CHAPITRE 5

Nombres complexes et trigonométrie

Objectifs :

- savoir effectuer les opérations de bases sur les nombres complexes.
- savoir utiliser la représentation polaire des nombres complexes et la formule d'Euler.
- connaître les relations trigonométriques.

5.1 Introduction

Les nombres complexes ont un double statut en physique :

- ils servent d'intermédiaire pour simplifier certains calculs ou pour effectuer certaines transformations sur les grandeurs physiques. Nous les utiliserons notamment pour étudier la résonance ou pour effectuer des transformées de Fourier.
- ils sont indispensables pour décrire le monde qui nous entoure dans les théories quantiques.

Nous allons donc rappeler les principales notions sur les nombres complexes.

5.2 Les nombres complexes

5.2.1 Définition et arithmétique

- Un **nombre complexe** z est un nombre de la forme :

$$\boxed{z = x + iy} \tag{5.1}$$

où $i^2 = -1$ est un nombre qualifié d'imaginaire et x et y sont des nombres réels. L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$. x est la partie réelle de z notée $\mathrm{Re}(z)$ et y est la partie imaginaire de z notée $\mathrm{Im}(z)$.

- Nous pouvons effectuer les opérations arithmétiques usuelles sur les nombres complexes.
- Les nombres complexes nous permettent d'introduire une nouvelle opération, **la conjugaison** définie par $\overline{x+iy} = x - iy$. Nous en déduisons que $\overline{z}z = (x-iy)(x+iy) = x^2 + y^2$.
- La quantité $|z|$ est **le module** du nombre complexe définie par $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$.
- La division d'un nombre complexe est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1}{z_2}\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} \\ &= \frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}\frac{a_2-ib_2}{a_2-ib_2} \\ &= \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + i\frac{b_1a_2-b_2a_1}{a_2^2+b_2^2} \end{aligned}$$

Nous en déduisons que le conjugué du rapport d'un nombre complexe est égale au rapport des conjugués soit :

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \tag{5.2}$$

- La partie réelle d'un nombre complexe est donnée par $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$ et la partie imaginaire d'un nombre complexe est donnée par $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\overline{z})$.

5.2.2 Le plan complexe

- Nous pouvons représenter un nombre complexe par un point M dans un plan d'origine O dont les axes sont $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$. Ce plan est nommé **le plan complexe**. Nous pouvons donc représenter un nombre complexe $z = x + iy$ dans le plan complexe comme **un vecteur** $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Le module $|z| = r$ de ce nombre complexe est égale à la norme du vecteur associé et vaut d'après le théorème de Pythagore $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

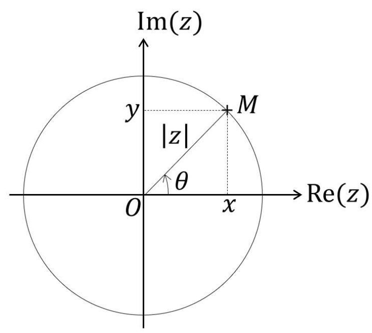


FIGURE 5.1: Représentation polaire d'un nombre complexe.

Exemple

La figure 5.2 montre la position de quelques nombres complexes dans le plan complexe. Le module du nombre complexe $z = 1 + i$ vaut $\sqrt{2}$ par exemple.
Les vecteurs associés au nombres complexes i et $z = 1 + i$ ont pour composantes, respectivement, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur associé au nombre complexe $z = 1 + 2i$ a donc pour composantes $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

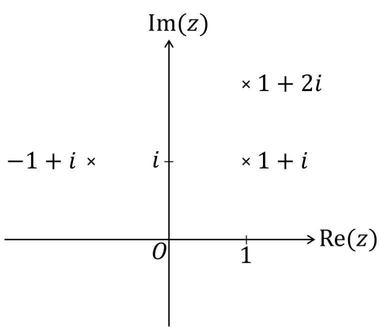


FIGURE 5.2 – Position de quelques nombres complexes dans le plan complexe.

