

Oscillateurs couplés

Objectifs :

- définir la notion de mode propre.
- décrire le mouvement quelconque d'un oscillateur couplé.

Nous allons étudier dans ce chapitre deux oscillateurs couplés. Nous allons voir apparaître la très importante **notion de mode normal ou mode propre**. Attention, nous allons étudier un exemple académique pour bien dégager les concepts mais **cette notion est très générale et fondamentale**. N'importe quel objet, microscopique ou macroscopique, possède des modes propres ou normaux de vibrations. Par exemple, une molécule peut passer d'un mode normal de vibration à un autre en absorbant un photon qui correspond à la différence d'énergie entre les deux modes. Ce simple exemple montre toute la portée de cette notion.

6.1 Deux pendules simples non couplés

Nous étudions dans cette section deux pendules non couplés. Nous ferons ainsi mieux ressortir la différence avec deux pendules couplés.

Nous avons établi dans le chapitre 3 l'équation différentielle du mouvement d'un pendule aux petits angles. Dans un système de coordonnées cartésiennes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\omega_0^2 x_1 \\ \ddot{x}_2 &= -\omega_0^2 x_2 \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire la relation précédente sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0^2 & 0 \\ 0 & -\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

Retenons que la matrice précédente est une matrice diagonale. Autrement dit, l'absence de couplage se traduit par **une absence de termes non diagonaux**.

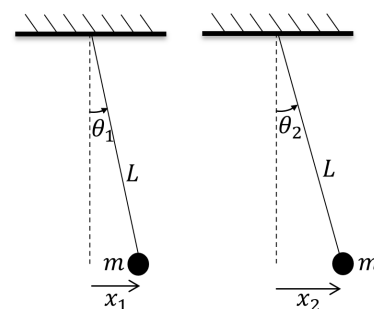


FIGURE 6.1: Deux pendules non couplés.

6.2 Deux pendules simples couplés

6.2.1 Approche expérimentale

Nous considérons maintenant les pendules couplés de la figure 6.2.

Nous recherchons les modes propres du système. Par définition, le système oscille dans un mode propre si toutes ces parties oscillent à la même fréquence.

Un peu de réflexion non convainc que nous avons deux situations particulières où **les pendules oscillent tous les deux à la même fréquence**. Nous appelons ces modes d'oscillation particuliers **des modes normaux ou modes propres**.

Le premier mode normal correspond au cas $x_1 = x_2$. Les deux pendules oscillent alors en phase à la fréquence angulaire ω_0 puisque l'élongation du ressort qui relie les deux masses est nulle. Le ressort n'exerce pas de force dans ce mode d'oscillation et la fréquence angulaire d'oscillation de l'ensemble est égale à ω_0 . D'un point de vue géométrique, nous voyons que les deux pendules peuvent être échangé sans que le système ne soit modifié. Nous nommons donc ce mode **le mode symétrique**.

Le deuxième mode normal correspond au cas $x_1 = -x_2$. Le ressort exerce une force de rappel supplémentaire dans ce mode, nous nous attendons donc à ce que la fréquence angulaire d'oscillation de ce mode soit **plus élevée** que la fréquence angulaire du mode symétrique. C'est précisément ce que nous mesurons expérimentalement. D'un point de vue géométrique, nous voyons que le système qui oscille dans ce mode est antisymétrique car nous devons échanger les deux pendules puis transformer x en $-x$ pour obtenir le même système. Nous nommons donc ce mode **le mode antisymétrique**.

6.2.2 Équations du mouvement

Nous allons maintenant chercher l'expression des fréquences des modes propres. Nous devons dans un premier temps établir l'équation du mouvement de chaque pendule.

Nous utilisons le principe fondamental de la dynamique appliqué à chaque masse dans l'approximation des petits angles. Dans cette approximation, nous avons montré au chapitre 3 que **chaque masse se déplace sur un axe Ox et que la tension dans les fils est égale au poids de chaque masse**.

