

Oscillateur forcé : résonance

Objectifs :

- définir la notion de résonance.
- étudier la résonance en amplitude d'un oscillateur en résonance.
- étudier la résonance en vitesse et la puissance absorbée par un oscillateur en résonance.

Nous avons étudié dans les chapitres précédents les oscillateurs harmoniques libres, c'est-à-dire que l'action de l'opérateur extérieur se limite à placer le système oscillant dans un état initial donné. Nous allons dans ce chapitre étudier un oscillateur excité "en continu" par une force extérieure.

Voici une vidéo qui montre le principe de la résonance :

<https://www.youtube.com/watch?v=BQ58oiMxGcg>

5.1 Équations du mouvement

Nous considérons le système schématisé sur la figure 4.1. Un bloc de masse m est lié à deux ressorts identiques. Le ressort de droite est relié à une roue qui tourne sur elle-même autour de son axe à la vitesse angulaire ω . Nous modélisons la force de frottement qui s'exerce sur le bloc par **une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse**.

L'oscillateur libre étudié dans le cours précédent est donc maintenant excité par une force dépendant du temps $F(t)$. Nous verrons dans les applications que de nombreux systèmes physiques sont régis par les mêmes équations que celles obtenues à partir de ce système particulier. L'équation du mouvement de la masse m s'écrit :

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - kx + F(t)$$

où $x(t)$ représente l'élongation du ressort, c'est-à-dire la position de la masse par rapport à sa position à l'équilibre. La fonction $F(t)$ peut quasiment toujours se développer en série de Fourier ou en intégrales de Fourier. Nous allons donc considérer dans la suite une seule composante de Fourier de la fonction $F(t)$. Autrement dit, nous prenons dans la suite un terme de

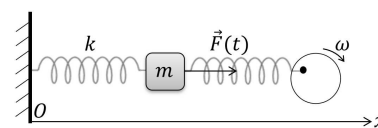


FIGURE 5.1: Oscillateur forcé par une force sinusoïdale à la fréquence angulaire ω .

☞ Un système bloc-ressort forcé peut-être réalisé expérimentalement à l'aide d'un banc à coussin d'air. On observe expérimentalement que l'amplitude des oscillations du bloc devient très importante au voisinage d'une fréquence particulière de la force excitatrice.

forçage de la forme $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$. Il est par ailleurs très fréquent que la force excitatrice de l'oscillateur soit une fonction sinusoidale. Nous obtenons donc :

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \quad (5.1)$$

où l'origine des temps a été choisie de façon à annuler la phase et où nous avons posé $\beta = \frac{\gamma}{m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

5.2 Solution en régime permanent

Dans ce régime, le bloc **oscille obligatoirement à la fréquence ω** . Par contre, il peut y avoir **un décalage temporel entre l'excitation et la réponse**.

Nous tenons compte de ce décalage en ajoutant **une phase φ** à la solution et nous cherchons donc une solution de la forme :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad (5.2)$$

Nous prenons d'emblée un signe moins car nous nous attendons à ce que la réponse soit en retard par rapport à l'excitation. Avec un signe négatif, nous nous attendons donc à avoir φ positif.

Insistons bien sur le point suivant. La masse oscille forcément à la fréquence ω en régime permanent. En effet, si la fréquence de l'excitateur et de l'oscillateur était différente, l'oscillateur et l'excitateur ne reviendrait pas à la même position au bout d'une période et nous ne serions donc pas en régime permanent.

Par contre, l'amplitude du mouvement de la phase et le déphasage entre l'excitation et la réponse dépend de la fréquence angulaire ω de l'excitation. C'est d'ailleurs **le seul paramètre que l'opérateur peut choisir en régime permanent**. Nous cherchons donc **l'amplitude $x_0(\omega)$ du mouvement du bloc et le déphasage $\varphi(\omega)$** .