La représentation des nombres complexes dans le plan complexe permet de déduire une propriété importante : **l'inégalité triangulaire**. Dans un triangle, la somme des longueurs de deux côtés est toujours supérieure ou égale à la longueur du troisième côté. Puisque nous pouvons associer un vecteur à un nombre complexe dans le plan complexe, l'addition de deux nombres complexes correspond à l'addition de deux vecteurs dans ce plan (figure 5.3). Étant donné que la longueur d'un vecteur est donné par sa norme, nous avons donc :

$$|z_1| + |z_2| \geqslant |z_1 + z_2| \tag{5.3}$$

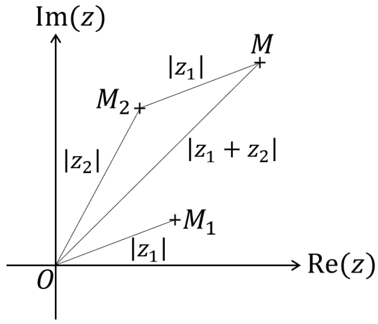


FIGURE 5.3: Démonstration de l'inégalité triangulaire.

5.2.3 La formule d'Euler

- La formule d'Euler a pour expression :

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta} \tag{5.4}$$

  Nous en déduisons immédiatement les deux relations suivantes :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

- Le passage de la fonction exponentielle à la fonction exponentielle complexe se fait naturellement et l'exponentielle complexe a les mêmes propriétés que la fonction exponentielle.

☞ Il est par contre beaucoup moins évident de définir la fonction logarithme complexe.

5.2.4 Écriture polaire d'un nombre complexe

- En utilisant l'angle θ défini sur la figure 5.1, nous pouvons réécrire z sous la forme $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ soit $z = re^{i\theta}$ avec $|z| = r$. L'angle θ est **l'argument** du nombre complexe.
- L'argument d'un nombre complexe n'est pas unique. Il est toujours possible d'ajouter 2π à θ sans changer la position d'un point dans le plan complexe. Nous notons donc $\text{Arg}(z) = \theta \bmod 2\pi$.

Exemple

Le nombre complexe $z = 1 + i$ a pour module $\sqrt{2}$ et pour argument $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + 2\pi, \ldots$.

5.2.5 Représentation matricielle d'un nombre complexe

Un nombre complexe z peut s'écrire sous la forme d'une matrice Z en posant :

$$Z = \begin{pmatrix} \text{Re}(z) & -\text{Im}(z) \\ \text{Im}(z) & \text{Re}(z) \end{pmatrix}$$

Nous pouvons vérifier que cette représentation est compatible avec les opérations arithmétiques sur les nombres complexes. En effet, soient deux nombres complexes $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$, nous avons alors :

$$Z_1 + Z_2 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix} = Z_3$$

où Z_3 est bien la représentation matricielle du nombre complexe $z_3 = z_1 + z_2 = a + c + i(b + d)$. De même la multiplication de deux nombres complexes s'écrit en représentation matricielle :

$$\begin{aligned} Z_1 Z_2 &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ bc+ad & ac-bd \end{pmatrix} = Z_4 \end{aligned}$$

où Z_4 est bien la représentation matricielle du nombre complexe $z_4 = z_1 z_2 = ac - bd + i(bc + ad)$.

Exemple

La représentation matricielle du nombre complexe $z = 1 + i$ a pour expression $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La forme polaire d'un nombre complexe $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ a pour représentation matricielle :

$$Z = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Nous avons vu que le module r d'un nombre complexe représente la distance à l'origine et θ l'angle par rapport à l'axe horizontal. La matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ dans la représentation matricielle de la forme polaire d'un nombre complexe peut donc s'interpréter comme **la matrice de rotation à 2D** d'un angle θ d'un vecteur de norme r.

5.3 Trigonométrie

5.3.1 Définition d'un angle

Un angle mesure "l'ouverture" entre deux lignes qui partent d'un même point. La figure 5.4 montre l'angle entre deux lignes qui partent du point 0. Afin, d'obtenir une grandeur sans dimension, nous définissons l'angle comme le rapport entre la longueur de l'arc de cercle l et le rayon r du cercle :

$$\boxed{\theta = \frac{l}{r}} \tag{5.5}$$

où la valeur de l'angle obtenu est un angle en radians.

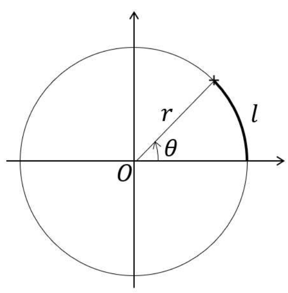


FIGURE 5.4: Définition d'un angle en radians.