Nous obtenons donc le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -\frac{g}{L}mx_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 &= -\frac{g}{L}mx_2 + k(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\omega_0^2 x_1 + \omega_e^2 (x_2 - x_1) \\ \ddot{x}_2 &= -\omega_0^2 x_2 + \omega_e^2 (x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Les équations précédentes sont nos équations de base. Par rapport aux chapitres précédents, nous rencontrons un phénomène nouveau, les équations du mouvement sont couplés. Nous obtenons **deux équations différentielles couplées**. Nous allons cependant voir qu'il est possible de **découpler** ces deux équations en utilisant les variables adaptées. Les variables en question décrivent alors les modes propres d'oscillation du système.

Nous allons déterminer les modes propres à partir de ces deux équations en utilisant deux méthodes différentes.

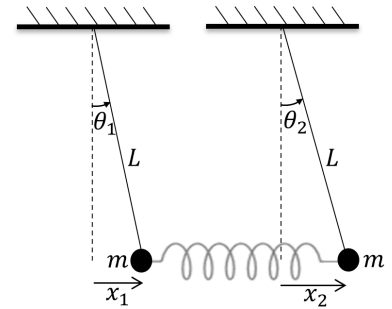


FIGURE 6.2: Deux pendules couplés par un ressort.

☞ L'inversion de l'espace (\vec{r} devient $-\vec{r}$) est une opération de symétrie appelée parité.

Notons tout de même que sous forme matricielle, les équations précédentes s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\omega_0^2 + \omega_e^2) & \omega_e^2 \\ \omega_e^2 & -(\omega_0^2 + \omega_e^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Le couplage des équations différentielles se traduit par **la présence de termes non diagonaux**.

6.3 Détermination des modes propres : utilisation de l'expérience

Nous avons vu à la première section que des considérations de symétrie sur l'expérience nous ont permis de déterminer le rapport $\frac{x_1}{x_2}$ pour chacun des modes.

Pour le mode propre de plus basse fréquence (le mode symétrique), nous avons $\frac{x_1}{x_2} = 1$ tandis que nous avons $\frac{x_1}{x_2} = -1$ pour le mode propre de plus haute fréquence (le mode antisymétrique).

Nous allons donc poser $q_S = x_1 + x_2$ et $q_A = x_1 - x_2$. Ces variables vérifient les équations différentielles :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_S &= -\omega_0^2 q_S = -\omega_-^2 q_S \\ \ddot{q}_A &= -(\omega_0^2 + 2\omega_e^2) q_A = -\omega_+^2 q_A \end{aligned}$$

Nous pouvons intégrer ces deux équations pour obtenir :

$$q_S = A_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) \quad (6.3)$$

$$q_A = A_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \quad (6.4)$$

Nous avons ainsi déterminé **les fréquences angulaires des deux modes propres**. Nous trouvons bien que le mode q_S a une plus basse fréquence que le mode q_A . Passons maintenant à une méthode plus générale.

6.4 Détermination des modes propres : méthode générale

Dans l'exemple considéré jusqu'à présent, nous avons pu déterminer les modes propres en les "devinant" grâce à la géométrie de l'expérience. C'est une particularité de notre système étudié. Nous pouvons avoir des oscillateurs couplés à deux degrés de liberté pour lesquelles la détermination du rapport $\frac{x_1}{x_2}$ n'est pas triviale. Nous allons donc étudier dans cette partie **une méthode générale pour déterminer les fréquences angulaires des modes propres ainsi que le rapport des amplitudes**.

Reprenons nos équations de base :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\omega_0^2 x_1 + \omega_e^2 (x_2 - x_1) \\ \ddot{x}_2 &= -\omega_0^2 x_2 + \omega_e^2 (x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Nous cherchons les modes propres. Or, **lorsque le système oscille dans un mode normal, $x_1(t)$ et $x_2(t)$ oscillent à la même fréquence par définition même d'un mode normal**. Nous injectons donc dans le système précédemment des solutions de la forme :

$$x_1 = C_1 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$x_2 = C_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

pour obtenir :

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_e^2)C_1 - \omega_e^2 C_2 &= 0 \\ -\omega_e^2 C_1 + (-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_e^2)C_2 &= 0 \end{aligned}$$

A priori, nous semblons avoir trois inconnues C_1 , C_2 et ω pour deux équations. En fait, les amplitudes des mouvements d'oscillation des sous-parties du système ne sont pas indépendantes. Ainsi, C_1 et C_2 ne sont pas des constantes indépendantes et **nous cherchons donc l'expression du rapport $\frac{C_1}{C_2}$** .

