CHAPITRE 4

Oscillateur libre amorti

Objectifs :

- établir l'équation différentielle d'un oscillateur amorti
- identifier le régime d'oscillation d'un oscillateur amorti
- étudier le régime pseudo-périodique d'un oscillateur amorti.
- de définir et d'utiliser le facteur de qualité d'un oscillateur amorti.

Nous avons étudié dans les chapitres précédents les oscillateurs harmoniques libres en négligeant les forces de frottements. Nous allons maintenant en tenir compte.

4.1 Modélisation des frottements

Prenons l'exemple du pendule simple. Nous avons deux sources de frottements : les frottements aérodynamiques de la masse ainsi que les frottements au niveau de l'axe de rotation.

Pour de faibles vitesses, il parait raisonnable de considérer que l'intensité des frottements aérodynamiques est proportionnelle à la vitesse. En effet, si la vitesse augmente, le nombre de chocs de molécules sur l'objet se déplaçant dans l'air augmente proportionnellement avec la vitesse tant que l'écoulement est laminaire.

Il est par contre très difficile de connaitre exactement les interactions entre les solides au niveau du point d'attache. Nous allons néanmoins **modéliser** cette source de dissipation d'énergie par une **force de frottement proportionnelle à la vitesse**. Nous verrons que les résultats prédits par une telle modélisation sont en accord avec l'expérience.

4.2 Équation différentielle du mouvement

En l'absence de force de frottement, nous avons montré que l'équation du mouvement d'un système bloc-ressort s'écrit $m\ddot{x} = -kx$ où x est l'élongation du ressort. En tenant compte d'une force de frottement fluide $\vec{f} = -\gamma\vec{v}$, l'équation du mouvement du bloc devient :

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - kx$$

où γ, qui s'exprime en $\mathrm{kg\,s^{-1}}$, est le coefficient de frottement. Cette équation se réécrit :

$$\boxed{\ddot{x} + 2\kappa\dot{x} + \omega_0^2 x = 0} \tag{4.1}$$

où ω_0 est la fréquence angulaire d'oscillation du système en l'absence de frottement et $\kappa = \frac{\gamma}{2m}$.

Dans le cas d'un pendule simple de longueur L, le théorème du moment cinétique appliqué au niveau du point d'attache O du pendule s'écrit :

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f})$$

La force de frottement fluide qui s'exerce sur le pendule a pour expression en coordonnées polaires $\vec{f} = -\gamma L\dot{\theta}\hat{u}_\theta$. Le théorème du moment cinétique appliqué au point fixe O s'écrit donc :

$$mL^2\ddot{\theta} = -mgL\sin\theta - \gamma L^2\dot{\theta}$$

qui se réécrit aux petits angles :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\theta - \frac{\gamma}{m}\dot{\theta}$$

soit :

$$\boxed{\ddot{\theta} + 2\kappa\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0} \tag{4.2}$$

où ω_0 est la fréquence angulaire d'oscillation du système en l'absence de frottement et $\kappa = \frac{\gamma}{2m}$ en $\mathrm{s^{-1}}$.

4.3 La nature des solutions de l'équation du mouvement

Nous devons donc résoudre l'équation :

$$\ddot{\theta} + 2\kappa\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \tag{4.3}$$

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants sans second membre. Nous injectons une solution de la forme e^{rt} dans l'équation 4.3 pour obtenir $\theta(r^2 + 2\kappa r + \omega_0^2) = 0$. Cette équation doit être vérifiée quelle que soit θ, ce qui implique que $r^2 + 2\kappa r + \omega_0^2 = 0$. Les solutions de cette équation s'écrivent $r_1 = -\kappa + \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}$ et $r_2 = -\kappa - \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}$. Autrement dit, **la nature de la solution dépend du signe de $\kappa^2 - \omega_0^2$.** Nous avons trois cas possibles.

- Soit $\kappa^2 - \omega_0^2 < 0$ et $\sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}$ est un nombre complexe. La solution est alors une combinaison d'exponentielles complexes. Il y a donc oscillation de l'oscillateur amorti dans ce cas. Ce cas de figure correspond à des frottements suffisamment faibles pour avoir $\kappa < \omega_0$ et une oscillation de l'oscillateur amorti.
- Soit $\kappa^2 - \omega_0^2 > 0$ et $\sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}$ est un nombre réel. La solution est alors une combinaison d'exponentielles réelles. Les frottements sont suffisamment élevés pour que l'oscillateur n'oscille pas.
- Soit $\kappa^2 - \omega_0^2 = 0$. La solution est une fonction réelle dans ce cas. Les frottements sont suffisamment élevés pour que le système n'oscille pas.