5.3.2 Fonctions sinus et cosinus

La figure 5.5 montre un triangle rectangle défini à partir de l'angle θ et du rayon R d'un cercle. Le sinus et le cosinus de l'angle θ sont définis à partir de cette figure :

$$\cos\theta = \frac{\text{coté adjacent}}{\text{R}}$$
$$\sin\theta = \frac{\text{coté opposé}}{\text{R}}$$

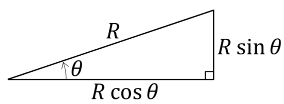
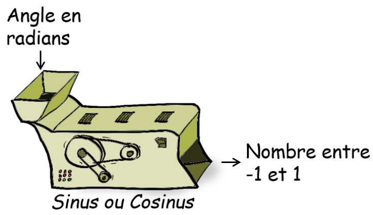


FIGURE 5.5: Définition du sinus et du cosinus de l'angle θ.

Les fonctions sinus et cosinus sont donc des **objets mathématiques qui acceptent un angle en radians en entrée et qui renvoient un nombre entre -1 et 1**.



Le théorème de Pythagore appliqué au triangle de la figure 5.5 nous permet de déduire la très importante relation :

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

5.3.3 Cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est un **cercle de rayon 1 centré sur l'origine d'un repère orthonormé**. La figure 5.6 montre comment lire le sinus d'un angle et le cosinus d'un angle sur le cercle trigonométrique.

Il est possible de déduire de très nombreuses relations utiles à partir du cercle trigonométrique. Nous pouvons par exemple en déduire :

$$\begin{aligned}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(\theta)\\ \cos(-\theta) &= \cos(\theta)\\ \sin(-\theta) &= -\sin(\theta)\end{aligned}$$

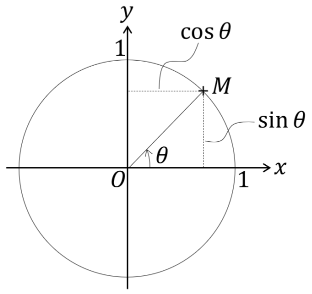


FIGURE 5.6: Cercle trigonométrique.

5.3.4 Relations trigonométriques

- Nous pouvons aller plus loin et déduire du cercle trigonométrique l'expression de la matrice de rotation d'angle θ dans le plan :

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

☞ Il suffit d'appliquer cette matrice aux points de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ pour retrouver l'expression de la matrice de rotation.

- L'expression de la matrice de rotation permet de retrouver rapidement les **formules d'addition de trigonométrie**. Il suffit d'appliquer deux rotations successives d'angle θ_1 puis θ_2 à un point de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ pour obtenir :

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2)\\ \sin(\theta_1+\theta_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

d'où :

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2)\\ \sin(\theta_1+\theta_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\\ \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2\end{pmatrix}$$

- Il est possible de retrouver toutes les autres formules de trigonométrie à partir de ces deux formules d'addition. Voici les formules les plus utiles à retenir :

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B \tag{5.6}$$
$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B \tag{5.7}$$
$$\cos A\cos B = \frac{\cos(A-B)+\cos(A+B)}{2} \tag{5.8}$$
$$\cos^2 A = \frac{1+\cos(2A)}{2} \tag{5.9}$$
$$\sin^2 A = \frac{1-\cos(2A)}{2} \tag{5.10}$$
$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \tag{5.11}$$

☞ La relation $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ sera particulièrement importante dans l'étude des ondes stationnaires qui résultent de l'addition de deux ondes progressives.

☞ Notons que les formules de linéarisation du cosinus ou du sinus se retrouve facilement à l'aide de la formule d'Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

5.3.5 Comment retrouver rapidement les relations trigonométriques

Nous allons voir dans cette partie comment retrouver facilement les formules de trigonométrie.

La formule d'Euler nous permet de déduire la formule de Moivre : il existe un réel θ tel que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$. Nous pouvons appliquer cette relation pour retrouver facilement quelques relations trigonométriques très utiles. Considérons le cas $n = 2$, nous obtenons $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta$. Or $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$. Par identification, nous obtenons donc :

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

et

$$\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$$

En suivant la même approche, nous pouvons développer l'identité $e^{iA}e^{iB} = e^{i(A+B)}$ grâce à la formule d'Euler et identifier les parties réelles et les parties imaginaires pour obtenir :

$$\cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B \tag{5.12}$$

$$\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B \tag{5.13}$$

Ces deux formules combinées à $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ permettent de retrouver toutes les formules de trigonométrie.