

Exemple de mise en équation d'un oscillateur libre non amorti

Objectifs :

- déterminer l'équation du mouvement d'un bloc dans un système bloc-ressort non amorti.
- déterminer l'équation du mouvement d'un pendule simple et d'un pendule composé.
- déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution d'un circuit LC

Nous avons affirmé précédemment que le mouvement d'oscillation d'un système bloc-ressort et d'un pendule simple non amorti est un mouvement harmonique. Nous allons démontrer cette assertion dans ce chapitre à partir du principe fondamental de la dynamique et du théorème du moment cinétique.

3.1 Le système bloc-ressort

3.1.1 Équation du mouvement

Nous considérons un système bloc-ressort qui oscille à l'horizontal sans frottement. Le poids du bloc est alors compensé par la réaction du support et nous n'avons donc pas à prendre en compte le poids dans notre étude du système. Nous considérons un ressort "sans masse", de telle sorte que l'inertie du ressort est négligeable.

Nous considérons un bloc de centre M repéré par la variable $x(t)$ et de masse m accroché à un ressort. La position de la masse au repos est notée x_0 (voir figure 3.1). Cette position correspond à la longueur au repos du ressort étant donné que l'origine de l'axe Ox est choisi au niveau du point d'attache du ressort. Nous écartons **faiblement** le bloc de sa position d'équilibre puis nous le relâchons. Le bloc se met à osciller.

Nous appliquons le principe fondamental de la dynamique au système

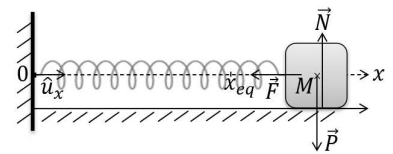


FIGURE 3.1: Notations utilisées dans la résolution du système bloc-ressort non amorti.

Point notation ! Attention, nous utilisons le même symbole x pour le nom de l'axe et pour la variable $x(t)$ qui repère la position du bloc. C'est un problème de notation habituelle en mécanique. Il permet de ne pas alourdir les notations.

{bloc} pour obtenir :

$$m \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = -k(x - x_0)\hat{u}_x + \vec{P} + \vec{N}$$

Nous projetons l'équation vectorielle précédente sur l'axe Ox en utilisant le fait que la fonction vectorielle $\overrightarrow{OM}(t)$ s'exprime en fonction du vecteur unitaire \hat{u}_x par $\overrightarrow{OM} = x(t)\hat{u}_x$ pour obtenir l'équation scalaire :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - x_0)$$

La grandeur d'intérêt dans ce problème est le déplacement $X(t) = x(t) - x_0$ du bloc par rapport à sa position initiale. Puisque x_0 est une constante, l'équation précédente se réécrit :

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -kX$$

Nous posons ensuite $\omega^2 = \frac{k}{m}$ pour obtenir :

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -\omega^2 X \tag{3.1}$$

L'équation 3.1 est une équation différentielle du **deuxième ordre sans second membre à coefficients constants**. Équation du deuxième ordre signifie que nous allons faire apparaître dans la solution deux constantes d'intégration que les conditions initiales (CI) vont fixer. Cette équation différentielle est **linéaire**, la combinaison linéaire des solutions de cette équation est donc également une solution de l'équation différentielle. La solution est donc la combinaison linéaire des solutions $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$ soit :

$$X(t) = C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t) \tag{3.2}$$

qui peut se mettre sous la forme équivalente :

$$X(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \tag{3.3}$$

Les constantes C , D ou A et φ sont déterminées par les CIs. Nous avons ainsi montré que le système bloc-ressort non amorti est un oscillateur harmonique de fréquence angulaire $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. La période d'oscillation du bloc a donc pour expression :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \tag{3.4}$$

3.1.2 Aspect énergétique

Le système bloc-ressort non amorti n'est soumis à aucune force non conservative, le théorème de l'énergie mécanique implique que **l'énergie mécanique du système bloc-ressort est une constante du mouvement**. Autrement dit :

$$\frac{1}{2}m \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}kX^2 = cst \tag{3.5}$$

☞ La variable d'intérêt dans un système bloc-ressort est le déplacement par rapport à la position d'équilibre initiale du bloc.

