Électromagnétisme
AAV n°9 : être capable d'extraire le contenu physique d'une relation de dispersion - réponses

1 Les savoir-faire

Exercice 1 : Équation de dispersion

1. $\omega_c = \sqrt{\frac{b}{a}}$. Nous avons $k^2c^2 = \frac{a}{b}(\omega^2 - \omega_c^2)$. L'onde est absorbée pour $\omega < \omega_c$ car k est imaginaire. L'onde se propage pour $\omega > \omega_c$ car k est réel.
2. $k = \sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{\omega^2-\omega_c^2}{c^2}} = i\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{\omega_c^2-\omega^2}{c^2}}$ pour $\omega < \omega_c$. Nous obtenons donc $Re(E) = E_0 e^{-\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{\omega_c^2-\omega^2}{c^2}}x}\cos(\omega t)$. L'onde ne se propage pas. Elle est absorbée.
   $k = \sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{\omega_c^2-\omega^2}{c^2}}$ pour $\omega < \omega_c$. Nous obtenons donc $Re(E) = E_0\cos(\omega t - \sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{\omega_c^2-\omega^2}{c^2}}x)$. L'onde se propage pour $\omega > \omega_c$.
3. $v_\phi = v_g$ dans ce cas. L'onde ne se disperse pas.

Exercice 2 : Onde sonore

1. $k = k' - ik''$ avec $k' = \frac{\omega}{c}$ et $k'' = \frac{\eta\omega^2}{2\rho_0 c^3}$. On injecte k avec un signe $+$ pour avoir une onde qui se propage suivant les x croissants. On obtient $p = p_0 e^{i(\omega t - kx)} = p_0 e^{i(\omega t - k'x + ik''x)} = p_0 e^{-k''x} e^{i(\omega t - k'x)}$. La partie réelle de p a donc pour expression $Re(p) = p_0 e^{-k''x}\cos i(\omega t - k'x)$
2. $v_\phi = \frac{\omega}{k'} = c$. $v_g = c$.
3. Pas de dispersion des ondes sonores.

Exercice 3 : Propagation dans un milieu conducteur

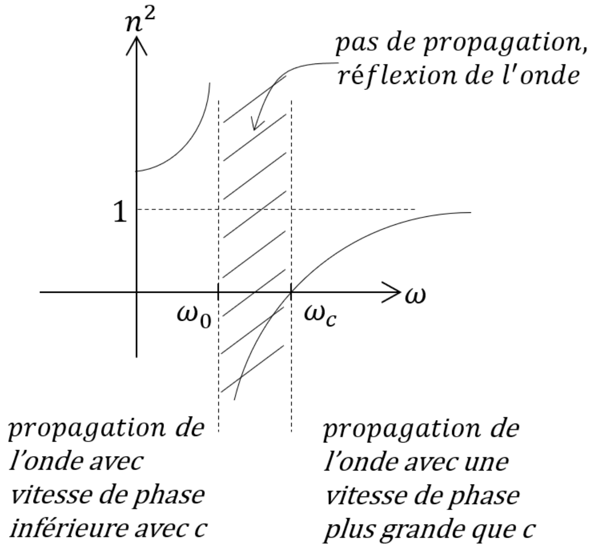
1. Le champ électrique crée une onde de déplacement des électrons. La vitesse des électrons a pour expression en un point x fixé a pour expression $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{-i\omega t}$. En régime permanent, l'équation de la dynamique a pour expression $\vec{v} = \frac{iq}{m\omega}\vec{E}$
2. $\vec{J} = i\frac{ne^2}{m\omega}\vec{E}$
3. $\sigma = i\frac{ne^2}{m\omega}$.
4. $\rho = 0$ donc $div\ \vec{E} = 0$. Les autres équations de Maxwell ne changent pas.
5. $div\ \vec{E} = 0$ implique $E_x = 0$. De même, $div\ \vec{B} = 0$ implique $B_x = 0$. On a donc $\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} e^{i(kx-\omega t)}$ et $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_{0y} \\ B_{0z} \end{pmatrix} e^{i(kx-\omega t)}$.
6. On trouve à partir de $\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ que $\vec{B} = \frac{1}{i\omega}\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = \frac{\omega}{k}\begin{pmatrix} 0 \\ -E_{0z} \\ E_{0y} \end{pmatrix} e^{i(kx-\omega t)}$. Nous avons donc $\vec{E}.\vec{B} = 0$ et $\frac{E}{B} = \frac{\omega}{k}$.

7. On injecte les expression de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans l'équation de Maxwell-Ampère pour obtenir $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ avec $\omega_p = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}$.
8. L'indice optique a pour expression $n = \frac{c}{\frac{\omega}{k}}$ d'où $n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$
9. L'onde peut se propager si k est réelle donc si l'indice optique est réelle. C'est le cas si $\omega > \omega_p$.

