CHAPITRE 2

Description du mouvement harmonique

Objectifs :

- étudier un mouvement harmonique.

Nous allons commencer l'étude des oscillations par le mouvement d'oscillation le plus simple : **le mouvement d'oscillation harmonique**. Dans ce cas, l'oscillation d'un corps au cours du temps est simplement décrite par **une fonction sinusoïdale**.

2.1 L'équation horaire d'un mouvement d'oscillation harmonique

Considérons par exemple un système bloc-ressort non amorti qui oscille horizontalement (figure 2.1). Un système bloc-ressort non amorti est un système bloc ressort pour lequel les frottements sont négligeables.

Nous nommons x la position du bloc au cours du temps par rapport à l'origine et $X = x - x_0$ la position du bloc par rapport à sa position d'équilibre (voir figure 2.1), la variable X correspond donc à **l'élongation** du ressort par rapport à sa position au repos.

- Le mouvement d'oscillation du bloc est un mouvement **d'oscillation harmonique** dans le cas où le mouvement d'oscillation du bloc est décrit par la fonction :

$$\boxed{X(t) = A\sin(\omega t + \varphi)} \tag{2.1}$$

- Le système bloc-ressort constitue alors un **oscillateur harmonique**.

Une valeur différente de φ permet de passer à une fonction cosinus qui décrit donc également un mouvement harmonique. Autrement dit, un mou-

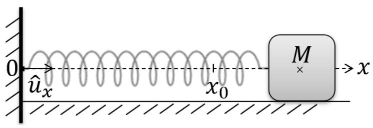


FIGURE 2.1: Schéma et notations utilisées pour l'étude d'un système bloc-ressort. Un système bloc-ressort non amorti peut-être réalisé expérimentalement à l'aide d'un banc à coussin d'air. C'est un banc triangulaire sur lequel glisse un solide accroché par un ressort à une extrémité du banc. Des buses régulièrement réparties dans le banc éjectent de l'air qui permet de diminuer les frottements du bloc sur le banc.

vement harmonique est également décrit par la fonction :

$$\boxed{X(t) = B\cos(\omega t + \phi)} \tag{2.2}$$

Les formules trigonométriques d'addition montre qu'un mouvement harmonique peut également être décrit par la relation :

$$\boxed{X(t) = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)} \tag{2.3}$$

☞ Montrez que $C = A\sin\varphi$ et $D = A\cos\varphi$.

Nous avons introduit plusieurs grandeurs dans la formule 2.1 que nous allons détailler dans la suite. Précisons avant tout le vocabulaire que nous allons utiliser :

- **A est l'amplitude**. L'amplitude du mouvement s'exprime dans la même unité que la variable décrivant le mouvement. Dans le cas du système bloc-ressort, l'amplitude s'exprime en mètre.
- **$\omega t + \varphi$ est la phase.** C'est l'argument de la fonction sinus ou cosinus.
- **ω est la fréquence angulaire.** La fréquence angulaire ou pulsation du mouvement s'exprime en radians par seconde ($\mathrm{rad\,s^{-1}}$).
- **φ est la phase à l'origine.** La phase à l'origine s'exprime en radians. Ce terme est souvent appelé phase par abus de langage. La valeur de la phase à l'origine permet de prendre en compte le fait que la position du bloc n'est pas forcement $x = 0$ à $t = 0$.

La figure 2.2 montre le graphe de la fonction 2.1 avec une amplitude de $A = 3\,\mathrm{cm}$, une fréquence angulaire $\omega = 2\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ et une phase à l'origine $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

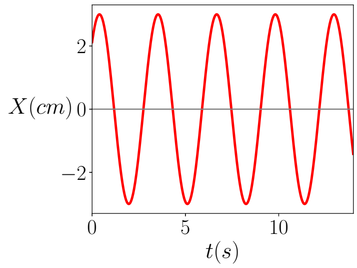


FIGURE 2.2: Graphe de la fonction sinusoïdale décrivant le mouvement harmonique d'un système bloc-ressort d'une amplitude de $3\,\mathrm{cm}$ avec une fréquence angulaire $\omega = 2\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ et une phase à l'origine $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

2.2 L'amplitude et la fréquence

Nous considérons pour l'instant un système bloc-ressort dont la position du bloc par rapport au repos est décrit par :

$$X(t) = A\sin(\omega t)$$

Cela revient à considérer que la phase à l'origine est nulle dans l'équation 2.1.