☞ Un système oscillant dont l'équation de la dynamique est de la même nature que l'équation 3.1 est un **oscillateur harmonique**.

☞ Le résultat obtenu amène à faire plusieurs commentaires :

1. La pulsation ne dépend pas des conditions initiales. La fréquence d'oscillation du système est donc une grandeur intrinsèque au système.
2. La pulsation ne dépend pas de l'amplitude.
3. Il y a compétition entre l'inertie qui conserve la vitesse et la force de rappel qui ramène à l'équilibre. La pulsation se met sous la forme générique $\omega^2 = \frac{\text{force de rappel}}{\text{inertie}}$.

☞ L'énergie potentielle élastique du ressort a pour expression $E_P = \frac{1}{2}kX^2$.

La dérivée de l'équation précédente par rapport au temps nous redonne l'équation différentielle du mouvement $\frac{d^2X}{dt^2} = -\omega^2 X(t)$ avec $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

L'équation 3.5 qui traduit la conservation de l'énergie mécanique peut se retrouver à partir de l'équation différentielle de la dynamique du mouvement par la méthode suivante. Nous multiplions l'équation $m\frac{d^2X}{dt^2} = -kX$ de part et d'autre par $\frac{dX}{dt}$ pour obtenir $m\frac{d^2X}{dt^2}\frac{dX}{dt} = -k\frac{dX}{dt}X$ qui peut se réécrire :

$$m\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + k\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(X^2) = 0$$

soit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kX^2\right) = 0$$

d'où $\frac{1}{2}m\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kX^2 = cst$. Nous obtenons ainsi **une constante du mouvement qui représente l'énergie mécanique**.

3.2 Le pendule simple

Nous considérons dans cette section un corps de masse m fixé au bout d'une liaison de masse négligeable.

3.2.1 Utilisation du théorème du moment cinétique

Nous choisissons comme système le corps de masse m repéré par le point M . Nous notons θ l'angle que fait le pendule avec la verticale. Le repère le plus adapté à ce mouvement est un repère polaire 3.2. Nous choisissons O comme point fixe. **Nous négligeons les forces de frottements au niveau du point d'attache : la tension dans le fil est donc dirigée suivant $-\hat{u}_r$** . Nous négligeons également les forces de frottements aérodynamiques sur le corps. Les seules forces qui s'exercent sur la masse sont donc la tension du fil ainsi que son poids.

Le moment du poids calculé au point O a pour expression :

$$\vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P} = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P \cos \theta \\ -P \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = -lP \sin \theta \hat{u}_z$$

Le moment de la tension du fil calculé au point O est nul étant donné que la tension du fil est colinéaire au vecteur \vec{OM} dans le cas où les frottements sont négligés. Le moment cinétique de l'objet de masse m calculé au point O a pour expression :

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ ml\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = ml^2\dot{\theta}\hat{u}_z$$

Le théorème du moment cinétique appliqué au point O s'écrit $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{P})$ d'où :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta \tag{3.6}$$

L'équation 3.6 est une équation non linéaire. Nous allons poursuivre notre étude en nous limitant aux oscillations de faible amplitude tel que $\theta \ll 1$. Plus précisément, nous allons nous limiter au développement de

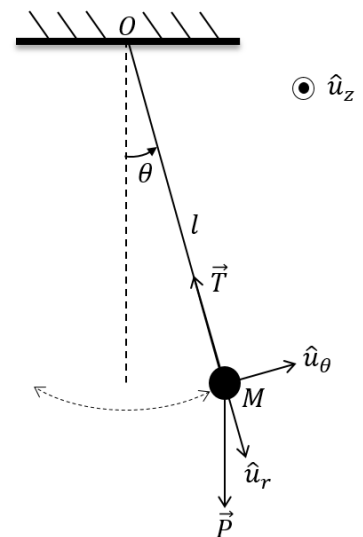


FIGURE 3.2: Un pendule simple de longueur l et de masse m .