Nous allons maintenant utiliser la notation complexe pour obtenir l'amplitude du mouvement de la masse m en fonction de la fréquence. Nous posons donc :

$$\underline{x}(t) = x_0(\omega) e^{i(\omega t - \varphi(\omega))} = \underline{x}_0(\omega) e^{-i\varphi(\omega)} \quad \text{et} \quad \underline{F}(t) = F_0 e^{i\omega t} \quad (5.3)$$

L'équation du mouvement se réécrit en notation complexe :

$$\frac{d^2 \underline{x}}{dt^2} + \beta \frac{d \underline{x}}{dt} + \omega_0^2 \underline{x} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \quad (5.4)$$

Nous injectons la forme $\underline{x}(t) = x_0(\omega) e^{i(\omega t - \varphi(\omega))}$ dans l'équation précédente pour obtenir :

$$(-\omega^2 + i\beta\omega + \omega_0^2)x_0 = \frac{F_0}{m} e^{i\varphi}$$

L'équation précédente peut et doit se lire comme **deux équations**. Nous devons en effet avoir égalité entre les parties réelles et les parties imaginaires pour que l'égalité soit vérifiée. Nous obtenons donc :

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)x_0 = \frac{F_0}{m} \cos \varphi$$

☞ L'excitation et la réponse sont reliées par la fonction de transfert dans le domaine fréquentiel. Le lien entre la réponse et l'excitation dans le domaine temporel est un produit de convolution.

et :

$$\beta\omega x_0 = \frac{F_0}{m} \sin \varphi$$

Nous obtenons donc :

$$x_0(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}} \quad (5.5)$$

et :

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad (5.6)$$

avec φ compris entre 0 et π .

5.3 Résonance en amplitude

La figure 4.2 montre le graphe de l'amplitude (équation 4.5) et du déphasage (4.6).

Nous pouvons faire quelques commentaires :

1. Nous observons **une très forte augmentation de l'amplitude à $\omega = \omega_m$** . Nous parlons **de résonance en amplitude**, ou en élongation, du système à cette fréquence angulaire.
2. Le système rentre en résonance en amplitude à la fréquence $\omega_m = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{2}} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ où $Q = \frac{\omega_0}{\beta}$ est le facteur de qualité de l'oscillateur. **Ainsi, $\omega_m = \omega_0$ pour $Q \gg 1$** . Remarquons également qu'il y a résonance en amplitude uniquement si $\beta < \sqrt{2}\omega_0$. Nous nous placerons désormais dans cette situation.

Exemple

Pour déterminer l'expression de ω_m , il suffit de chercher la fréquence pour laquelle $x_0(\omega)$ est maximum, ce qui revient à chercher la fréquence ω_m pour laquelle la fonction $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2$ est minimum. Il faut donc déterminer $\omega > 0$ tel que la dérivée de $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2$ soit nulle.

3. L'amplitude max des oscillations $x_{0,max}$ a pour expression $x_{0,max} = \frac{QF_0}{m\omega_0^2\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$. Nous avons $x_{0,max} = \frac{QF_0}{m\omega_0^2}$ pour $Q \gg 1$. **L'amplitude des oscillations est alors proportionnelle au facteur de qualité de l'oscillateur**. La figure 4.3 montre le graphe de l'amplitude des oscillations pour différentes valeurs du facteurs de qualité.
4. L'amplitude des oscillations du système pour $\omega \ll \omega_m$ est non nulle et **tend vers $\frac{F_0}{m\omega_0^2}$** . L'intensité de la force extérieure est alors directement reliée à l'amplitude des oscillations du système. **A F_0 fixé, c'est uniquement la constante de raideur k du ressort qui contrôle l'amplitude**.
5. A haute fréquence, l'amplitude des oscillations est donnée par $x_0 = \frac{F_0}{m\omega^2}$. La constante de rappel du ressort n'apparaît plus dans cette expression, c'est **l'inertie du système qui contrôle la réponse dans la limite haute fréquence**. L'amplitude des oscillations du système devient nulle pour $\omega \gg \omega_m$. Le système est immobile. Il n'a « pas le temps » de réagir.
6. Le graphe du déphasage montre que **l'oscillateur et le terme de forçage sont en phase à basse fréquence et en opposition de**