La figure 2.3 montre le mouvement d'oscillation sinusoïdale du bloc au cours du temps. Nous constatons que les positions extrêmes du bloc sont $x = A$ et $x = -A$. On donne le nom d'amplitude au paramètre A. L'amplitude est donc la distance qui sépare les positions extrêmes de la position centrale.

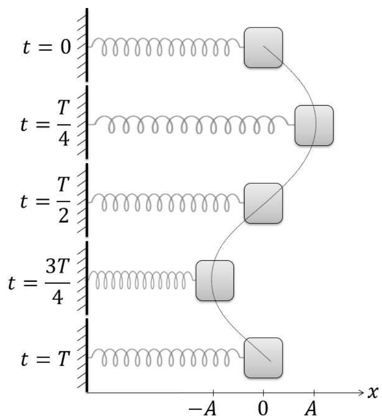


FIGURE 2.3: Oscillation d'un système bloc ressort au cours du temps.

Nous constatons également que le bloc revient dans le même état au bout d'un temps T nommé **la période** de symbole T. L'inverse de la période se nomme **la fréquence** qui est donc définie par :

$$\boxed{f = \frac{1}{T}} \tag{2.4}$$

La fréquence s'exprime en hertz (Hz) et représente **le nombre d'oscillations par seconde**. Nous verrons dans un prochain chapitre que dans le cas d'un système bloc-ressort, la fréquence augmente avec la raideur du ressort et diminue avec l'augmentation de la masse du bloc.

☞ L'unité hertz (Hz) sert à mesurer tous les phénomènes oscillants quels que soient leur nature. Une onde est une oscillation d'une quantité physique qui se propage de proche en proche. Le nombre d'oscillations par seconde d'une onde est donc mesuré en hertz (Hz).

2.3 La fréquence angulaire

Il existe une relation simple entre la fréquence angulaire et la fréquence. Remarquons pour commencer que l'argument d'une fonction sinus est nécessairement un angle en radian. Ainsi, la grandeur ωt doit avoir la dimension d'un angle en radians ce qui implique que la **fréquence angulaire ω s'exprime en $\mathrm{rad\,s^{-1}}$.**

La figure 2.4 montre le graphe de la fonction de $X = A\sin(\omega t)$, le bloc revient dans le même état lorsque l'argument du cosinus a augmenté de 2π, il s'est alors écoulé le temps T.

- Nous avons alors $\sin(\omega T) = 1$ et la fréquence angulaire a donc pour définition :

$$\boxed{\omega = 2\pi \frac{1}{T} = 2\pi f} \tag{2.5}$$

La figure 2.5 montre une autre façon de comprendre l'apparition du 2π. Cette figure montre en effet qu'un mouvement d'oscillation sinusoïdale à la fréquence angulaire ω correspond à la projection le long d'un axe d'un mouvement circulaire uniforme dont la vitesse angulaire est ω. Nous avons vu que le bloc revient à sa position d'origine pour $t = T$. Sur le cercle trigonométrique, l'angle $\theta = \omega t$ a alors "parcouru" un tour complet (voir figure 2.5) et vaut donc 2π. Nous avons alors $\omega = 2\pi\frac{1}{T} = 2\pi f$.

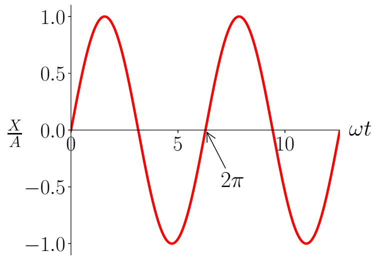


FIGURE 2.4: Période d'un mouvement harmonique.

