CHAPITRE 7

N oscillateurs couplés

Objectifs :

- définir la notion de mode normal de N oscillateurs couplés.
- décrire le passage au continu pour obtenir la notion d'onde progressive et stationnaire.

Nous allons étudier dans ce chapitre N oscillateurs couplés. Cette étude va nous mener naturellement à la notion d'onde. En effet, un corps macroscopique peut être vu comme une succession d'oscillateurs couplés les uns aux autres. Un perturbation en un point va donc se propager dans le corps en question par l'intermédiaire des couplages.

Nous avons vu dans le chapitre précédent, la notion de mode normal ou mode propre. Cette notion est toujours valide avec N oscillateurs couplés. Le mouvement général de N oscillateurs couplés est la superposition de N modes normaux.

7.1 Modèle de la corde plombée

7.1.1 Équation du mouvement

Le système que nous allons étudier est constitué de N petits plombs reliés par un fil élastique de tension T (voir figure 7.1). On néglige le poids de chaque petit plomb devant la tension du fil. Ce modèle va nous servir ensuite à décrire le mouvement d'une corde à l'échelle macroscopique.

FIGURE 7.1: N petits plombs reliés par un fil élastique de tension T.

Nous allons maintenant étudier la dynamique de ces petits plombs lorsque le mouvement des petits plombs est purement transversal et qu'ils s'écartent peu de l'horizontal. Autrement dit, nous allons rester dans l'approximation $\frac{y}{l} << 1$. Dans cette approximation, la corde qui relie les petits plombs ne s'allonge quasiment-pas et le déplacement des plombs est purement transversal.

Ainsi, les schémas que nous allons tracer ne seront pas à l'échelle pour nous permettre de mieux visualiser les forces qui s'appliquent sur un petit plomb.

La figure 7.2 montre la position de 3 petits plombs à un instant t donné ainsi que les notations que nous allons utiliser par la suite.

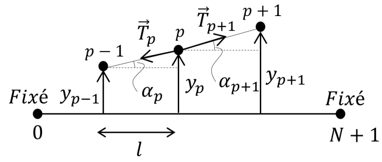

FIGURE 7.2: Notations utilisées pour établir l'équation de la dynamique d'un petit plomb.

Nous avons mentionné que le déplacement du petit plomb est purement transversal, autrement dit, le principe fondamental de la dynamique appliqué au petit plomb p et projeté sur l'axe Ox a pour expression :

$$0 = T_{p+1}\cos(\alpha_{p+1}) - T_p\cos(\alpha_p)$$

Or, aux petits angles, $\cos(\alpha) \simeq 1$ donc $T_{p+1} = T_p$. Autrement dit, la tension dans la corde est uniforme et égale à T.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au petit plomb p projeté sur l'axe Oy a pour expression :

$$m\frac{d^2y_p}{dt^2} = T\sin(\alpha_{p+1}) - T\sin(\alpha_p)$$

Aux petits angles, nous avons $\sin(\alpha_p) \simeq \frac{y_p - y_{p-1}}{l}$ et $\sin(\alpha_{p+1}) \simeq \frac{y_{p+1}-y_p}{l}$. L'équation de la dynamique d'un petit plomb p a donc pour expression :

$$m\frac{d^2y_p}{dt^2} = \frac{T}{l}(y_{p+1} - y_p) - \frac{T}{l}(y_p - y_{p-1})$$

Nous posons $\omega_0^2 = \frac{T}{ml}$ pour obtenir :

$$\boxed{\ddot{y}_p + 2\omega_0^2 y_p - \omega_0^2(y_{p+1} + y_{p-1}) = 0} \qquad (7.1)$$

avec $p = 1, 2, ..., N$. Nous avons donc **N équations différentielles couplées** à résoudre. Nous allons utiliser le même principe que dans le chapitre précédent pour résoudre le système, à savoir étudier les modes normaux.