4.4 Étude des différents régimes d'oscillation

4.4.1 Le régime pseudo-périodique : cas $\kappa < \omega_0$

Nous avons alors $\sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2} = i\omega$. La solution générale est une combinaison linéaire des deux solutions $e^{r_1 t}$ et $e^{r_2 t}$. Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}\theta(t) &= C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}\\ &= e^{-\kappa t}(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t})\end{aligned}$$

avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}$.

Puisque la fonction $\theta(t)$ est une fonction réelle, les coefficients C_1 et C_2 doivent donc être des nombres complexes. Précisons. Nous avons $\theta(t) = e^{-\kappa t}\{(C_1 + C_2)\cos\omega t + i(C_1 - C_2)\sin\omega t\}$. Puisque $\theta(t)$ est une fonction réelle, $C_1 - C_2$ doit être un nombre imaginaire et $C_1 + C_2$ doit être un nombre réel. Notons que nous ne pouvons pas avoir $C_1 - C_2 = 0$ car la solution dépendrait uniquement d'une constante dans ce cas, ce qui n'est pas possible pour une solution d'une équation différentielle du deuxième ordre. Nous posons donc $C_1 = \frac{A}{2} - i\frac{B}{2}$ et $C_2 = \frac{A}{2} + i\frac{B}{2}$ pour obtenir :

☞ Rappelons la formule d'Euler que nous allons utiliser par la suite $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

$$\boxed{\theta(t) = e^{-\kappa t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)} \tag{4.4}$$

☞ La fréquence angulaire $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}$ en régime pseudo-périodique est plus faible que la fréquence angulaire propre ω_0 du même système physique sans frottement.

L'identité $\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$ permet de passer à la forme :

$$\boxed{\theta(t) = Ce^{-\kappa t}\cos(\omega t + \varphi)} \tag{4.5}$$

où les constantes A et B ou C et φ sont déterminées grâce aux conditions initiales.

Point notation ! L'amplitude du mouvement C peut se lire uniquement dans la forme 4.5.

Exemple

Déterminons par exemple A, B et C, φ pour $\theta(t=0) = \theta_0$ et $\dot\theta(t=0) = 0$. Nous avons $A = \theta_0$ et $B = \frac{\kappa}{\omega}\theta_0$ où $C\cos\varphi = \theta_0$ et $C\sin\varphi = -\theta_0\frac{\kappa}{\omega}$ soit $C = \theta_0\sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2}}$ et $\tan\varphi = -\frac{\kappa}{\omega}$

La figure 4.1 montre le graphe de la fonction θ en fonction du temps pour $\frac{\omega_0}{\kappa} = 50$. Nous constatons que le mouvement de notre pendule est un mouvement **d'oscillation dont l'amplitude décroit exponentiellement**. Un tel mouvement est un mouvement **pseudo-périodique** puisque le pendule ne revient pas exactement à sa position précédente. La grandeur $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}$ est la **pseudo-fréquence angulaire**. La **pseudo-période** a pour expression :

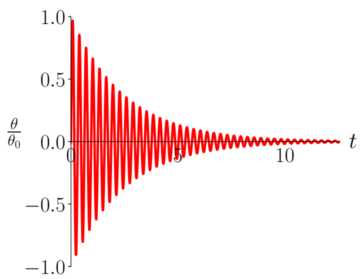

FIGURE 4.1: Graphe de $\theta(t)$ en fonction du temps dans le régime pseudo-périodique avec les conditions initiales $\theta(t=0) = \theta_0$ et $\dot\theta(t=0) = 0$ avec $\frac{\omega_0}{\kappa} = 50$.

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}}} \tag{4.6}$$

Ainsi, les **frottements augmentent la période d'oscillation** du pendule. Physiquement, les frottements diminuent la vitesse du pendule qui met donc plus de temps à revenir vers sa position initiale.