Le vecteur d'un point en coordonnées polaires a pour expression $\vec{OM} = r\hat{u}_r$. La direction des vecteurs de bases varie au cours du temps, la vitesse d'un point en coordonnées polaires a donc pour expression $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r}\hat{u}_r + r\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta$. Le vecteur accélération a pour expression $\vec{a} = \ddot{r}\hat{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{u}_r$.

$\sin \theta$ à l'ordre 1 en θ . Dans ce cas, nous avons $\sin \theta = \theta$. Cela revient donc à négliger le terme en $\frac{\theta^3}{3!}$ devant θ . Ainsi, nous ne faisons pas une trop grosse erreur tant que les angles sont faibles. Pour $\theta = 0,3 \text{ rad}$, cette approximation conduit à une erreur $\frac{\Delta \omega}{\omega}$ de 10^{-2} dans le calcul de la pulsation. Nous obtenons dans ce cadre, l'équation :

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta \quad (3.7)$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique dont la solution a pour expression :

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.8)$$

où, de manière équivalente :

$$\theta(t) = C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)$$

avec $\omega^2 = \frac{g}{l}$. Les constantes C , D ou A et φ sont déterminés par les CIs.

Exemple

Supposons que les conditions initiales soient telles que $\theta(t = 0) = \theta_0 > 0$ et $\dot{\theta}(t = 0) = 0$. Nous obtenons dans ce cas $C = \theta_0$ et $D = 0$ d'où $\theta = \theta_0 \cos(\omega t)$. Supposons maintenant que les conditions initiales soient telle que $\theta(t = 0) = 0$ et $\dot{\theta}(t = 0) = \dot{\theta}_0 > 0$. Nous obtenons $A \cos(\varphi) = 0$ et $A \sin(\varphi) = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega} < 0$. Nous choisissons $\theta = -\frac{\pi}{2}$ pour obtenir $\theta = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$.

La période d'oscillation du pendule dans le cadre des approximations explicitées précédemment a donc pour expression :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (3.9)$$

Remarquons que la période ne dépend pas de la masse mais augmente avec la longueur du pendule. La période d'oscillation du pendule dans l'approximation des petits angles est également indépendante de **l'amplitude**, les oscillations du pendule aux petits angles sont dites **isochrones**.

3.2.2 Utilisation du principe fondamental de la dynamique

Nous établissons dans cette partie l'équation de la dynamique du pendule simple à l'aide du **principe fondamental de la dynamique dans le cas des petits angles et en négligeant toutes les formes de frottements**. L'approximation des petits angles consiste à s'arrêter à l'ordre 1 en θ dans le développement de la fonction $\sin \theta$. Le principe fondamental appliqué à la masse m a pour expression $m \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = \vec{P} + \vec{T}$. Utilisons maintenant un repère cartésien pour repérer les points dans l'espace. Nous prenons un axe Oy orienté positivement vers le haut et un axe Ox orienté positivement vers la droite (figure 3.3). L'origine du repère coïncide avec la position de la masse m au repos. La projection du principe fondamental de la dynamique suivant les axes Ox et Oy produit les deux équations scalaires :

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -P + T \cos \theta$$

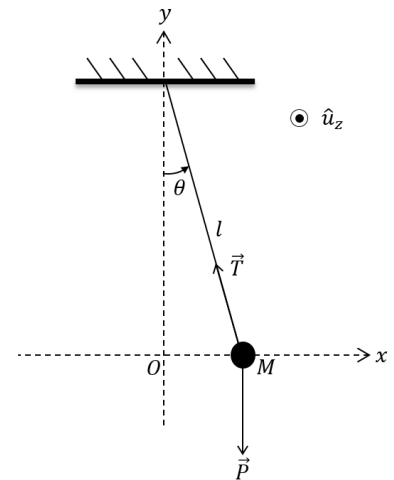


FIGURE 3.3: Un pendule simple de longueur l et de masse m .

