Électromagnétisme

AAV n°9 : être capable d'extraire le contenu physique d'une relation de dispersion

Consignes : Justifier toutes les réponses. Une réponse correcte non justifiée est considérée comme fausse en devoir. Soigner la rédaction des réponses et respecter les notations de l'énoncé. Une réponse qui utilise une autre notation est considérée comme fausse en devoir.

1 Les savoir-faire

Savoir étudier une relation de dispersion

Exercice 1 : Équation de dispersion

On suppose que l'équation de dispersion relative à une onde progressive et monochromatique s'écrit :

$$k^2c^2 = a\omega^2 - b$$

où a et b sont des constantes positives.

1. Définir une pulsation remarquable, à partir de a et b et montrer qu'il existe deux domaines de fréquence dans lesquels le vecteur d'onde k est soit réelle, soit imaginaire.
2. On considère le terme de phase de l'onde considérée sous la forme $e^{i(\omega t - kx)}$. Dans chacun des domaines, comment s'écrit la partie réelle de ce terme. Quelles propriétés en déduit-on ?
3. Dans le domaine des pulsations très élevées, $\omega^2 >> \frac{b}{a}$, montrer que $v_\varphi = v_g$. Que-peut on en conclure ?

Exercice 2 : Onde sonore

La relation de dispersion des ondes sonores de la forme $e^{i(\omega t - kx)}$ s'écrit, en prenant en compte la viscosité :

$$k = \pm\left(\frac{\omega}{c} - \frac{i\eta\omega^2}{2\rho_0 c^3}\right)$$

Où η représente la viscosité dynamique du fluide.

1. Étudier l'atténuation d'une onde sonore en injectant l'expression de k dans la forme complexe de l'onde puis en prenant la partie réelle.
2. Déterminer l'expression de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe d'une onde sonore plane.
3. Est-ce qu'il y a dispersion des ondes sonores ?

Savoir utiliser les équations de Maxwell pour établir la relation de dispersion

Exercice 3 : Propagation dans un milieu conducteur

On considère un milieu matériel globalement neutre, composé d'une densité volumique n d'ions de charge $+e$ et d'une densité volumique n d'électrons de charge $-e$ et de masse m. On considère que les électrons ne sont pas liés aux ions, le milieu est donc un milieu conducteur. On se propose d'étudier les propriétés d'un tel milieu, soumis à la propagation d'une onde plane électromagnétique, dont le champ électrique est donné par $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kx-\omega t)}$. Le déplacement des électrons est alors forcé par le champ électrique et la vitesse des électrons a pour expression $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_0 e^{i(kx-\omega t+\phi)}$. Le poids des électrons est négligeable.

1. Écrire l'équation du mouvement des électrons et la résoudre en régime permanent pour montrer que $\vec{v} = \frac{iq}{m\omega}\vec{E}$.
2. Toujours en régime permanent, exprimer la vitesse des électrons ainsi que la densité de courant $\vec{J}$ qui en résulte.
3. En déduire que la conductivité σ du milieu a pour expression $\sigma = i\frac{ne^2}{m\omega}$.
4. Donner les équations de Maxwell dans le milieu.
5. En utilisant la divergence du champ électrique, démontrer que ce dernier n'a pas de composante selon x. En déduire que le champ magnétique $\vec{B}$ non plus.
6. Montrer que $\vec{B} = \frac{\omega}{k}\begin{pmatrix} 0 \\ -E_{0z} \\ E_{0y} \end{pmatrix} e^{i(kx-\omega t)}$. Montrer que $\vec{E}$ est perpendiculaire à $\vec{B}$ et établir la relation $\frac{E}{B} = \frac{\omega}{k}$.
7. En déduire la relation de dispersion $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ où ω_p et la fréquence plasma.
8. Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe de l'onde. Commentaires.
9. En déduire l'expression de n^2.
10. Tracer le graphe de n^2 en fonction de ω. A partir de quelle fréquence l'onde peut-elle se propager dans le milieu conducteur ? En déduire la distance d'atténuation de l'onde lorsque elle ne peut pas se propager.

