Électromagnétisme

AAV n°7 : être capable d'étudier la propagation d'une onde électromagnétique dans le vide illimité

Consignes : Justifier toutes les réponses. Une réponse correcte non justifiée est considérée comme fausse en devoir. Soigner la rédaction des réponses et respecter les notations de l'énoncé. Une réponse qui utilise une autre notation est considérée comme fausse en devoir.

— Le niveau de difficulté est représenté par l'échelle

1 Les savoir-faire à connaître

Savoir établir l'équation de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide

Exercice 1 : Équation de propagation

1. Écrire les équations de Maxwell dans le vide.
2. Utiliser la relation $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}div\ \vec{A} - \Delta\vec{A}$ et les équations de Maxwell pour obtenir l'équation de propagation du champ électrique $\Delta\vec{E} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$.
3. Établir l'équation de propagation du champ magnétique.
4. En déduire l'expression de la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide.

Savoir établir la relation de dispersion d'une onde électromagnétique se propageant dans le vide illimité

Exercice 2 : relation de dispersion

1. Injecter une solution en onde plane de la forme $\vec{E} = E_0\cos(kx - \omega t)\widehat{u}_y$ dans l'équation de propagation du champ électrique pour établir l'équation de dispersion des ondes EM planes.
2. Injecter la représentation complexe associée à cette onde $\vec{E} = E_0 e^{i(kx-\omega t)}\widehat{u}_y$ dans l'équation de propagation du champ électrique pour établir l'équation de dispersion des ondes EM planes.

Savoir retrouver les propriétés des ondes électromagnétique dans le vide illimité à l'aide de la représentation complexe

Exercice 3 : Propriétés des ondes planes dans le vide

Nous considérons une onde électromagnétique plane qui se propage dans une direction quelconque. Le champ électrique dans sa représentation complexe associée à cette onde a pour expression $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}$. Nous nous plaçons dans un système de coordonnées cartésiennes.

1. Écrire les équations de Maxwell dans le vide en utilisant la notation complexe.
2. En déduire que les champs électriques et magnétiques sont transversaux.
3. Déterminer la relation de dispersion des ondes planes en utilisant la relation $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$.
4. En déduire que $\vec{B} = \frac{\widehat{n} \wedge \vec{E}}{c}$ où $\widehat{n}$ est la direction de propagation de l'onde.
5. En déduire que $\frac{E}{B} = c$.

Savoir déterminer l'expression du champ magnétique d'une onde plane

Exercice 4 : Champ magnétique à partir du champ électrique

Nous considérons une onde électromagnétique plane qui se propage suivant l'axe Ox. Nous considérons que le champ électrique est polarisé rectilignement suivant l'axe Oy. Nous utilisons dans la suite le champ électrique $\overrightarrow{E} = E_0 \cos(kx - \omega t)\widehat{u}_y$.

1. Déterminer le champ magnétique associé au champ électrique précédent à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday.
2. Montrer que l'équation de Maxwell-Thompson est bien vérifiée.

Savoir identifier une onde non plane

Exercice 5 : Ondes planes ?

On considère les deux expressions de champs électriques données ci-dessous.

$$\vec{E}_1 = E_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{\delta^2}} \cos(a(t + y/c))\widehat{u}_z$$
$$\vec{E}_2 = E_0 e^{iat-iby-dy}\widehat{u}_x$$

1. Déterminer s'il s'agit d'une onde électromagnétique plane ?
2. Déterminer l'expression du champ magnétique réel associé au champ électrique $\vec{E}_2$ en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday. Est-ce que la relation de structure de l'onde plane est respectée ?

Exercice 6 : Exemple d'onde non plane

Nous considérons une onde de la forme $\vec{E} = E_0 \cos(\frac{\pi z}{2a}) \cos(kx - \omega t)\widehat{u}_y$ où a est une constante.

1. Est-ce que cette onde est une onde plane ?
2. Déterminer l'expression du champ magnétique associé au champ électrique.
3. Est-ce que la relation de structure de l'onde plane est respectée ?
4. Montrer que l'équation de Maxwell-Thompson est bien vérifiée.
5. Déterminer la relation de dispersion de l'onde.
6. Montrer que la fréquence angulaire admet un minimum ω_0. Déterminer l'expression de ω_0.

2 La mise en œuvre

Exercice 7 : Détection

Les appareils de détection d'un expérimentateur indiquent qu'en un point donné de l'espace les amplitudes du champ électrique et magnétique sont $\overrightarrow{E} = (-8; 4; 3)$ et $\overrightarrow{B} = (3; -8; 4) \times 10^{-8}$ dans un repère cartésien. Est-ce que l'appareil fonctionne bien ?