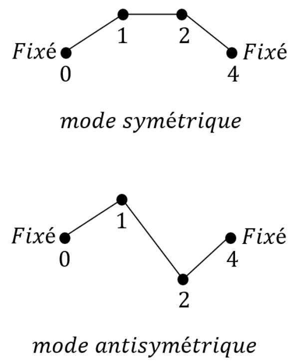

FIGURE 7.3: Les deux modes normaux d'une chaîne de deux plombs mobiles.

7.1.2 Recherche des modes normaux

Rappelons que **toutes les sous-parties du système oscillent de manière harmonique à la même fréquence dans un mode normal**. La 7.3 montre les deux modes normaux d'une chaîne de deux plombs mobiles. Le mode symétrique est le mode basse fréquence et le mode antisymétrique est le mode de haute fréquence.

Étant donné la définition d'un mode normal, nous recherchons une solution de la forme $y_p = A_p\cos(\omega t)$ où A_p est l'amplitude du plomb p. Ainsi, chaque plomb oscille avec la même fréquence que les autres mais l'amplitude de ce mouvement d'oscillation dépend du plomb considéré.

En injectant la forme de y_p dans l'équation du mouvement, nous obtenons :

$$\boxed{(-\omega^2 + 2\omega_0^2)A_p - \omega_0^2(A_{p-1} + A_{p+1}) = 0} \qquad (7.2)$$

avec $p = 1, 2, ..., N$. Les conditions aux limites imposent $A_0 = 0$ et $A_{N+1} = 0$.

☞ L'équation 7.1 peut s'écrire sous forme matricielle. Nous obtenons alors une matrice symétrique à coefficient réelle donc diagonalisable. Les fréquences d'oscillation des N modes propres sont données par les valeurs propres de cette matrice.

Pour aller plus loin et déterminer la forme de A_p, nous remarquons qu'il est possible de faire passer une fonction sinusoïdale parmi tous les plombs. La figure 7.4 montre cette situation pour 8 plombs.

Nous posons donc $A_p = C\sin(klp)$ où lp est la distance qui sépare le plomb p de l'origine et $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ où λ est la longueur d'onde.

Notons bien que les **longueurs d'ondes permises sont quantifiées par les conditions aux limites**. Nous devons en effet respecter $A_{p=0} = 0$

et $A_{p=N+1} = 0$. Cette deuxième condition implique que $\sin((N+1)k) = 0$ d'où $k = \frac{n\pi}{(N+1)l}$ soit :

$$\boxed{k = \frac{n\pi}{L}} \tag{7.3}$$

où L est la longueur totale du fil qui relie tous les petits plombs. L'entier naturel $n = 1, 2, 3, ..., N$ permet de **sélectionner le mode**. Si n dépasse la valeur $N+1$, nous retombons sur un même état physique.

En injectant la forme de A_p dans l'équation précédente, nous obtenons :

$$-(\omega^2 + 2\omega_0^2)\sin(klp) - \omega_0^2(\sin(kl(p-1)) + \sin(kl(p+1)) = 0$$

Cette équation se réécrit :

$$-(\omega^2 + 2\omega_0^2)\sin(klp) - 2\omega_0^2\sin(klp)\cos(kl) = 0$$

d'où :

$$\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{kl}{2}\right)$$

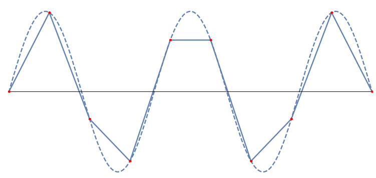

Figure 7.4: Exemple de mode normal d'une chaîne de 8 plombs mobiles.

Cette relation qui relie la fréquence d'un mode propre à longueur d'onde est appelée **relation de dispersion.** En injectant les valeurs permises de k dans la formule précédente, nous obtenons :

$$\boxed{\omega_n = 2\omega_0 \sin\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right)} \tag{7.4}$$

avec $n = 1, 2, 3, ..., N$. Cette relation donne les fréquences permises des modes normaux.

