Électromagnétisme

AAV n°7 : être capable d'étudier la propagation d'une onde électromagnétique dans le vide illimité - solution

le savoir-faire

Savoir établir l'équation de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide

Exercice 1 : Équation de propagation

1. $div\ \vec{E} = 0 \qquad div\ \vec{B} = 0$
   $\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
2. Nous prenons le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday pour obtenir $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial(\overrightarrow{rot}\ \vec{B})}{\partial t}$. En utilisant l'équation $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{\nabla} div\ \vec{A} - \Delta\vec{A}$ et l'équation de Maxwell-Gauss dans le vide, nous obtenons $\Delta\vec{E} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$
3. De la même manière, en partant de l'équation de Maxwell-Ampère, nous obtenons $\Delta\vec{B} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$.
4. c est donné par $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$.

Savoir établir la relation de dispersion d'une onde électromagnétique se propageant dans le vide illimité

Exercice 2 : relation de dispersion

1. On injecte une solution en forme d'onde plane, par exemple $\vec{E} = E_0\cos(\omega t - kx)\widehat{u}_y$, dans l'équation de propagation de l'onde pour obtenir la relation de dispersion. On trouve $k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$ d'où $k = \pm\frac{\omega}{c}$ pour une onde plane où k est la composante du vecteur d'onde selon Ox. Le module du vecteur $\vec{k}$ est donc donné par $k = \frac{\omega}{c}$.
2. Même principe avec l'onde complexe.

Savoir retrouver les propriétés des ondes planes à l'aide de la représentation complexe

Exercice 3 : Propriétés des ondes planes dans le vide

1. On injecte une solution en onde plane écrite sous forme complexe dans les équations de Maxwell pour obtenir la forme complexe des équations de Maxwell. Nous pouvons injectons $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$, pour obtenir :
   $\vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0 \qquad \vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0$
   $\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \omega \underline{\vec{B}} \qquad \vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = -\epsilon_0 \mu_0 \omega \underline{\vec{E}}$
2. $\vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0$ et $\vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0$ montrent que les champs électriques et magnétiques sont transversaux.
3. La relation $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}(.) = \vec{\nabla} div(.) - \Delta(.)$ permet d'obtenir l'équation de propagation du champ électromagnétique. Nous calculons donc $\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}) = (\vec{k}.\underline{\vec{E}})\vec{k} - (\vec{k}.\vec{k})\underline{\vec{E}}$ pour obtenir $k = \frac{\omega}{c}$.
4. La forme complexe de l'équation de Maxwell-Faraday montre alors que $\vec{B} = \frac{\widehat{n} \wedge \vec{E}}{c}$ où $\widehat{n}$ est la direction de propagation de l'onde.
5. Nous pouvons utiliser $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$ pour montrer que $\frac{E}{B} = c$.

Savoir déterminer l'expression du champ magnétique d'une onde plane

Exercice 4 : Champ magnétique à partir du champ électrique

1. On part de $\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ pour obtenir $\vec{B} = \frac{k}{\omega} E_0 \cos(kx - \omega t)\widehat{u}_z + Cst$ où la constante représente un éventuel champ mangnétostatique. Nous nous intéressons au champ magnétique de l'onde qui a donc pour expression $\vec{B} = \frac{k}{\omega} E_0 \cos(kx - \omega t)\widehat{u}_z$.
2. On a bien $div\ \vec{B} = 0$.

Savoir identifier une onde non plane

Exercice 5 : Ondes planes ?

1. La première onde n'est pas une onde plane puisque l'amplitude dépend de x. La deuxième onde est une onde plane.
2. L'onde 2 est plane mais pas harmonique (l'amplitude n'est pas constante, il faut sommer des ondes harmoniques de longueur d'onde différentes pour construire une onde dont l'amplitude n'est pas constante) : la relation $\frac{\omega}{k} = c$ n'a donc pas de raison d'être respecté mais la relation de structure doit être respectée.

   On détermine le champ magnétique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday. On a $\overrightarrow{rot}\ \vec{E}_2 = (dE_2 + ibE_2)\widehat{u}_z$ d'où $\vec{B}_2 = (\frac{id}{a}E_2 - \frac{b}{a}E_2)\widehat{u}_z = E_0\frac{d}{a}e^{-dy}e^{i(at-by+\pi/2)}\widehat{u}_z - \frac{b}{a}e^{-dy}e^{i(at-by)}\widehat{u}_z$. On prend la partie réelle pour obtenir $\vec{B}_2 = -E_0\left(\frac{d}{a}e^{-dy}\sin(at-by) + \frac{b}{a}e^{-dy}\cos(at-by)\right)\widehat{u}_z$ La relation de structure ($\vec{k}, \vec{E}$ et $\vec{B}$ forment un triède direct est bien respectée).