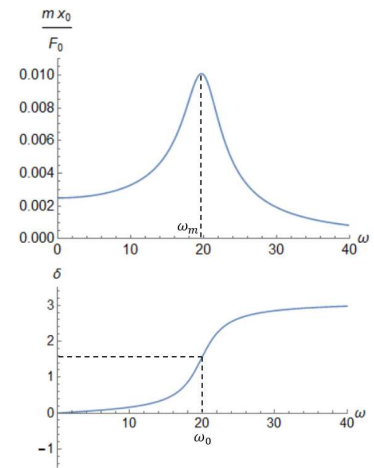


FIGURE 5.2: Graphe de l'amplitude du mouvement de l'oscillateur et déphasage en fonction de ω avec $\beta = 5\text{ s}^{-1}$ et $\omega_0 = 20\text{ rad s}^{-1}$.

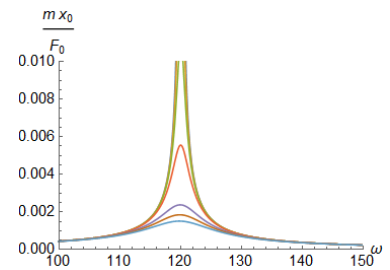


FIGURE 5.3: Graphe de l'amplitude du mouvement pour différentes valeurs du facteur de qualité. Le tracé est fait avec $\omega_0 = 20\text{ rad s}^{-1}$ et β varie de $0,3\text{ s}^{-1}$ à 15 s^{-1} .

phase au-dessus de la résonance. Nous constatons également que la réponse de l'oscillateur est toujours « en retard ». Nous pourrions être surpris du déphasage de $\frac{\pi}{2}$ à la résonance. Un instant de réflexion avec le modèle de la balançoire nous persuade du sens physique de ce déphasage. En effet, pour amplifier le mouvement d'oscillation d'une balançoire il faut exercer une poussée dans le sens de la vitesse. Il faut donc que la force change de direction et passe par 0 lorsque l'amplitude de l'oscillation est maximum.

7. Outre l'amplitude de l'oscillation à la fréquence de résonance, la résonance est caractérisé par **la largeur à mi-hauteur**. Nous pouvons déterminer l'expression de la largeur à mi-hauteur dans le cas $Q \gg 1$. Nous avons alors, $\omega_0 \gg \beta$, $\omega \gg \beta$ et $\omega \simeq \omega_0$. Nous avons alors $x_0(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{|\omega_0^2 - \omega^2|} \simeq \frac{\frac{F_0}{m}}{2\omega_0|\omega_0 - \omega|}$. Nous cherchons $\omega < \omega_0$ telle que $\frac{\frac{F_0}{m}}{2\omega_0(\omega_0 - \omega)} = \frac{Q F_0}{2m\omega_0^2}$ soit $\omega_0 - \omega = \frac{\omega_0}{Q}$. La largeur à mi-hauteur $\Delta\omega$ a donc pour expression $\Delta\omega = \omega_0 \frac{2}{Q}$ soit $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2}{Q}$. Ainsi la largeur à mi-hauteur du pic à la résonance diminue lorsque le facteur de qualité augmente. Retenons que l'ordre de grandeur du facteur de qualité d'un oscillateur en résonance est donnée par :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \tag{5.7}$$

La finesse et la hauteur du pic à la résonance augmente avec le facteur de qualité.

8. Le bloc se comporte comme **un filtre passe bande**. la force $F(t)$ est transmise au ressort pour une fréquence ω comprise dans une bande de largeur $\simeq \Delta\omega$ autour de ω_0 pour $Q \gg 1$.

