Électromagnétisme

AAV n°8 : être capable de déterminer l'énergie contenue dans le champ électromagnétique et de calculer la puissance rayonnée par l'onde

Consignes : Justifier toutes les réponses. Une réponse correcte non justifiée est considérée comme fausse en devoir. Soigner la rédaction des réponses et respecter les notations de l'énoncé. Une réponse qui utilise une autre notation est considérée comme fausse en devoir.

1 Les savoir-faire à connaître

Savoir calculer une densité d'énergie électromagnétique

Exercice 1 : Densité d'énergie électromagnétique

On considère une OemPPH se propageant dans le vide illimité de la forme :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \end{pmatrix}$$

1. Établir l'expression du champ magnétique associé à cette onde.
2. Montrer que la densité volumique d'énergie électromagnétique associée à cette onde a pour expression $u = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$.
3. Les détecteurs sont le plus souvent sensibles uniquement à la valeur moyenne de l'énergie (le temps de détection est grand devant la période de l'onde). Montrer que la valeur moyenne temporelle de la densité d'énergie électromagnétique contenue dans cette onde a pour expression $< u >= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$.

Savoir calculer une puissance rayonnée

Exercice 2 : Vecteur de Poynting

Soit $\vec{E} = E_0 \cos(\frac{\pi y}{2l}) \cos(kx - \omega t)\widehat{u}_z$.

1. Déterminer l'expression du champ magnétique associé au champ électrique.
2. Montrer que le vecteur de Poynting a pour expression $\vec{R} = \frac{E_0^2}{\mu_0}\frac{k}{\omega} \cos^2(\frac{\pi y}{2l}) \cos^2(kx - \omega t)\widehat{u}_x + \frac{E_0^2}{\mu_0}\frac{\pi}{2l\omega} \cos(\frac{\pi y}{2l}) \sin(\frac{\pi y}{2l}) \cos(kx - \omega t) \sin(kx - \omega t)\widehat{u}_y$. Est-ce que la direction et le sens du vecteur $\vec{R}$ est logique ?
3. Montrer que la puissance rayonnée par l'onde à travers une surface carrée d'aire S parallèle au plan yOz (figure 1) a pour expression $P_{ray} = \frac{E_0^2}{\mu_0}\frac{k}{\omega} \cos^2(kx - \omega t)\frac{l^2}{2}$.
4. Déterminer la puissance moyenne rayonnée à travers cette surface.

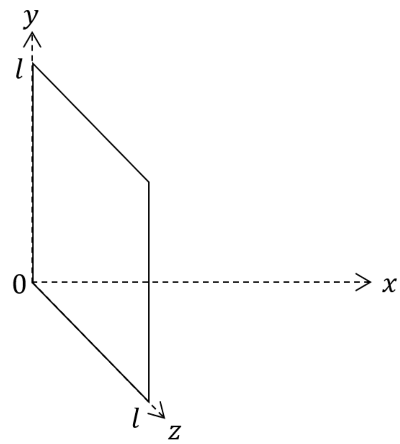

FIGURE 1 – Surface S de hauteur l et de largeur l.

Savoir utiliser la version intégrale du théorème de Poynting

Exercice 3 : Station de radio

Une station de radio émet en régime permanent un signal de puissance moyenne $< P >=$ 1 kW à la fréquence de 100 MHz. On suppose qu'elle rayonne comme une source ponctuelle et que le vecteur de Poynting est orienté suivant $\widehat{u}_r$.

1. Que vaut le terme $\frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint < u > \ d\tau\right)$ en régime permanent où $< . >$ désigne la valeur moyenne temporelle ?
2. Appliquer la version intégrale du théorème de Poynting à une sphère de rayon r_1 centrée sur la source pour montrer que de $< R_1 >= \frac{<P>}{4\pi r_1^2}$ où $< . >$ désigne la moyenne temporelle. Calculer la valeur de $< R_1 >$ à 1 km.
3. Appliquer la version intégrale du théorème de Poynting au volume compris entre les sphères de rayon r_1 et r_2 pour montrer que $< R_1 > r_1^2 =< R_2 > r_2^2$.

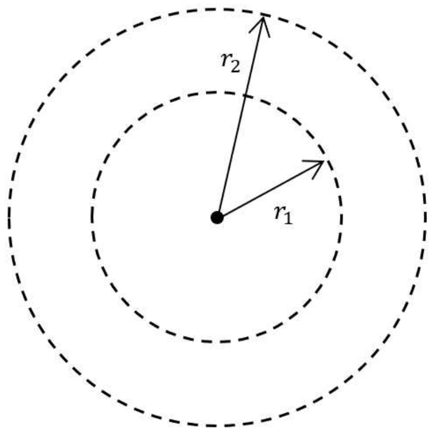

FIGURE 2 – Deux sphères de rayon r_1 et r_2 centrée sur la source considérée ponctuelle.

Loin de la source, le champ électromagnétique rayonné et reçu par un détecteur a la structure d'une onde plane et on note E_0 l'amplitude du champ électrique associé à cette onde plane.