2 La mise en œuvre

Exercice 4 : Indice optique d'un gaz

On considère un milieu matériel globalement neutre, composé d'une densité volumique n d'atome. Les électrons des atomes ,de charge $-e$ et de masse m, sont soumis à la force électrique et à une force de rappel élastique $\vec{f} = -m\omega_0^2\vec{r}$, qui les ramène à leur position d'équilibre, supposée confondue avec le noyau auquel ils sont rattachés. On se propose d'étudier les propriétés d'un tel milieu, soumis à la propagation d'une onde plane électromagnétique, dont le champ électrique est donné par $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kx-\omega t)}$.

Equation du mouvement des électrons

1. Ecrire l'équation du mouvement d'un électron et la résoudre en régime permanent en posant $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_0 e^{i(kx-\omega t+\phi)}$ pour exprimer $\vec{r}$ en fonction de $\vec{E}$, m, ω et ω_0.
2. Toujours en régime permanent, exprimer la vitesse des électrons.

3. En définissant la conductivité par $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, montrer que la conductivité σ du milieu a pour expression :
$$\sigma = \frac{i\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\frac{nq^2}{m}$$
Quelle est la particularité de la conductivité dans un isolant ?

Equations de Maxwell

4. Donner les équations de Maxwell dans le milieu.
5. En utilisant la divergence du champ électrique, démontrer que ce dernier n'a pas de composante selon x. En déduire que le champ magnétique $\vec{B}$ non plus.
6. Montrer que $\vec{B} = \frac{\omega}{k}\begin{pmatrix} 0 \\ -E_{0z} \\ E_{0y} \end{pmatrix} e^{i(kx-\omega t)}$. Montrer que $\vec{E}$ est perpendiculaire à $\vec{B}$ et établir la relation $\frac{E}{B} = \frac{\omega}{k}$.
7. Injecter les expressions de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans l'équation de Maxwell-Ampère pour en déduire la relation de dispersion :
$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2}}$$
où ω_p est la pulsation plasma dont on rappellera la définition.

Propagation des ondes

L'onde ne peut se propager dans le milieu que lorsque l'indice optique $n = c/v$ est réel, ce qui est équivalent à $n^2 > 0$.

8. On pose $\omega_c^2 = \omega_0^2 + \omega_p^2$. Exprimer n^2 en fonction des seules fréquences ω, ω_c et ω_0.
9. Étudier le signe de n^2 en fonction de la pulsation ω.
10. En déduire le comportement du gaz en fonction des différents domaines de fréquence.

Exercice 5 : Propagation d'une onde électromagnétique dans un métal réel

Un métal réel est un milieu dans lequel peut exister un courant volumique de conduction.

1. Rappeler l'expression de la loi d'Ohm locale qui relie $\overrightarrow{J}$ à $\overrightarrow{E}$.
2. Utiliser l'équation de conservation de la charge ainsi que Maxwell Gauss pour établir l'équation satisfaite par la densité volumique de charge.
3. En déduire l'expression du temps typique de disparition de la charge.

Nous envisageons la propagation d'une onde électromagnétique dans le métal dont la fréquence est telle que le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction et $\rho = 0$.

4. Écrire les équations de Maxwell compte-tenu de l'approximation précédente et montrer que l'équation de propagation du champ électrique dans le conducteur s'écrit $\Delta\overrightarrow{E} = \mu_0\sigma\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$.
5. On considère un champ de la forme $\overrightarrow{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)}\widehat{u}_y$. En déduire la relation de dispersion des ondes dans le métal.
6. Utiliser le fait que $-i = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2$ pour étudier l'atténuation de l'onde.
7. En déduire l'expression de la distance d'atténuation de l'onde. Cette distance est appelée épaisseur de peau. Évaluer sa valeur pour $f = 500\,\text{kHz}$ dans le cas du cuivre. Que se passe-t-il lorsque la conductivité du métal tend vers l'infini (conducteur parfait). $\sigma = 5 \times 10^7\,\Omega^{-1}\,\text{m}^{-1}$ (cas du cuivre) et $\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\text{F}\,\text{m}^{-1}$.