Nous trouvons $\frac{C_1}{C_2} = \frac{\omega_e^2}{-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_e^2}$ à partir de la première équation et $\frac{C_1}{C_2} = \frac{-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_e^2}{\omega_e^2}$ à partir de la seconde équation. L'égalisation de ces deux expressions donne :

$$(-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_e^2)^2 = \omega_e^4$$

Nous trouvons ainsi $\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_e^2 \pm \omega_e^2$ soit :

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_-^2 \\ \omega^2 &= \omega_+^2 \end{aligned}$$

Nous injectons ensuite ces deux expressions de la fréquence dans les expressions de $\frac{C_1}{C_2}$. Pour $\omega^2 = \omega_-^2$, nous trouvons $\frac{C_1}{C_2} = 1$ et pour $\omega^2 = \omega_+^2$ nous trouvons $\frac{C_1}{C_2} = -1$.

Nous avons ainsi retrouvé nos deux modes normaux. Dans le mode ω_+ , nous avons :

$$\begin{aligned} x_{1,+} &= \frac{A_+}{2} \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \\ x_{2,+} &= -\frac{A_+}{2} \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \end{aligned}$$

où les facteurs 1/2 servent à retrouver les expressions 10.3 en gardant les mêmes symboles pour les amplitudes. Nous obtenons donc :

$$q_A = A_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \tag{6.5}$$

Pour le mode ω_- , nous avons :

$$\begin{aligned} x_{1,-} &= \frac{A_-}{2} \cos(\omega_- t + \varphi_-) \\ x_{2,-} &= \frac{A_-}{2} \cos(\omega_- t + \varphi_-) \end{aligned}$$

d'où :

$$q_S = A_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) \tag{6.6}$$

6.5 Mouvement quelconque

L'équation différentielle du mouvement est une équation différentielle linéaire. **Une combinaison linéaire des solutions est donc également solution. Autrement dit, un mouvement quelconque de notre système d'oscillateurs couplés à deux degrés de liberté est une combinaison linéaire des modes normaux.**

Ainsi, dans notre exemple, nous avons $x_1 = \frac{1}{2}(q_S + q_A)$ et $x_2 = \frac{1}{2}(q_S - q_A)$ soit :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{A_-}{2} \cos(\omega_- t + \varphi_-) + \frac{A_+}{2} \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \\ x_2 &= \frac{A_-}{2} \cos(\omega_- t + \varphi_-) - \frac{A_+}{2} \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \end{aligned}$$

où, de manière équivalente :

$$x_1 = A \cos(\omega_- t) + B \sin(\omega_- t) + C \cos(\omega_+ t) + D \sin(\omega_+ t) \quad (6.7)$$

$$x_2 = A \cos(\omega_- t) + B \sin(\omega_- t) - C \cos(\omega_+ t) - D \sin(\omega_+ t) \quad (6.8)$$

Nous pouvons étudier plus en détails le mouvement de notre système pour les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} x_1(t=0) = 0 \\ \dot{x}_1(t=0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_2(t=0) = A_0 \\ \dot{x}_2(t=0) = 0 \end{cases}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{A_0}{2} (\cos(\omega_- t) - \cos(\omega_+ t)) \\ x_2 &= \frac{A_0}{2} (\cos(\omega_- t) + \cos(\omega_+ t)) \end{aligned}$$

Les formules de trigonométries nous permettent de réécrire les relations précédentes sous la forme :

$$x_1 = -A_0 \sin\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2}t\right) \quad (6.9)$$

$$x_2 = A_0 \cos\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2}t\right) \quad (6.10)$$

La figure 6.3 montre le graphe de $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Nous observons **un phénomène de battements entre les deux pendules**. L'énergie est transférée d'un pendule à l'autre au cours du temps.