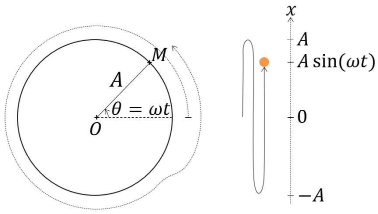
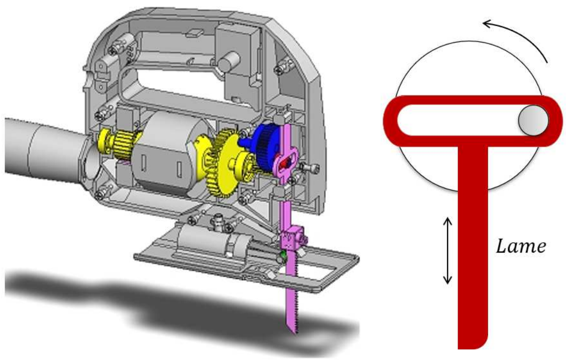


FIGURE 2.5: Correspondance entre un mouvement d'oscillation sinusoïdale et un mouvement circulaire uniforme.

Exemple

Le moteur d'une scie-sauteuse créé un mouvement de rotation qui est transformé en mouvement d'oscillation harmonique de la lame grâce au mécanisme détaillé sur la figure ci-dessous. Ainsi, pour un moteur qui tourne à une vitesse de 2000 tours/min, la fréquence angulaire du mouvement d'oscillation harmonique de la lame est de $209\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ et la période d'oscillation de la lame est donc de $30\,\mathrm{ms}$.



Le saviez-vous ? Le système bielle-manivelle permet de transformer un mouvement de translation en un mouvement de rotation. Ce système est très employé puisqu'il est utilisé dans tous les moteurs thermiques ! Il permet de transformer le mouvement de translation des pistons en un mouvement de rotation du vilebrequin. Cependant, le mouvement de translation obtenue n'est pas sinusoïdale puisque la position de la bielle au cours du temps n'est pas donnée par une équation du genre $x = A\sin(\omega t + \varphi)$.

2.4 La vitesse et l'accélération d'un mouvement harmonique

L'expression de la vitesse est donnée par $v_X(t) = \frac{dX}{dt}$ d'où :

$$\boxed{v_X(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi)} \tag{2.6}$$

☞ Une valeur négative de v_X signifie que le bloc va dans le sens inverse de l'orientation de l'axe Ox.

L'expression de l'accélération est donnée par $a_X(t) = \frac{dv_X}{dt}$, d'où :

$$\boxed{a_X(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)} \tag{2.7}$$

Puisque les valeurs que renvoient les fonctions cosinus et sinus sont comprises entre -1 et 1, la valeur maximale de la vitesse que peut atteindre le bloc a pour expression $v_{X,max} = A\omega$. Le bloc atteint sa vitesse maximale **à chaque passage de la position $x = 0$**.

La valeur maximale de l'accélération que peut atteindre le bloc a donc pour expression $a_{X,max} = A\omega^2$. Le bloc atteint son accélération maximale à chaque passage par les positions extrêmes. C'est en effet aux extrémités que la variation de la vitesse est la plus forte puisque le vecteur vitesse change de direction. La figure 2.6 montre le tracé des vecteurs vitesses et accélération sur une demi-période.

☞ L'intensité de la force subit par le bloc est reliée à l'intensité de son accélération par $F = ma$. Le ressort exerce donc une force maximale sur le bloc aux extrémités, ce qui correspond à une élongation maximale du ressort à ces positions.

Remarquons pour finir que la comparaison des équations 2.1 et 2.7 montre que :

$$\boxed{a_X = -\omega^2 X} \tag{2.8}$$

Cette relation est caractéristique d'un mouvement harmonique.

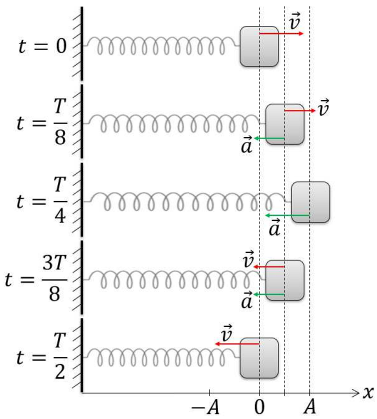


FIGURE 2.6: Vecteurs vitesses et accélérations du bloc au cours du temps.