Exemple

Il est intéressant de tester la formule précédente dans la configuration de la figure 7.3. Dans ce cas, $N = 2$ (les plombs sont numérotés $0, 1, 2, 3$. Nous avons donc $\omega_1 = \omega_0$ et $\omega_2 = \sqrt{3}\omega_0$. C'est précisément les fréquences que nous aurions obtenues en étudiant directement le système à 2 plombs en mouvements. Nous retrouvons que le mode symétrique a une fréquence d'oscillation plus faible que le mode asymétrique. Notons également que $\omega_4 = \omega_2$ et que $\omega_5 = \omega_1$, nous retrouvons bien $n > N+1$ décrit les mêmes états physiques.

Le déplacement du plomb p dans un mode normal a donc pour expression :

$$\boxed{y_{pn} = C_n \sin\left(\frac{pn\pi}{N+1}\right)\cos(\omega_n t)} \tag{7.5}$$

avec $\omega_n = 2\omega_0 \sin\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right)$ et C_n est l'amplitude du mode n.

7.2 Passage au continu

Nous allons maintenant augmenter le nombre de plombs pour obtenir la description d'une vraie corde. Attention ce passage au continu ne peut pas se faire n'importe comment, il faut **que la longueur totale de la corde demeure constante.** Cela implique que l diminue si N augmente de telle sorte que la longueur $L = (N+1)l$ reste constante.

De même, **la masse totale de la corde doit rester constante.** Cela implique que m diminue si N augmente de telle sorte que $M = Nm$ reste constante.

Nous pouvons être plus précis sur la condition qu'il faut respecter pour que le passage au continu soit valide. Si le passage au continu est valide, cela signifie que le graphe de la corde dans le système d'axes Oxy ne doit pas présenter de "cassure". Autrement dit la corde, ne peut pas ressembler à un W.

Ce signifie que le taux de variation relatif de la pente de la corde doit-être faible. Autrement dit, nous devons avoir :

$$|\frac{\frac{\partial y}{\partial x}(x+l) - \frac{\partial y}{\partial x}(x)}{\frac{\partial y}{\partial x}(x)} << 1|$$

soit :

$$|l\frac{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\frac{\partial y}{\partial x}} << 1|$$

7.2.1 Que devient l'expression des fréquences permises ?

Nous avons vu que $\omega_n = 2\omega_0 \sin\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{T}{ml}}$. Nous étudions le cas $n << N$ (seuls ces modes sont accessibles par l'expérience pour une corde continue). L'expression des fréquences permises devient donc $\omega_n = \sqrt{\frac{T}{ml}}\frac{n\pi}{(N+1)} = \sqrt{\frac{T}{m/l}}\frac{n\pi}{l(N+1)}$ d'où :

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{T}{\mu}}\frac{n\pi}{L}} \tag{7.6}$$

avec $L = (N+1)l$ la longueur totale de la corde et $\mu = \frac{m}{l}$ la masse linéique. L'expression précédente représente donc les fréquences angulaires permises pour les modes normaux d'une corde continue.

Les fréquences permises ont donc pour expression :

$$\boxed{f_n = \sqrt{\frac{T}{\mu}}\frac{n}{2L}} \tag{7.7}$$

Les longueurs d'ondes permises ont pour expression, sachant que $k = \frac{n\pi}{(N+1)l} = \frac{n\pi}{L}$:

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}} \tag{7.8}$$

7.2.2 Que devient l'expression du déplacement ?

Nous avons vu que $y_{pn} = C_n \sin\left(\frac{pn\pi}{N+1}\right)\cos(\omega_n t)$. Ici, nous ne pouvons pas dire que np est très petit devant N. Il s'agit donc pas de faire un développement limité ici. Nous allons par contre introduire une variable continu $x = pl$ pour repérer la position d'un point sur la corde. Nous obtenons donc l'expression suivante du déplacement d'un point x de la corde :

$$\boxed{y_n(x,t) = C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(\omega_n t)} \tag{7.9}$$

En dehors du mode $n = 1$, il y a des points de la corde qui ne bougent pas. Ces points sont appelés des **nœuds** par opposition au **ventre** qui sont les points d'amplitude maximale.

