurées ne dépendent pas de l'orientation de notre regard.

## 1.2 Pseudo-vecteurs

Parmi tous les triplets de nombres qui se comportent "correctement" vis-à-vis de la rotation du système d'axe, tous n'ont pas le même comportement vis-à-vis des symétries miroirs. Considérons par exemple le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ de la figure 1.2 dont le plan $xz$ est le plan de réflexion. Le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ est alors donnée par $\overrightarrow{OM'} = \mathbf{S}\overrightarrow{OM}$ où $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

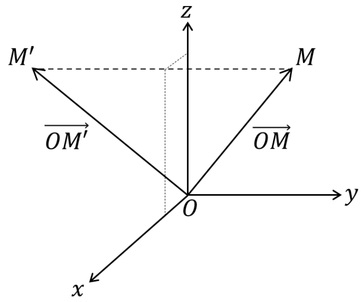


FIGURE 1.2: Comportement d'un vecteur position vis-à-vis d'une symétrie miroir.

Considérons maintenant le comportement d'un vecteur angulaire vis-à-vis d'une symétrie miroir, par exemple celui de la figure 1.3. Nous constatons que le vecteur $\vec{\omega'}$ est dans le sens inverse de $\mathbf{S}\vec{\omega}$. Les vecteurs qui ont se comportement vis-à-vis des symétries miroirs sont des pseudo-vecteurs. Ainsi, **pour un pseudo-vecteur**, nous avons :

$$\vec{P}^{miroir} = -\mathbf{S}\vec{P}$$

**Pour un vrai vecteur**, nous avons :

$$\vec{V}^{miroir} = \mathbf{S}\vec{V}$$

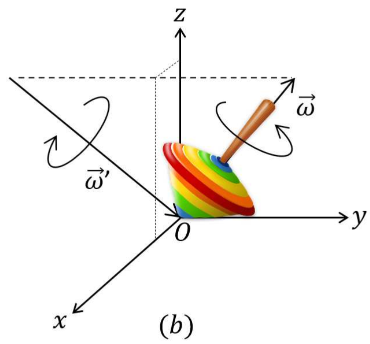


FIGURE 1.3: Comportement d'un vecteur vitesse angulaire vis-à-vis d'une symétrie miroir.

## 1.3 Produit vectoriel

Le produit vectoriel est une opération mathématique qui construit un pseudo-vecteur à partir de deux vrais vecteurs. Par définition :

- Le **produit vectoriel** entre deux vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ a pour expression $\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$.
- Nous déduisons de la définition que $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$.
- L'orientation du vecteur $\vec{a} \wedge \vec{b}$ respecte la règle des trois doigts de la main droite.

**Exemple**

Soit les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ dans un système de coordonnées cartésien. Le pseudo-vecteurs $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ a pour expression $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ab \end{pmatrix}$ et est donc bien orienté selon l'axe $Oz$, comme l'indique la règle des trois doigts la main droite.

## 1.4 Égalités autorisées

Dans les théories physiques que nous allons développer pour comprendre le monde qui nous entoure, nous aurons à écrire des égalités entre vecteurs. Plus précisément, nous devrons prendre garde à écrire **des égalités entre vrais vecteurs ou des égalités entre pseudo-vecteur**. Autrement dit, un vrai vecteur ne peut pas être égale à un pseudo-vecteur.

☞ D'un point de vue pratique, les pseudo-vecteurs sont des vecteurs qui nécessitent une convention pour être définis. Les vecteurs angulaires sont définis en utilisant la règle de la main droite. Le sens de rotation suit les index de la main et le pouce indique la direction du vecteur angulaire. Le vecteur construit à partir d'un produit vectoriel est également construit à partir d'une convection, la règle des trois doigts de la main droite.