☞ Nous avons vu que la période d'oscillation du pendule ne dépend pas de la masse. De manière générale, les grandeurs physiques mesurables ne dépendent pas de la masse lorsque la seule force qui intervient dans la dynamique du système est le poids. cette propriété découle du principe d'équivalence.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -T \sin \theta$$

Pour être cohérent, nous devons donc arrêter le développement de la fonction $\cos \theta$ à l'ordre 1 en θ dans le cadre de l'approximation des petits angles. Nous avons donc $\cos \theta = 1$ aux petits angles. Or $\cos \theta = \frac{\text{coté adjacent}}{\text{hypothénuse}}$, ainsi l'approximation des petits angles revient à considérer que le mouvement du pendule est contenu dans un plan. L'approximation des petits angles se traduit donc dans le repère cartésien que nous utilisons par une oscillation de l'objet de masse m en restant suivant l'axe Ox (figure 3.3), ce qui implique $\sin \theta = \frac{x}{l}$ et $\frac{dy}{dt} = 0$. Nous obtenons dans le cadre de l'approximation des petits angles :

$$-P + T = 0 \tag{3.10}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{T}{l} x \tag{3.11}$$

L'équation 3.10 montre que **l'intensité de la tension dans le fil est égale à l'intensité du poids aux petits angles**. La combinaison des deux équations précédentes conduit à l'équation différentielle que nous avons obtenus précédemment :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{g}{l} x \tag{3.12}$$

3.2.3 Aspect énergétique

Puisque nous négligeons les frottements et que nous considérons un corps indéformable, l'énergie mécanique $E_M = E_C + E_P$ de la masse se conserve au cours du mouvement. Comme pour le système bloc-ressort, nous allons montrer que cette propriété nous permet de retrouver l'équation du mouvement du pendule. Commençons par déterminer les expressions de E_C et E_P . Nous choisissons le point le plus bas du pendule comme référence pour l'énergie potentielle. Nous obtenons ainsi :

$$E_P = mg(l - l \cos \theta) \tag{3.13}$$

L'énergie cinétique $E_C = \frac{1}{2}mv^2$ a pour expression en coordonnées polaires :

$$E_C = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \tag{3.14}$$

La conservation de l'énergie mécanique s'écrit donc :

$$E_M = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta) = Cst$$

Nous allons montrer que nous obtenons l'équation du mouvement du pendule à partir l'équation de conservation de l'énergie. Dérivons l'équation 3.2.3 pour obtenir :

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta)\dot{\theta} = 0$$

soit :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$$

Nous retrouvons bien l'équation 3.6 qui devient, dans le cas des petits angles :

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta$$

Notons que dans l'approximation des petits angles, l'énergie potentielle de pesanteur $E_P = mg(l - l \cos \theta)$ devient à l'ordre 2 $E_P = \frac{1}{2}mgl\theta^2$.

☞ L'approximation qui consiste à considérer que le mouvement de la masse est purement horizontal aux petits angles est une approximation trop forte d'un point de vue énergétique car dans ce cas l'énergie potentielle de pesanteur ne varie pas au cours du temps.

3.3 Pendule composé

3.3.1 Utilisation du théorème scalaire du moment cinétique

Nous considérons un pendule composé en rotation autour d'un axe fixe. Nous nommons Δ cet axe fixe et I_Δ le moment d'inertie de ce pendule par rapport à l'axe Δ (figure 3.4). Le poids est la seule force à prendre en compte dans la dynamique d'un pendule composé sans frottement. Le point d'application du poids est le centre de gravité du solide. Soit l la distance qui sépare le centre de gravité de l'axe de rotation. Le moment du poids à pour expression $\vec{M}_{\vec{P},O} = -Pl \sin \theta \hat{u}_z$ où \hat{u}_z est le vecteur unitaire porté par Δ . Le théorème scalaire du moment cinétique s'écrit :

$$I_\Delta \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -Pl \sin \theta \quad (3.15)$$

qui devient, dans le cas des petits angles :