Un mode normal est une onde stationnaire dans un système continu. Chaque point de la corde se déplace avec une dépendance temporelle de la forme $\cos(\omega t)$ mais l'amplitude du mouvement est fonction de la distance x.

7.2.3 Que devient l'équation du mouvement ?

Nous avons vu que $\ddot{y}_p + 2\omega_0^2 y_p - \omega_0^2(y_{p+1} + y_{p-1}) = 0$. Nous introduisons à nouveau une variable continu $x = pl$ pour repérer la position d'un point sur la corde. Nous allons donc définir une fonction de classe C^2 telle que : $y_p(t) = y(x = lp, t)$. L'équation du mouvement d'un plomb p devient :

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + 2\omega_0^2 y(x,t) - \omega_0^2(y(x+l,t) - y(x-l,t)) = 0$$

Nous faisons tendre N vers l'infini or $N \sim \frac{L}{l}$ donc $l << L$ et $l << x$. Nous pouvons donc faire un développement de Taylor de l'équation précédente. La symétrie par rapport à l nous incite à faire un développement jusqu'à l'ordre 2 pour obtenir :

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + 2\omega_0^2 y(x,t) - \omega_0^2 \left(y(x,t) + l\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) + \frac{l^2}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) + y(x,t) - l\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) + \frac{l^2}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) \right) = 0$$

Nous obtenons donc :

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - \omega_0^2 l^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

soit :

$$\boxed{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = 0} \tag{7.10}$$

Nous obtenons **une équation de d'Alembert**. La quantité $\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ a la dimension d'une vitesse. Nous allons voir que cette vitesse correspond à la célérité de l'onde.

7.3 Des ondes stationnaires aux ondes progressives

Nous avons vu que les ondes stationnaires de la corde ont pour expression $y_n(x,t) = C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(\omega_n t)$. Nous allons utiliser $\sin(\theta+\varphi) + \sin(\theta-\varphi) = 2\sin\theta\cos\varphi$ pour obtenir :

$$y_n(x,t) = \frac{C_n}{2}\sin\left(\frac{n\pi x}{L} - \omega_n t\right) + \frac{C_n}{2}\sin\left(\frac{n\pi x}{L} + \omega_n t\right)$$

d'où :

$$y_n(x,t) = \frac{C_n}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{L}(x - \sqrt{\frac{T}{\mu}}t)\right) + \frac{C_n}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{L}(x + \sqrt{\frac{T}{\mu}}t)\right)$$

Nous posons $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ et $\lambda = \frac{2L}{n}$ pour obtenir :

$$\boxed{y_n(x,t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right) + A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x + vt)\right)} \tag{7.11}$$

λ est la longueur d'onde, c'est-à-dire la distance entre les crêtes si nous fixons le temps.

Nous allons interpréter les deux termes $f(x - vt) + g(x + vt)$.

Le terme $f(x-vt)$ représente la propagation d'une onde vers les x croissants. En effet, si nous voulons définir la propagation d'une quantité nous devons suivre des yeux un point d'amplitude constante, il faut donc que l'argument de la fonction $f(x-vt)$ ne change pas au cours du temps. Ainsi, lorsque le temps passe, il faut que x augmente de telle sorte que $x-vt$ reste constant.

Plus précisément, à $t + dt$, la fonction f renvoie la même valeur si x devient $x+dx$. C'est-à-dire que la propagation d'un point d'amplitude constant se traduit par $f(x-vt) = f(x-vt+dx-vdt)$ ce qui implique $dx-vdt = 0$ soit $\frac{dx}{dt} = v$. La grandeur v représente donc la vitesse de propagation de la phase de l'onde qui **se déplace vers la droite suivant l'axe Ox**.

Nous pouvons faire le même raisonnement pour montrer que **$g(x + vt)$ représente une quantité qui se propage suivant les x négatifs**.

Ainsi, une onde stationnaire est **la somme d'une onde qui se propage vers la droite et d'une onde qui se propage vers la gauche**.