2 La mise en œuvre

Exercice 4 : Indice optique d'un gaz

1. $m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - m\omega_0^2\vec{r}$. En régime permanent, nous avons $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{i(kx-\omega t)}$ d'où $\vec{r} = \frac{q\vec{E}}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}$
2. $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ or $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kx-\omega t)}$ d'où $\vec{v} = \frac{-i\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\frac{q\vec{E}}{m} = \frac{i\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\frac{q\vec{E}}{m}$ et $\vec{j} = \frac{i\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\frac{nq^2\vec{E}}{m}$
3. Nous obtenons donc $\sigma = \frac{i\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\frac{nq^2}{m}$. La conductivité est nulle pour $\omega = 0$. La conductivité est donc un imaginaire pure dans un isolant.
4. Les équations de Maxwell se réécrivent $div\ \vec{E} = 0$, $\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, $div\ \vec{B} = 0$ et $\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$
5. $div\ \vec{E} = 0$ d'où $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$. Nous avons donc E qui dépend uniquement de x donc $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$ or $\frac{\partial E_x}{\partial x} = ikE_{x0}e^{i(kx-\omega t)} = 0$ d'où $E_{x0} = 0$ et $E_x = 0$. De même $div\ \vec{B} = 0$ implique $B_x = 0$.
   On a donc $\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} e^{i(kx-\omega t)}$ et $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_{0y} \\ B_{0z} \end{pmatrix} e^{i(kx-\omega t)}$.
6. On trouve à partir de $\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ que $\vec{B} = \frac{1}{i\omega}\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = \frac{\omega}{k}\begin{pmatrix} 0 \\ -E_{0z} \\ E_{0y} \end{pmatrix} e^{i(kx-\omega t)}$. Nous avons donc $\vec{E}.\vec{B} = 0$ et $\frac{E}{B} = \frac{\omega}{k}$.
   On peut le démontrer de manière plus générale en montrant que $\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ s'écrit $\vec{k}\wedge\vec{E} = \omega\vec{B}$ pour une onde plane. Nous avons donc $\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ donc $\vec{k}\wedge\vec{E} = \omega\vec{B}$ d'où $\vec{E}.\vec{B} = \vec{E}.(\vec{k}\wedge\vec{E}) = \vec{k}.(\vec{E}\wedge\vec{E}) = 0$. On a $||\vec{B}||^2 = \vec{B}.\vec{B} = \frac{1}{\omega^2}(\vec{k}\wedge\vec{E}).(\vec{k}\wedge\vec{E})$. On a $(\vec{a}\wedge\vec{b}).(\vec{c}\wedge\vec{d}) = (\vec{a}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{d}) - (\vec{a}.\vec{d})(\vec{b}.\vec{c})$ d'où $B^2 = \frac{k^2}{\omega^2}E^2$ donc $\frac{E}{B} = \frac{\omega}{k}$.
7. On injecte les expressions de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans l'expression de Maxwell-Ampère pour trouver la norme de $\vec{k}$ qui a donc pour expression :
$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2}}$$
8. $n = \frac{c}{v_p} = c\frac{k}{\omega} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_0^2}}$ d'où $n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_0^2} = \frac{\omega^2-\omega_c^2}{\omega^2-\omega_0^2}$.
   La figure suivante montre n^2 en fonction de la fréquence. L'onde peut se propager pour $n^2 > 0$. Pour $n^2 < 0$, nous avons n qui est un imaginaire pure et l'onde est donc réfléchie.



L'onde ne se propage pas entre ω_0 et ω_c.

9. Nous avons $\omega_c > \omega_0$. Nous avons trois cas de figures :
   - $\omega < \omega_0 < \omega_c$: $n^2 > 0$. Transparent.
   - $\omega_0 < \omega < \omega_c$: $n^2 < 0$. l'indice est un imaginaire pure dans ce cas. L'onde est donc absorbée.
   - $\omega > \omega_c > \omega_0$: $n^2 > 0$. Transparent.
10. Dans le cas d'un milieu constitué de porteurs de charges libres, nous avons $\omega_0 = 0$ (pas de liaison élastique entre l'électron et le noyau), d'où $n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$. Nous avons $n^2 > 0$ (propagation) pour $\omega > \omega_p$ dans un conducteur, c'est le cas pour des rayons X. Pour $\omega < \omega_p$, nous avons $n^2 < 0$: réflexion dans le visible.

Exercice 5 : Propagation d'une onde électromagnétique dans un métal réel

1. $\overrightarrow{J} = \sigma \overrightarrow{E}$.
2. $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0}\rho = 0$
3. $\rho = \rho_0(x, y, z)e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$
4. les équations de Maxwell ont pour expression :

$$\begin{array}{ll} (1) : div\ \overrightarrow{E} = 0 & (2) : div\ \overrightarrow{B} = 0 \\ (3) : \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} & (4) : \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{B} = \mu_0\ \sigma \overrightarrow{E} \end{array}$$

   On trouve que l'équation de propagation du champ électrique dans le conducteur s'écrit $\Delta \overrightarrow{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$.
5. $-k^2 = i\mu_0\sigma\omega$
6. On trouve que $k = \pm\sqrt{\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}}$ d'où $\overrightarrow{E} = E_0 e^{-\sqrt{\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}}x} \cos\left(\omega t \pm \sqrt{\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}}x\right)$
7. Ainsi, le champ électromagnétique ne pénètre un métal que sur une épaisseur appelée épaisseur de peau et dont l'expression est donnée par $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}}$. On a $\delta \simeq 10^{-5}$ m pour $f = 100\,\mathrm{kHz}$ et $\sigma = 10^7\,\mathrm{S}$.