2.5 La phase à l'origine

Reprenons le cas où la position du bloc est donnée par $X(t) = A\sin(\omega t)$. Ainsi à $t = 0$, la position du bloc est à la position centrale $X = 0$. Évidement, une autre position initiale du bloc est possible expérimentalement et nous devons donc introduire **une phase à l'origine dans la phase pour pouvoir décrire tous les cas de figures possibles**. Nous donc obtenons dans ce cas :

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

La position du bloc par rapport à la position centrale à $t = 0$ a alors pour expression $A\sin(\varphi)$:

- Il est donc possible de **décrire une oscillation qui commence à n'importe quelle position en ajustant la valeur de la phase à l'origine**.
- Attention, il y a cependant une subtilité car plusieurs valeurs de φ conduisent à la même valeur de $\sin\varphi$. Nous allons donc devoir choisir une valeur particulière parmi toutes les valeurs possibles. Il faut tenir compte du signe de la vitesse initiale pour déterminer la bonne valeur de φ que nous allons choisir en général dans l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Exemple

Considérons par exemple un bloc qui oscille avec un mouvement harmonique donnée par $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ et dont la position à l'origine vaut $\frac{A}{2}$. La phase à l'origine est alors donnée par l'équation $\sin(\varphi) = \frac{1}{2}$ soit $\varphi = \arcsin(\frac{1}{2})$. Nous cherchons la valeur de φ comprise dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. Il y a deux valeurs possibles : $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.
La vitesse initiale du bloc a pour expression $v_x(t = 0) = v_{x,0} = A\omega\cos(\varphi)$. Ainsi, une valeur positive de $v_{x,0}$ impose de garder la valeur $\frac{\pi}{6}$ tandis qu'une valeur négative de $v_{x,0}$ impose de garder la valeur $\frac{5\pi}{6}$.

2.6 Description d'un mouvement d'oscillation autour d'un axe fixe

Nous allons utiliser un angle θ pour étudier un mouvement d'oscillation autour d'un axe fixe, comme le mouvement d'oscillation d'un pendule de longueur L (figure 2.7).

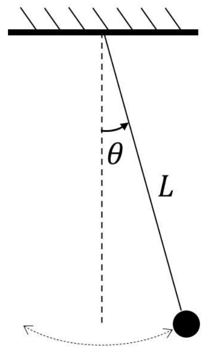


FIGURE 2.7: Pendule simple de longueur L.

- Dans ce cas, un mouvement d'oscillation harmonique est décrit par l'équation :

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)} \tag{2.9}$$

- La vitesse angulaire d'un mouvement d'oscillation autour d'un axe fixe a donc pour expression $\dot{\theta} = -\theta_0 \omega \sin(\omega t + \varphi)$.
- Attention, la fréquence angulaire et la vitesse angulaire sont représentées par le même symbole mais ne représentent pas la même quantité. **La vitesse angulaire est une fonction du temps, la fréquence angulaire est une valeur constante reliée à la période d'oscillation du mouvement**.

En coordonnées polaires, la vitesse orbitale du pendule a pour expression :

$$\vec{v} = L\dot{\theta}\hat{u}_\theta$$

☞ Nous rappelons que $\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\hat{u}_\theta$ et $\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\hat{u}_r$.

où L est la distance à l'axe. L'accélération du pendule a pour expression :

$$\vec{a} = -L\dot{\theta}^2\hat{v}_r + L\ddot{\theta}\hat{u}_\theta$$

La composante $-L\dot{\theta}^2$ représente l'accélération centripète tandis que la composante $L\ddot{\theta}$ représente l'accélération orbitale du pendule.

☞ La présence du carré dans l'expression de la composante centripète de l'accélération montre que la période de la composante centripète est de $T/2$. En effet, l'accélération centripète est maximale à chaque fois que le pendule passe par la verticale.