4. Montrer que l'expression de l'amplitude du champ E a pour expression $E_0 =$

$\sqrt{\frac{2<P>}{c\varepsilon_0 4\pi r^2}}$ à une distance r de la source grande devant le détecteur. Calculer les valeurs des amplitudes des champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ pour $r = 1\,\mathrm{km}$.

5. Calculer l'énergie incidente normale captée en $5\,\mathrm{min}$ sur une plaque de $10\,\mathrm{cm}$ de coté à une distance de $1\,\mathrm{km}$ de l'antenne.On donne $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$.

Savoir effectuer un bilan d'énergie électromagnétique

Exercice 4 : Laser

L'onde émise par un laser est assimilée localement à une OemPPH polarisée rectilignement. On admet que le laser rayonne une puissance moyenne P uniformément répartie dans un faisceau de section S. On note E_0 l'amplitude du champ électrique et v la vitesse de propagation de l'énergie.

1. Montrer que l'énergie moyenne contenue dans le cylindre de section S et de longueur vdt a pour expression $d < U >= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 S v dt$

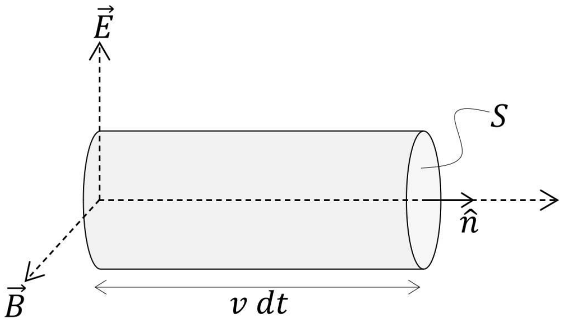

FIGURE 3 – Tube de section S et de longueur vdt.

2. En déduire l'expression de la puissance moyenne rayonnée $< P >$ à travers la surface S.
3. Déterminer l'expression de la puissance moyenne rayonnée à travers S à l'aide du vecteur de Poynting. En déduire que la vitesse de propagation de l'énergie est égale à c.
4. En déduire l'expression de l'amplitude du champ électrique en fonction de $< P >$, c et S.
5. Calculer E_0 pour $P = 3\,\mathrm{mW}$ et $S = 1\,\mathrm{mm^2}$. On donne $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$.

2 La mise en œuvre pour valider l'apprentissage

Exercice 5 : Énergie électromagnétique

On considère une OPPHM de la forme :

$$\overrightarrow{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y}\cos(\omega t - kx) \\ E_{0z}\cos(\omega t - kx) \end{pmatrix}$$

1. Établir l'expression du champ magnétique associé à cette onde.

2. Établir l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique associée à cette onde.
3. Les détecteurs sont le plus souvent sensibles uniquement à la valeur moyenne de l'énergie. Calculer la valeur moyenne temporelle de la densité d'énergie électromagnétique contenue dans cette onde.
4. Montrer que le vecteur de Poynting a pour expression $\vec{R} = c\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)\widehat{u}_x$.
5. Déterminer l'expression de la densité surfacique moyenne de puissance rayonnée de l'onde, c'est à dire la valeur moyenne temporelle de la composante du vecteur de Poynting dans la direction de propagation.
6. Le Soleil rayonne au niveau de la Terre une puissance moyenne d'environ 1000 W par mètre carré. En déduire l'amplitude des champs électromagnétique associées. On considère que l'onde électromagnétique émise par le Soleil est plane pour un détecteur situé sur Terre.

Exercice 6 : Rayonnement d'un dipôle

Un dipôle oscillant d'extension spatiale a et de moment dipolaire $\vec{p} = p_0 \cos(\omega t)\widehat{u}_z$ rayonne dans la région $r >> a$ et $r >> \lambda$, une onde électromagnétique dont les champs sont données, en coordonnées sphériques (voir figure 4), par :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi r}\ddot{p}(t - r/c)\widehat{u}_\theta \\ \vec{B} &= \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi r c}\ddot{p}(t - r/c)\widehat{u}_\varphi \end{aligned}$$

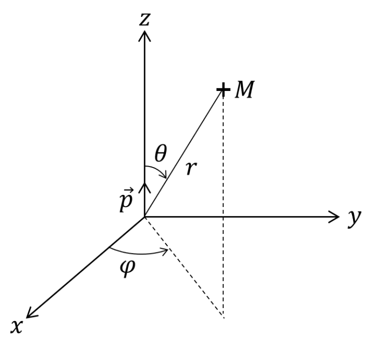

FIGURE 4 – Système de coordonnées sphériques utilisé pour exprimer les champs électrique et magnétique.

1. Montrer que la puissance moyenne rayonnée par unité de surface dans une direction $\widehat{u}_r$ a pour expression $< \vec{R} >= \frac{1}{2}\varepsilon_0 c \left(\frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi r}\right)^2 \omega^4 p_0^2 \widehat{u}_r$. Le rayonnement d'un dipôle est-il isotrope ?
2. L'équation précédente permet-elle d'expliquer en partie la couleur bleue du ciel ?
3. Déterminer l'expression de la puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de rayon r