# Électromagnétisme - solution
# AAV n°7 : être capable de déterminer l'énergie contenue dans le champ électromagnétique et de calculer la puissance rayonnée par l'onde

## 1 Les savoir-faire

**Exercice 1 : Densité d'énergie électromagnétique**

1.
$$\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{k}{\omega} E_0 \cos(\omega t - kx) \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Dans le vide illimité, $\frac{\omega}{k} = c$ d'où $u = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \left(\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} + \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2}\right)\cos^2(\omega t - kx)$. On obtient donc $u = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$.
3. $< u >= \frac{1}{T_{detection}} \int_0^{T_{detection}} u dt$. On trouve que $< \cos^2(\omega t + cst) >= \frac{1}{2}$ si le temps de détection est grand devant la période de l'onde. C'est précisément dans ce cas de figure que nous considérons la valeur moyenne. Nous obtenons donc $< u >= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$.

**Exercice 2 : Vecteur de Poynting**

1. Il faut utiliser l'équation de Maxwell-Faraday car l'onde est non plane.
2. $\vec{R} = \frac{E_0^2}{\mu_0}\frac{k}{\omega}\cos^2(\frac{\pi y}{2l})\cos^2(kx - \omega t)\widehat{u}_x + \frac{E_0^2}{\mu_0}\frac{\pi}{2l\omega}\cos(\frac{\pi y}{2l})\sin(\frac{\pi y}{2l})\cos(kx - \omega t)\sin(kx - \omega t)\widehat{u}_y$. Une composante de l'énergie se propage dans le sens de propagation de l'onde. La forme d'onde proposée s'obtient en additionnant deux ondes planes qui se propagent dans des directions différentes. Il y a donc deux composantes au vecteur de Poynting.
3. $P_{ray} = \iint \vec{R}.d\vec{S} = \frac{E_0^2}{\mu_0}\frac{k}{\omega}\cos^2(kx - \omega t)\int_0^l \int_0^l \cos^2(\frac{\pi y}{2l}) dydz$. On linéarise le $\cos^2$ pour obtenir $P_{ray} = \frac{E_0^2}{\mu_0}\frac{k}{\omega}\cos^2(kx - \omega t) l \int_0^l \left(\frac{1+\cos(\frac{\pi y}{l})}{2}\right) dy = \frac{E_0^2}{\mu_0}\frac{k}{\omega}\cos^2(kx - \omega t)\frac{l^2}{2}$.
4. On prend maintenant la valeur moyenne temporelle pour obtenir $< P_{ray} >= \frac{E_0^2}{\mu_0}\frac{k}{\omega}\frac{l^2}{4}$.

**Exercice 3 : Station de radio**

1. 0.
2. Le théorème de Poynting a pour expression $\iint < R_1 > dS =< P >$ d'où $< R_1 >= \frac{<P>}{4\pi r_1^2}$ où $< . >$ désigne la moyenne temporelle.
3. On obtient $< R_1 > S_1 =< R_2 > S_2$.
4. La puissance émise se conserve donc $P_{emis} =< R > S$ où $< R >$ est la valeur moyenne du vecteur de Poynting et $S$ la surface de la sphère de 1 km de rayon. Pour une onde plane dans l'air, nous avons $R = \frac{E^2}{c\mu_0} = c\varepsilon_0 E^2$. La valeur moyenne de $R$ a donc pour expression $< R >= \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2}$ où $E_0$ est l'amplitude du champ électrique. Nous avons donc $E_0 = \sqrt{\frac{2P_{emis}}{c\varepsilon_0 4\pi r^2}}$. Il reste l'application numérique à faire.

5. L'énergie incidente normale captée en 5 min sur une plaque de 10 cm de coté est donnée par $\mathcal{E} = <R> ST$ où $T$ est le temps de détection et $S$ est la surface de la plaque de 10 cm de coté.

**Exercice 4 : Laser**

1. $d<U> = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 S v dt$
2. $<P> = \frac{d<U>}{dt} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 S v$
3. $<P> = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} S = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2} S$ d'où $v = c$.
4. $E_0 = \sqrt{\frac{2<P>}{c\varepsilon_0 S}}$.
5. A.N.

# 2 La mise en œuvre

**Exercice 5 : Énergie électromagnétique**

1. On utilise l'équation de Maxwell-Faraday pour obtenir

$$\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{E_{0z}}{c}\cos(\omega t - kx) \\ \frac{E_{0y}}{c}\cos(\omega t - kx) \end{pmatrix}$$

2. $u = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$ avec $E_0^2 = E_{0y}^2 + E_{0z}^2$.
3. $<u> = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$
4. $\vec{R} = c\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)\widehat{u}_x$
5. $<R> = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2$.
6. A.N.

**Exercice 6 : Rayonnement d'un dipôle**

1. $\vec{R} = \varepsilon_0 c \left(\frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi r}\right)^2 \omega^4 p^2 \widehat{u}_r$ d'où $<\vec{R}> = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c \left(\frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi r}\right)^2 \omega^4 p_0^2 \widehat{u}_r$. Le rayonnement d'un dipôle dépend de $\theta$ et n'est donc pas isotrope. Un dipôle ne rayonne pas selon son axe.
2. La puissance moyenne rayonnée par unité de surface est en $\omega^4$. La lumière bleue est donc diffusée davantage que la lumière rouge.
3. $<P> = 2\pi r^2 \frac{1}{2}\varepsilon_0 c \left(\frac{\mu_0}{4\pi r}\right)^2 \omega^4 p_0^2 \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi c}\omega^4 p_0^2 \int_1^{-1}(u^2 - 1)du$ avec $u = \cos\theta$ d'où $<P> = \frac{\mu_0 p_0^2}{3\pi c}\omega^4$.