8. Expliquer pourquoi il ne faut pas introduire de plat métallique dans un four à micro-onde.
9. Expliquer pourquoi la porte d'un micro-onde contient une fine couche métallique.
10. Déterminer les vitesse de phase et de groupe.

3 Pour aller plus loin

Exercice 6 : Dispersion dans les fibres optiques

Une fibre optique est un cylindre allongé très fin qui a la propriété de guider la lumière. Les fibres optiques sont notamment utilisées pour transmettre de l'information. Deux méthodes sont utilisées : la modulation de l'intensité (ASK) ou de la phase (DPSK) de la lumière se propageant à l'intérieur de la fibre optique. En modulation d'intensité, le bit 1 correspond à une présence de lumière et le bit 0 à une absence de celle-ci. Dans tout le problème, on raisonne avec une transmission au format RZ où l'intensité lumineuse retourne systématiquement à zéro entre chaque bit, de sorte que les impulsions lumineuses ont toutes la même durée. On note f le débit en bits/s dans la fibre.

1. Tracer l'allure de la puissance rayonnée dans la fibre en fonction du temps pour transmettre l'octet 10110011. Faire apparaître f.

On considère une fibre optique de longueur L ayant un indice effectif n_e. L'indice optique dépend de la longueur d'onde de la lumière qui se propage dans la fibre et donc de la longueur d'onde de la lumière injectée dans la fibre. Nous notons λ_0 la longueur d'onde de la lumière dans le vide. Nous cherchons la dépendance de la vitesse de groupe avec λ_0.

2. Rappeler l'expression de la vitesse de phase en fonction de c et n_e.
3. Déterminer l'expression de $v_g = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}}$ en fonction de c, n_e, ω et $\frac{dn_e}{d\omega}$.
4. Rappeler l'expression de λ_0 en fonction de ω et c. En déduire que la vitesse de groupe a pour expression $v_g = \frac{c}{n_e - \lambda_0 \frac{dn_e}{d\lambda_0}}$.
5. Entre v_g et v_ϕ, quelle vitesse correspond à la vitesse de propagation des données numériques dans la fibre optique ? Justifier.

La puissance rayonnée du signal monochromatique λ_0 initial est modulée à la fréquence f pour transmettre l'information. Cette création de paquets d'onde d'une durée τ élargit la spectre de la lumière. Nous notons $\Delta\omega$ la largeur en fréquence angulaire du spectre de la lumière.

6. Sachant que $\tau\Delta\omega = 2\pi$. Montrer que le spectre de la lumière possède un pic centré sur λ_0 de largeur $\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2 f}{c}$. La valeur de f est telle que $\Delta\lambda << \lambda_0$.

Le caractère dispersif de la fibre optique provoque l'élargissement temporelle d'une impulsion. On note $\Delta\tau$ cet élargissement. Pour évaluer $\Delta\tau$, on calcule la différence de temps de trajet entre une impulsion centrée en $\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}$ et en $\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}$.qui se propage à la vitesse v_g.

7. Montrer que que le délai différentiel des impulsions lumineuses après la traversée de la fibre a pour expression $\Delta\tau = |D_c L \Delta\lambda|$ avec $D_c = -\frac{\lambda_0}{c}\frac{d^2 n_e(\lambda_0)}{d\lambda_0{}^2}$.
8. Quelle est l'expression de $\Delta\tau$ dans le cas où l'on met en série une fibre optique de longueur L_1 et de dispersion chromatique $D_{c,1}$ avec une fibre optique de longueur L_2 et de dispersion chromatique $D_{c,2}$.

Pour que les effets de la dispersion ne soient pas pénalisant, le délai différentiel doit rester inférieure au dixième de la durée entre deux impulsions successives.

9. Expliquer pourquoi la dispersion empêche la transmission des données si le délai différentiel devient du même ordre de grandeur que la durée entre les impulsions.

10. Pour une fibre optique monomode conventionnelle (type G652) ayant une dispersion chromatique à 1,55 µm valant $D_c = +17\,\mathrm{ps\,nm^{-1}\,km^{-1}}$, jusqu'à quelle distance peut-on transmettre le signal sans correction de la dispersion pour un débit de 10 Gbits/s ? Commentaire.