Exercice 6 : Exemple d'onde non plane

1. Non, l'amplitude dépend de z.
2. On injecte la solution proposée dans l'équation d'onde pour obtenir $-\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 - k^2 + \frac{1}{c^2}\omega^2 = 0$ d'où $\omega = \sqrt{c^2k^2 + \left(\frac{c\pi}{2a}\right)^2}$.
3. Une onde dont la longueur d'onde tend vers l'infini admet donc la fréquence angulaire minimale $\omega_0 = \frac{c\pi}{2a}$.

1 La mise en œuvre

Exercice 7 : Détection

Nous avons $\vec{E}.\vec{B} \neq 0$. L'appareil de détection ne fonctionne donc pas bien.

Exercice 8 : Ondes planes ?

1. Monstruosité. On additionne t et y.
2. OPPHM. $k = -\frac{a}{c}\widehat{u}_y$. $\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{a}$.
3. Onde non transervale, ce n'est pas une onde EM.
4. Onde plane. $k = -b\widehat{u}_x - c\widehat{u}_y$. $\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{a}$.
5. Onde non transervale, ce n'est pas une OPPHM.
6. OPPHM avec phase à l'origine. $k = -b\widehat{u}_z$. $\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{a}$.
7. OPPHM avec phase à l'origine. $k = -b\widehat{u}_z$. $\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{a}$.
8. Onde plane mais non monochromatique car le cosinus ne dure pas un temps infiniment long. $k = -b\widehat{u}_z$. $\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{a}$.
9. Onde plane mais non progressive.
10. OPPHM. $k = -b\widehat{u}_z$. $\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{a}$.

Exercice 9 : Antenne

1. Nous savons que $\overrightarrow{k}.\overrightarrow{B} = 0$. Nous en déduisons $k_2 = \frac{391}{30}\mathrm{m}^{-1}$.
2. Nous savons que $\overrightarrow{E}.\overrightarrow{B} = 0$ et que $\overrightarrow{k}.\overrightarrow{E} = 0$. Nous en déduisons $\overrightarrow{E} = (-9; -30; 50)\,\mathrm{V\,m^{-1}}$.
3. L'antenne est dans la direction de $\overrightarrow{E}$, nous avons donc $\widehat{u} = \frac{\vec{E}}{E} = (-9; -30; 50)/59$.

Exercice 10 : Onde EM

1. Nous avons $E = \sqrt{10^2 + 15^2 + 20^2} = \sqrt{725}\,\mathrm{V\,m^{-1}}$ et $B = \sqrt{64^2 + 40^2 + 62^2}.10^{-9} = \sqrt{9540}.10^{-9}\mathrm{T}$. La vitesse de l'onde dans le milieu est donnée par $v = \frac{E}{B} = 2{,}77 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
2. L'indice du milieu est donné par $n = \frac{c}{v} = 1{,}09$.
3. On obtient $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$ à partir de l'équation complexe de Maxwell-Faraday.
4. On a $\vec{E}\wedge\vec{B} = \vec{E}\wedge\left(\frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}\right) = E^2\frac{\vec{k}}{\omega}$ d'où $\overrightarrow{k} = \omega\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{E^2}$. Nous en déduisons $\vec{k} = (-6; 6,59; -1,94)\times 10^6\mathrm{m}^{-1}$
5. $\overrightarrow{E}(\vec{r}, t) = (10; 15; 20)\cos(800\pi.10^{12}t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} + \varphi)$ et $\overrightarrow{B}(\vec{r}, t) = (64; 40; -62)\times 10^{-9}\cos(800\pi.10^{12}t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} + \varphi)$.

Pour aller plus loin

Exercice 11 : Superposition de deux ondes

1. Le champ électrique totale a pour expression $\vec{E} = E_0(e^{-ikx} + \alpha e^{ikx})e^{i(\omega t)}\widehat{u}_y = E_0(1 + \alpha e^{i2kx})e^{i(\omega t - kx)}\widehat{u}_y$. L'amplitude complexe du champ totale a donc pour expression $\underline{E}_T = E_0(1 + \alpha e^{i2kx})$, l'amplitude du champ est donnée par $|\underline{E}_T| = E_0\sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha\cos(2kx)}$
2. On trouve $|\underline{B}_T| = \frac{E_0}{c}\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(2kx)}$
3. L'amplitude est constante dans une direction perpendiculaire à la direction de propagation. On peut donc la considérer plane.