Exercice 8 : Ondes planes ?

Pour chacune des expressions de champs électriques données ci-dessous, déterminer s'il s'agit d'une onde électromagnétique plane, progressive, harmonique. Le cas échéant, préciser la direction de propagation, la fréquence, la longueur d'onde et le vecteur d'onde, ainsi que les direction des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$. (Dans chaque cas, a, b, c et d désignent des constantes réelles dont on précisera la dimension).

$$\vec{E} = E_0 \cos(a(t + y))\widehat{u}_x$$
$$\vec{E} = E_0 \cos(a(t + y/c))\widehat{u}_z$$
$$\vec{E} = E_0 \cos(a(t + by))\widehat{u}_y$$
$$\vec{E} = E_0 \cos(at + bx + cy)\widehat{u}_z$$
$$\vec{E} = E_0 \cos(at + bx + cz)\widehat{u}_x$$
$$\vec{E} = iE_0 e^{iat+ibz}\widehat{u}_y$$
$$\vec{E} = E_0 e^{iat+ibz+dz}\widehat{u}_y$$
$$\vec{E} = E_0 \cos(ax)e^{ibt}\widehat{u}_x$$
$$\vec{E} = E_0 \sin(at + bz)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\widehat{u}_x - \frac{1}{2}\widehat{u}_y\right)$$

Exercice 9 : Antenne

En utilisant une antenne rectiligne, on cherche à capter une onde radio de 700 MHz. Au voisinage de l'antenne, on sait que dans un repère cartésien $\overrightarrow{b} = (26750; -3660; 2619)$; $\overrightarrow{k} = (1; k_2; 8)$; $\overrightarrow{E} = (-9; E_2; E_3)$ où $\overrightarrow{b}$ est un vecteur indiquant la direction et le sens du champ magnétique.

1. Écrire les équations de Maxwell dans le vide.
2. Utiliser la relation $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} div\ \overrightarrow{A} - \Delta\overrightarrow{A}$ et les équations de Maxwell pour obtenir l'équation de propagation du champ électrique $\Delta\overrightarrow{E} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = 0$.
3. Établir l'équation de propagation du champ magnétique.
4. Rappeler la relation de structure d'une onde électromagnétique dans le vide illimité ainsi que sa relation de dispersion.

Pour être efficace, une antenne doit être orienté parallèlement au champ électrique. En déduire :

5. Le vecteur propagation $\overrightarrow{k}$.
6. Le vecteur champ électrique $\overrightarrow{E}$.
7. Le vecteur unitaire donnant l'orientation de l'antenne.

Exercice 10 : Onde EM

Dans les milieux diélectriques homogènes et isotropes, les relations que nous avons établies dans le vide illimité sont valides à condition de changer la vitesse de la lumière dans le vide en vitesse de la lumière dans le milieu. On considère une OPPHEM de fréquence 400×10^{12} Hz qui se propage dans un milieu diélectrique homogène et isotrope dont les champs électriques et magnétiques ont pour amplitude $\overrightarrow{E} = (10; 15; 20)$ et $\overrightarrow{B} = (64; 40; -62) \times 10^{-9}$ dans un repère cartésien.

1. Déterminer la vitesse de propagation de l'OEM.
2. Déterminer l'indice du milieu dans lequel l'OEM se propage.
3. Démontrer la relation de structure des OPPHEM $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$ à partir de la version complexe de Maxwell-Faraday.
4. Déterminer le vecteur $\overrightarrow{k}$. On rappelle que $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$.
5. Déterminer l'expression détaillée de $\overrightarrow{E}(\vec{r}, t)$ et $\overrightarrow{B}(\vec{r}, t)$.

3 Pour aller plus loin

Exercice 11 : Superposition de deux ondes

Deux ondes planes de même fréquence se propagent en sens inverse suivant la direction Ox. Les champs électriques complexes de ces deux ondes ont pour expressions :

$$\overrightarrow{E}_1 = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \widehat{u}_y$$
$$\overrightarrow{E}_2 = \alpha E_0 e^{i(\omega t + kx)} \widehat{u}_y$$

1. Calculer le module du champ électrique complexe total pour montrer que l'amplitude du champ électrique résultant est donnée par :

$$E_{T0} = E_0 \sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(2kx)}$$

2. Déterminer l'amplitude du champ magnétique résultant.
3. Est-ce que l'onde résultante est une onde plane ?