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{Pl}{I_\Delta} \theta \quad (3.16)$$

Nous retrouvons l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de fréquence angulaire $\omega = \sqrt{\frac{Mgl}{I_\Delta}}$. La période de l'oscillation du pendule composé a donc pour expression :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{Mgl}} \quad (3.17)$$

Notons que le moment d'inertie contient la masse du pendule composé. La période d'oscillation ne dépend donc pas de la masse du solide mais dépend de la **répartition de la masse** dans le solide.

3.3.2 Aspect énergétique

Pour obtenir l'expression de l'énergie mécanique du système, nous multiplions l'équation 3.15 par $\dot{\theta}$ pour obtenir :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I_\Delta \dot{\theta}^2 - Pl \cos \theta \right) = 0$$

Ainsi, le terme $\frac{1}{2} I_\Delta \dot{\theta}^2$ s'interprète comme étant **l'énergie cinétique du pendule composé** et le terme $-Pl \cos \theta$ comme le terme d'énergie potentielle du pendule composé. Une énergie potentielle est toujours définie à une constante près, si nous choisissons le point le plus bas du pendule comme référence pour l'énergie potentielle, nous obtenons alors l'expression $E_P = Mgl(1 - \cos \theta)$ obtenue dans le cas du pendule simple. Nous obtenons donc dans ce cas :

$$E_M = \frac{1}{2} I_\Delta \dot{\theta}^2 + Mgl(1 - \cos \theta) \quad (3.18)$$

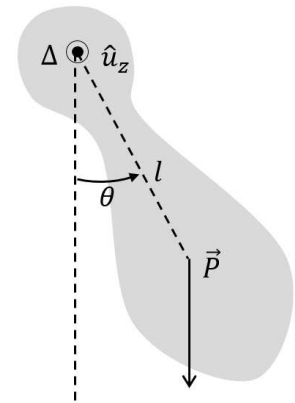


FIGURE 3.4: Exemple de pendule composé.

3.4 Circuit LC

3.4.1 Mise en équation

La figure 3.5 montre le schéma électrique d'un circuit LC. Ce circuit est constitué d'un condensateur initialement chargé avec une charge q_0 en série avec une inductance. L'interrupteur K est fermé à $t = 0$, le condensateur se décharge et un courant circule dans le circuit. La loi des mailles appliqué au circuit a pour expression $u_c + u_L = 0$ avec $u_l = L \frac{di}{dt}$ et $u_c = \frac{q}{C}$ en convention récepteur. Le courant électrique dans le circuit est donc solution de l'équation différentielle $L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C}i = 0$ soit :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{LC}i = 0 \quad (3.19)$$

Nous retrouvons l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de fréquence angulaire $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$. La période de l'oscillation du courant dans le circuit a donc pour expression :

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \quad (3.20)$$

3.4.2 Aspect énergétique

Multiplions l'équation différentielle $L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$ par $i = \frac{dq}{dt}$ pour obtenir $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \right) = 0$. Le terme $\frac{1}{2}Li^2$ représente **l'énergie emmagasinée par le champ magnétique de l'inductance** tandis que le terme $\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}Cu_C^2$ représente **l'énergie emmagasiné dans le champ électrique** du condensateur. Il y a donc oscillation entre ces deux formes d'énergie dans le circuit.

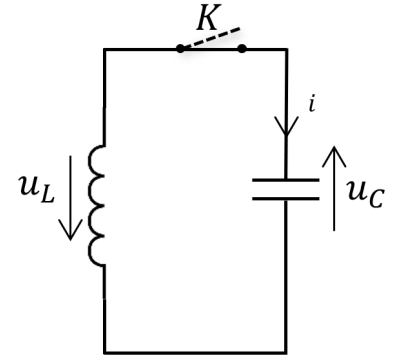


FIGURE 3.5: Schéma électrique d'un circuit LC.