8. Dans un four à micro-ondes, une antenne émet des ondes EM de fréquence 3 GHz. A cette fréquence, l'épaisseur de peau d'un métal usuel est de l'ordre du micromètre. Ainsi, du papier aluminium utilisé pour emballer les aliments suffit à réfléchir les ondes électromagnétiques vers l'antenne ce qui provoque sa destruction. Il faut donc éviter de mettre du papier aluminium dans un four à micro-onde.
9. La faible valeur de l'effet de peau à cette fréquence permet également d'emprisonner les ondes dans le four avec une fine couche de métal placée dans la porte du four à micro-onde.
10. $v_\phi = \frac{\omega}{k'} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\sigma}}$. $v_g = \frac{d\omega}{dk'} = \sqrt{\frac{8\omega}{\mu_0\sigma}}$

3 Pour aller plus loin

Exercice 6 : Dispersion dans les fibres optiques

Une fibre optique est un cylindre allongé très fin qui a la propriété de guider la lumière. Les fibres optiques sont notamment utilisées pour transmettre de l'information. Deux méthodes sont utilisées : la modulation de l'intensité (ASK) ou de la phase (DPSK) de la lumière se propageant à l'intérieur de la fibre optique. En modulation d'intensité, le bit 1 correspond à une présence de lumière et le bit 0 à une absence de celle-ci. Dans tout le problème, on raisonne avec une transmission au format RZ où l'intensité lumineuse retourne systématiquement à zéro entre chaque bit, de sorte que les impulsions lumineuses ont toutes la même durée. On note f le débit en bits/s dans la fibre.

1. Tracer l'allure de la puissance rayonnée dans la fibre en fonction du temps pour transmettre l'octet 10110011. Faire apparaître f.

On considère une fibre optique de longueur L ayant un indice effectif n_e. L'indice optique dépend de la longueur d'onde de la lumière qui se propage dans la fibre et donc de la longueur d'onde de la lumière injectée dans la fibre. Nous notons λ_0 la longueur d'onde de la lumière dans le vide. Nous cherchons la dépendance de la vitesse de groupe avec λ_0.

2. Rappeler l'expression de la vitesse de phase en fonction de c et n_e.
3. Déterminer l'expression de $v_g = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}}$ en fonction de c, n_e, ω et $\frac{dn_e}{d\omega}$.
4. Rappeler l'expression de λ_0 en fonction de ω et c. En déduire que la vitesse de groupe a pour expression $v_g = \frac{c}{n_e - \lambda_0 \frac{dn_e}{d\lambda_0}}$.
5. Entre v_g et v_ϕ, quelle vitesse correspond à la vitesse de propagation des données numériques dans la fibre optique ? Justifier.

La puissance rayonnée du signal monochromatique λ_0 initial est modulée à la fréquence f pour transmettre l'information. Cette création de paquets d'onde d'une durée τ élargit la spectre de la lumière. Nous notons $\Delta\omega$ la largeur en fréquence angulaire du spectre de la lumière.

6. Sachant que $\tau\Delta\omega = 2\pi$. Montrer que le spectre de la lumière possède un pic centré sur λ_0 de largeur $\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2 f}{c}$. La valeur de f est telle que $\Delta\lambda << \lambda_0$.

Le caractère dispersif de la fibre optique provoque l'élargissement temporelle d'une impulsion. On note $\Delta\tau$ cet élargissement. Pour évaluer $\Delta\tau$, on calcule la différence de temps de trajet entre une impulsion centrée en $\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}$ et en $\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}$.qui se propage à la vitesse v_g.

7. Montrer que que le délai différentiel des impulsions lumineuses après la traversée de la fibre a pour expression $\Delta\tau = |D_c L \Delta\lambda|$ avec $D_c = -\frac{\lambda_0}{c}\frac{d^2 n_e(\lambda_0)}{d{\lambda_0}^2}$.
8. Quelle est l'expression de $\Delta\tau$ dans le cas où l'on met en série une fibre optique de longueur L_1 et de dispersion chromatique $D_{c,1}$ avec une fibre optique de longueur L_2 et de dispersion chromatique $D_{c,2}$.

Pour que les effets de la dispersion ne soient pas pénalisant, le délai différentiel doit rester inférieure au dixième de la durée entre deux impulsions successives.

9. Expliquer pourquoi la dispersion empêche la transmission des données si le délai différentiel devient du même ordre de grandeur que la durée entre les impulsions.
10. Pour une fibre optique monomode conventionnelle (type G652) ayant une dispersion chromatique à 1,55 µm valant $D_c = +17\,\mathrm{ps\,nm^{-1}\,km^{-1}}$, jusqu'à quelle distance peut-on transmettre le signal sans correction de la dispersion pour un débit de 10 Gbits/s ? Commentaire.