Notons que la période de battement est ici dépendante du couplage entre les deux pendules. Expérimentalement, nous constatons effectivement que la période de battement augmente si nous diminuons le couplage.

6.6 Aspect énergétique

Nous allons dans cette section étudier l'aspect énergétique des deux oscillateurs couplés. Nous repartons de nos équations de base :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -\frac{g}{L}mx_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 &= -\frac{g}{L}mx_2 + k(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Nous obtenons donc, en multipliant par \dot{x}_1 la première équation et par \dot{x}_2 la deuxième équation, puis en additionnant les deux équations :

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \right) + \left(mg\frac{x_1^2}{2L} + mg\frac{x_2^2}{2L} \right) + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 \right\} = 0$$

(6.11)

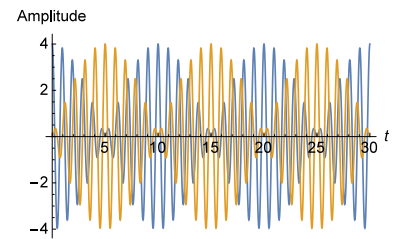


FIGURE 6.3: Battements entre les deux modes normaux. Le graphe de $x_1(t)$ correspond à la courbe orange. Le graphe de $x_2(t)$ correspond à la courbe bleue.

Nous reconnaissons dans l'équation précédente la somme de l'énergie cinétique de chaque pendule ainsi que l'énergie potentielle élastique contenue dans le ressort. Le terme $mg\frac{x_1^2}{2L} + mg\frac{x_2^2}{2L}$ doit donc représenter l'énergie potentielle des deux pendules. C'est ce que nous allons montrer.

L'approximation des petits angles revient à faire le développement de $\cos\theta$ à l'ordre 1 en θ . C'est-à-dire, que $\cos\theta = 1$ aux petits angles. Or, $\cos\theta = \frac{h}{L}$ où h est la distance qui sépare le pendule de son support à la verticale. Nous avons donc $h = L$ aux petits angles, ce qui revient à dire que le pendule ne se déplace pas verticalement. Nous pouvons donc nous demander d'où provient le terme d'énergie potentielle? C'est le travail de la tension du fil qui est à l'origine de la variation d'énergie potentielle du pendule dans ce cas. Pour déplacer le pendule horizontalement d'une distance x à vitesse constante, un opérateur doit lutter contre la tension du fil et fournir le travail $W = \int_0^x T \sin\theta dx = \int_0^x T \frac{x}{L} dx = mg\frac{x^2}{2L}$ avec $T = mg$ aux petits angles.

Ainsi, l'équation 6.11 représente la conservation de l'énergie mécanique du système {deux pendules couplés par un ressort}. Le premier terme entre parenthèses représente l'énergie cinétique des pendules, le deuxième terme entre parenthèses représente l'énergie potentielle des pendules et le troisième terme représente l'énergie potentielle élastique contenue dans le ressort.

Nous avons donc :

$$E_M = E_C + E_{PP} + E_{PE} \tag{6.12}$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + mg\frac{x_1^2}{2l} + mg\frac{x_2^2}{2l} + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 \tag{6.13}$$

Nous pouvons exprimer cette énergie en fonction des variables q_S et q_A soit en partant directement des équations du mouvement en terme de q_S et q_A soit en changeant de variables dans l'équation 10.20. Nous allons suivre ce chemin ici. Nous pouvons montrer $\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = \frac{1}{2}\dot{q}_S^2 + \frac{1}{2}\dot{q}_A^2$ et que $x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}q_S^2 + \frac{1}{2}q_A^2$. Nous obtenons donc :

$$E_M = \left(\frac{1}{4}m\dot{q}_S^2 + mg\frac{q_S^2}{4l} \right) + \left(\frac{1}{4}m\dot{q}_A^2 + mg\frac{q_A^2}{4l} + \frac{1}{2}kq_A^2 \right) \tag{6.14}$$

L'énergie se répartie donc entre les deux modes propres. Comme attendu, le mode antisymétrique contient l'énergie potentielle élastique du couplage entre les deux oscillateurs