Voici une qui montre le déphasage en fonction de la fréquence :

<https://www.youtube.com/watch?v=aZNnwQ8HJHU>

La vidéo suivante montre que la fréquence d'excitation doit correspondre à la fréquence d'oscillation du système pour avoir résonance :

https://www.youtube.com/watch?v=LV_UuzEznHs

5.4 Résonance en vitesse

La vitesse du bloc a pour expression :

$$v(t) = -\omega x_0(\omega) \sin(\omega t - \varphi) = -v_0(\omega) \sin(\omega t - \varphi)$$

L'amplitude de la vitesse des oscillations a donc pour expression :

$$v_0(\omega) = \frac{F_0}{m} \frac{\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2}} \tag{5.8}$$

Nous pouvons faire quelques commentaires :

1. Nous observons une très forte augmentation de l'amplitude à $\omega = \omega_0$. Nous parlons de résonance en vitesse du système à cette fréquence angulaire.

Le saviez-vous ? Le plus grand pont du monde se situe au Japon, le pays des tremblements de terre. Nous pouvons donc nous demander comment un tel pont peut résister aux ondes sismiques qui se propagent dans le sol lors d'un tremblement de terre. Il se trouve que la fréquence des ondes sismiques est supérieure à la fréquence propre d'oscillation d'un point d'une telle taille (l'oscillation d'un pylône est la même que l'oscillation d'un pendule composé inversé. Nous avons montré que la fréquence d'oscillation d'un tel pendule est en \sqrt{L} où L est la hauteur du pylône). Ainsi, l'amplitude de l'oscillation du pont due aux ondes sismiques est très faible étant donné que la fréquence des ondes sismiques ne "tombe pas" dans le pic de résonance en amplitude.

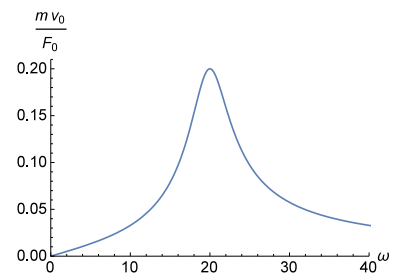


FIGURE 5.4: Graphe de l'amplitude de la vitesse de l'oscillation avec $\beta = 5 \text{ s}^{-1}$ et $\omega_0 = 20 \text{ rad s}^{-1}$.

Exemple

Nous pouvons montrer que la résonance en vitesse a lieu pour $\omega = \omega_0$. La bonne méthode est de sortir ω du dénominateur pour simplifier le numérateur. La forme obtenue comporte uniquement ω au dénominateur. Il est alors facile de voir que le dénominateur est min pour $\omega = \omega_0$.

2. La vitesse des oscillations tend zéro pour $\omega \rightarrow 0$.
3. La vitesse des oscillations du système devient nulle pour $\omega \gg \omega_0$. Le système est immobile. Il n'a « pas le temps » de réagir.
4. L'évolution du pic à la résonance en vitesse est identique à l'évolution du pic de la résonance en amplitude.

5.5 Puissance absorbée

Commençons par faire un bilan énergétique en multipliant par \dot{x} l'équation du mouvement $m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - kx + F(t)$ pour obtenir :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) = F(t)\dot{x} - \gamma\dot{x}^2$$

Le membre de gauche de l'équation précédente représente la variation temporelle de l'énergie mécanique de l'oscillateur bloc-ressort. Le premier terme du membre de droite représente **la puissance absorbée** par le système bloc-ressort tandis que le deuxième terme du membre de droite représente **la puissance dissipée** par les forces de frottements.

La variation temporelle de la valeur moyenne de l'énergie mécanique sur une période s'écrit donc :

$$\frac{d}{dt} \langle E_M \rangle = \langle F(t)\dot{x} \rangle - \gamma \langle \dot{x}^2 \rangle$$

En régime permanent, nous avons $\frac{d}{dt} \langle E_M \rangle = 0$ ce qui implique que **la valeur moyenne de la puissance dissipée est égale à la valeur moyenne de la puissance absorbée**. C'est cette dissipation d'énergie due au frottement qui explique que l'amplitude des oscillations "n'explose" pas à la résonance. Nous pouvons d'ailleurs remarquer que l'amplitude des oscillations tend vers l'infini à la résonance si $\beta = 0$ dans l'équation 4.5.