Dans le régime pseudo-périodique, il est d'usage d'introduire le décrément logarithmique pour caractériser la décroissance de l'amplitude au cours du temps. Le décrément logarithmique est défini par :

$$\boxed{\delta = \ln\left[\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right] = \kappa T} \tag{4.7}$$

Ainsi, $\frac{1}{\delta}$ représente le temps, en unité de période, au bout duquel l'amplitude de l'oscillateur a diminué du facteur e. Par exemple, une valeur de $\delta = 2$, signifie que l'amplitude de l'oscillateur a diminué de $e \simeq 2,7$ au bout de $\frac{T}{2}$.

4.4.2 Le régime apériodique : cas $\kappa > \omega_0$

Nous posons $\sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2} = \omega$ dans ce cas. La solution générale est une combinaison linéaire des deux solutions $e^{r_1 t}$ et $e^{r_2 t}$. Nous obtenons donc :

$$\theta(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \tag{4.8}$$
$$\theta(t) = e^{-\kappa t}(C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}) \tag{4.9}$$

avec $\omega = \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}$.

Les constantes C_1 et C_2 sont maintenant réelles. Nous pouvons réécrire les équations 4.9 sous la forme :

$$\begin{aligned}\theta(t) &= e^{-\kappa t}\left((C_1 + C_2)\cosh \omega t + (C_1 - C_2)\sinh \omega t\right)\\ &= e^{-\kappa t}(A\cosh \omega t + B \sinh \omega t)\end{aligned}$$

En utilisant $\cosh(A + B) = \cosh A \cosh B + \sinh A \sinh B$, la relation précédente peut se mettre sous la forme :

$$\theta(t) = Ce^{-\kappa t}\cosh(\omega t + \varphi) \tag{4.10}$$

☞ En physique, nous avons besoin de la définition suivante des fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique : $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Nous déduisons de ces définitions la relation $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ qui représente l'équation d'une hyperbole. Nous pouvons également montrer que $\cosh(A+B) = \cosh A \cosh B + \sinh A \sinh B$.

Les constantes C_1 et C_2 ou C et φ sont déterminées grâce aux conditions initiales. L'écriture 4.9 est souvent plus facile à utiliser pour tenir compte des conditions initiales.

Exemple

Déterminons par exemple les constantes C_1 et C_2 pour les conditions initiales $\theta(t = 0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t = 0) = 0$. Nous avons $C_2 = \frac{r_1\theta_0}{r_1 - r_2}$ et $C_1 = \frac{-r_2\theta_0}{r_1 - r_2}$.

La figure 4.1 montre un exemple de graphe de la fonction θ en fonction du temps. Un tel mouvement est un mouvement **apériodique**.

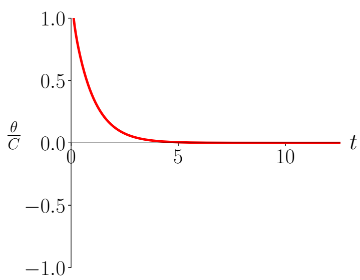

FIGURE 4.2: Graphe de $\theta(t)$ en fonction du temps dans le régime apériodique.

4.4.3 Le régime critique : cas $\kappa = \omega_0$

L'équation du mouvement devient $\ddot{\theta} + 2\kappa\dot{\theta} + \kappa^2\theta = 0$. Les fonctions $e^{-\kappa t}$ et $te^{-\kappa t}$ sont solutions de cette équation. La solution générale est une combinaison linéaire de ces deux solutions, soit :

$$\theta(t) = (A + Bt)e^{-\kappa t} \tag{4.11}$$

où les constantes A et B sont déterminées grâce aux conditions initiales. Ce régime est appelé le **régime critique**. C'est le régime entre le régime apériodique et pseudo-périodique.

Exemple

Déterminons par exemple les constantes A et B pour les conditions initiales $\theta(t = 0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t = 0) = 0$. Nous obtenons $A = \theta_0$ et $B = \theta_0\kappa$.

Il est particulièrement intéressant de tracer le graphe du régime critique comparativement au régime apériodique (figure 4.3). Nous constatons que le régime critique est le régime qui permet un retour à l'équilibre le plus rapide possible.

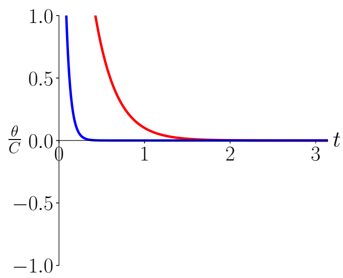

FIGURE 4.3: Exemple de graphe de $\theta(t)$ en fonction du temps dans le régime critique (en blue) et apériodique (en rouge).