Nous allons maintenant étudier l'expression de la valeur moyenne de la puissance absorbée par le système bloc ressort. La puissance instantanée fournie par la force excitatrice a pour expression :

$$\begin{aligned} P &= Fv \\ &= -F_0v_0 \cos(\omega t) \sin(\omega t - \varphi) \\ &= F_0v_0 \cos(\omega t) [\cos(\omega t) \sin \varphi - \sin(\omega t) \cos \varphi] \end{aligned}$$

La valeur moyenne de l'expression précédente sur une période a pour expression :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} F_0 v_0 \sin \varphi$$

En utilisant l'expression $\sin \varphi = \frac{m}{F_0} \beta \omega x_0$ et l'expression de v_0 , nous obtenons :

$$\langle P \rangle = \frac{F_0^2}{2m\beta} \frac{\beta^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2} \tag{5.9}$$

La figure 4.5 montre le graphe de la puissance absorbée en fonction de ω . Nous pouvons faire quelques commentaires.

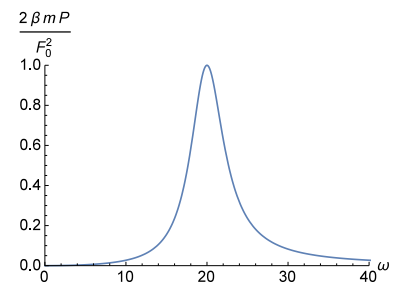


FIGURE 5.5: Graphe de la valeur moyenne de la puissance absorbée par le système bloc-ressort en fonction de la fréquence angulaire ω avec $\beta = 5 \text{ s}^{-1}$ et $\omega_0 = 20 \text{ rad s}^{-1}$.

1. La puissance fournie est **maximum pour $\omega = \omega_0$** .
2. La puissance max **absorbée a pour expression $\langle P \rangle_{max} = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{\beta m} = \frac{1}{2} \frac{Q F_0^2}{m \omega_0}$** . La puissance max absorbée est donc proportionnelle au facteur de qualité de l'oscillateur et **au carré de l'amplitude de la force excitatrice**.
3. La largeur a mi-hauteur est donnée par $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2 = 2\beta^2 \omega^2$ soit $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \beta^2 \omega^2$. Nous avons donc deux cas de figures à étudier. Commençons par ω_- qui est solution de $\omega_0^2 - \omega^2 = \beta \omega$. Une fréquence est toujours positive, nous devons garder la solution $\omega < \omega_0$ c'est-à-dire $\omega_- = \frac{-\beta}{2} + \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\beta^2}{4}}$. Nous passons maintenant à ω_+ qui est solution de $\omega_0^2 - \omega^2 = -\beta \omega$. Une fréquence est toujours positive, nous devons garder la solution $\omega > \omega_0$ c'est-à-dire $\omega_+ = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\beta^2}{4}}$. **La largeur a mi-hauteur a donc pour expression $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = \beta$ soit $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$** . La finesse du pic de résonance en puissance augmente donc avec le facteur de qualité.
4. Proche de la résonance, $\omega \simeq \omega_0$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= P_0 \frac{\beta^2 \omega^2}{4\omega^2(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2 \omega^2} \\ &= P_0 \frac{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

Le profil de la raie correspondante est un profil de raie de Lorentz en optique (et de Breit-Wigner en physique nucléaire).

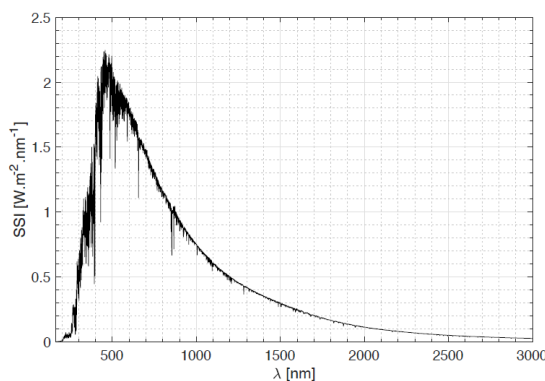
Le saviez-vous ? Les conclusions obtenues pour notre système à 1 degré de liberté restent valides pour des systèmes oscillants à plusieurs degrés de liberté. Nous pouvons alors observer plusieurs fréquences de résonance mais la description de la puissance absorbée au voisinage d'une résonance reste valide.