4.4.4 Résumé

Régime	Condition	Solution
Pseudo-périodique	$\kappa < \omega_0$	$\theta(t) = Ce^{-\kappa t}(\cos\omega t + \varphi)$
Apériodique	$\kappa > \omega_0$	$\theta(t) = e^{-\kappa t}(C_1e^{\omega t} + C_2e^{-\omega t})$
Critique	$\kappa = \omega_0$	$\theta(t) = (A + Bt)e^{-\kappa t}$

TABLE 4.1 – Résumé des différents régimes du mouvement d'un oscillateur amorti.

Le saviez-vous ? Dans les systèmes mécaniques réelles (suspensions et amortisseurs), la valeur de κ est en général choisi pour que le système évolue dans ce régime, de telle sorte que le retour à l'équilibre après une perturbation soit le plus rapide possible et sans oscillation. Ainsi, un amortisseur de voiture en bon état possède une constante d'amortissement voisine de la valeur critique.

4.5 Le facteur de qualité

Nous allons introduire une quantité très importante dans la caractérisation d'un oscillateur : **le facteur de qualité.** C'est une grandeur sans dimension définie par :

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{2\kappa}} \tag{4.12}$$

Ainsi, nous pouvons exprimer la condition de passage d'un régime à l'autre en fonction de la valeur de qualité.

- $Q > \frac{1}{2}$: régime pseudo-périodique.
- $Q < \frac{1}{2}$: régime apériodique.
- $Q = \frac{1}{2}$: régime critique.

☞ L'équation différentielle du mouvement se réécrit alors :

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2 = 0$$

.

Nous allons maintenant établir une première interprétation physique du facteur de qualité. Pour ce faire, nous exprimons la pseudo-période en fonction du facteur de qualité :

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}} = T_0\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-1/2} \tag{4.13}$$

Dans le cas $Q >> 1$, nous trouvons $T \simeq T_0\left(1 + \frac{1}{8Q^2}\right)$. Ainsi l'écart relatif entre la période sans amortissement et avec amortissement a pour expression $\frac{\Delta T}{T_0} \simeq \frac{1}{8Q^2}$. Ainsi $\frac{\Delta T}{T} \simeq 8\,\%$ pour $Q = 4$.

☞ Par définition, l'écart relatif entre deux grandeurs est donné par $\frac{|\text{valeur th} - \text{valeur exp}|}{\text{valeur th}}$

Dans le cas du régime pseudo-périodique, le facteur de qualité est également lié au nombre d'oscillations que fait le pendule lors de sa diminution d'amplitude d'un facteur e. Soit A l'amplitude initiale. L'amplitude du pendule vaut alors $Ae^{-\kappa t}$ au bout d'une durée t et donc $\frac{A}{e}$ au bout d'une durée $\frac{1}{\kappa}$. Le nombre d'oscillations du pendule pendant cette durée est donnée par $N = \frac{t}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi\kappa} = \frac{Q}{\pi}$ soit :

$$Q = \pi N \tag{4.14}$$

Ainsi, **la valeur du facteur de qualité donne l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations avant le retour à l'équilibre de l'oscillateur**.

4.6 Aspect énergétique

Nous partons de l'équation de la dynamique $mL^2\ddot{\theta} + \gamma L^2\dot{\theta} + mgL\theta = 0$ que nous multiplions de part et d'autre par $\dot{\theta}$ pour obtenir :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgL\theta^2\right) = -\gamma L^2\dot{\theta}^2$$

soit :

$$\boxed{\frac{dE_M}{dt} = -\gamma L^2\dot{\theta}^2} \tag{4.15}$$

Notons que la terme de droite est négatif ce qui implique que l'énergie mécanique diminue au cours du temps. Nous retrouvons donc le lien entre la diminution de l'énergie mécanique au cours du temps et la puissance de la force de frottement. Nous pouvons également écrire de résultat sous la forme $dE_M = -\gamma L\dot{\theta}Ld\theta = -\gamma L\dot{\theta}ds$. Le terme de droite représente le travail de la force de frottement tandis que le terme de gauche représente la variation d'énergie mécanique.