Exemple

De très nombreux systèmes physiques peuvent être décrits par les équations précédentes. Donnons un exemple précis. En physique classique, un atome peut-être modélisé comme un oscillateur. Le nuage électronique de l'atome oscille autour du noyau tout en perdant de l'énergie par rayonnement. Cette perte d'énergie est modélisée par une force de frottement fluide.

Le champ électrique d'une onde électromagnétique reçue par l'atome agit alors comme un terme de forçage et ce couplage entre l'onde et l'atome peut-être décrit par les équations développées dans ce chapitre.

La figure ci-dessous montre le spectre du rayonnement solaire qui arrive sur Terre. Nous pouvons distinguer des raies d'absorption très nettes. Il s'agit de l'absorption du rayonnement émis par la surface du Soleil aux fréquences de résonance des atomes présent dans l'atmosphère solaire.



Le saviez-vous ? En plus du profil de raie intrinsèque à la transition considérée. Les collisions entre les molécules au sein d'un gaz provoque un élargissement Lorentzien du profil de raie. L'effet Doppler provoque un élargissement Gaussien du profil de raie. Le profil de Voigt est le produit de convolution de ces deux profils de raie, il permet ainsi de modéliser le profil d'une raie en spectroscopie.

5.6 Du régime libre au régime permanent

Pour bien comprendre l'évolution du régime libre au régime permanent, reprenons dans un premier temps la solution d'un oscillateur à 1 degré de liberté sans amortissement. La solution est de la forme $x(t) = C \cos(\omega t + \varphi)$. Dans cette solution, les valeurs des paramètres C et φ sont **imposées par les conditions initiales** tandis que le paramètre ω_0 est **une caractéristique intrinsèque du système**. Notons bien que ω_0 ne dépend absolument pas, ni de l'opérateur, ni des conditions initiales.

Reprenons maintenant l'équation décrivant l'oscillation libre d'un oscillateur à 1 degré de liberté avec amortissement. En régime pseudo périodique, nous avons obtenu $x(t) = C e^{-\frac{\beta}{2}t} \cos(\omega t + \varphi)$ avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2}$. Dans cette solution, **C et φ sont imposés par les conditions initiales** tandis que **les paramètres ω et β sont des caractéristiques intrinsèques du système étudié**.

Analysons maintenant avec le même regard la solution du régime permanent. Nous avons trouvé :

$$x(t) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right)$$

où ω est la fréquence angulaire qui est maintenant fixé par le terme de forçage. Les paramètres ω_0 et β restent des caractéristiques intrinsèques du système étudié mais nous pouvons noter qu'aucun paramètre de cette équation ne dépend des conditions initiales. Autrement dit, **le système a perdu toute mémoire de son état initial**.

Comment s'effectue cette perte de mémoire? Notre équation de base s'écrit $\ddot{x} + \beta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$. Sa solution générale est la somme de la solution de l'équation homogène et de la solution particulière. La solution homogène correspond à la solution de l'oscillateur libre avec amortissement tandis que la solution particulière correspond à la solution en régime permanent. Nous obtenons donc :

$$x(t) = C e^{-\frac{\beta}{2}t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2} t + \varphi\right) + \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right)$$

(5.10)

où **les paramètres C et φ sont imposés par les conditions initiales**. La solution précédente montre que l'impact des conditions initiales devient **négligeable pour $t \gg \frac{1}{\beta}$** . Au-delà, seule la solution particulière survie et nous sommes en régime permanent. Notons que nous pouvons avoir un phénomène de battement si la fréquence angulaire du terme de forçage est proche de la fréquence angulaire du régime libre amorti tant que les deux solutions coexistent.