Électromagnétisme - solution
AAV n°6 : être capable de citer les équations de Maxwell et de les manipuler

Les savoir-faire

Exercice 1 : Équations de Maxwell

1. (1) : $\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (2) : $\text{div}\,\vec{B} = 0$
   (3) : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (4) : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
2. (1) : $\text{div}\,\vec{E} = 0$ (2) : $\text{div}\,\vec{B} = 0$
   (3) : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (4) : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
3. (1) : $\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (2) : $\text{div}\,\vec{B} = 0$
   (3) : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = 0$ (4) : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j}$

Exercice 2 : Équation de conservation de la charge

1. On a $div\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t}$ et div $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0$ div $\vec{j} + \epsilon_0\mu_0\ div\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Or div $\overrightarrow{rot}\vec{B} = 0$ d'où $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\,\vec{j} = 0$

Exercice 3 : Temps caractéristique d'évolution de la densité volumique de charge dans un milieu conducteur

1. σ est en $\Omega^{-1}\,\text{m}^{-1}$.
2. On obtient $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rho = 0$
3. La solution de l'équation précédente s'écrit $\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}$.
4. Le temps caractéristique d'évolution de la charge dans le milieu a pour expression $\tau = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}$. $\tau << 1$ pour un conducteur.

Exercice 4 : Une solution des équations de Maxwell

1. On injecte $\vec{E} = E_0\cos(\omega t - kx)\widehat{u}_y$ et $\vec{B} = E_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\cos(\omega t - kx)\widehat{u}_z$ avec $\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ dans les équations de Maxwell.

Exercice 5 : Des formes locales aux formes intégrales

1. Il faut utiliser les th de Stokes et de d'Ostrogradski.
2. Le courant de déplacement a pour expression $\varepsilon_0 \iint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.d\vec{S}$

1 La mise en œuvre

Exercice 6 : Courant de déplacement

1. $E = \frac{q}{S\varepsilon_0}$ (voir TD ou cours de L2)
2. $j_{deplacement} = \mu_0 \frac{q_0 S}{\tau}$.
3. $\vec{B} = \mu_0 \frac{q_0 S r}{2\tau} \widehat{u}_\theta$.
4. Maxwell-Faraday est vérifiée.

Exercice 7 : Solution des équations de Maxwell ?

1. Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère sont incompatibles entre-elles avec la forme du champ électrique donnée.

Exercice 8 : Loi d'Ohm généralisée

Dans un milieu conducteur, les particules qui participent à la conduction du courant sont soumises dans le cas général à la force de Lorentz $\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E} + \vec{v} \wedge \overrightarrow{B})$. La loi d'Ohm locale s'écrit alors $\overrightarrow{J} = \sigma(\overrightarrow{E} + \vec{v} \wedge \overrightarrow{B})$.

1. $\begin{array}{ll} (1) : \text{div } \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & (2) : \text{div } \overrightarrow{B} = 0 \\ (3) : \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} & (4) : \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{B} = \mu_0\ \overrightarrow{j} \end{array}$
2. $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{B}) = 0$ d'où div $\overrightarrow{j} = 0$. On retrouve la loi des nœuds dans ce cas.
3. On part de $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{B} = \vec{\nabla} \text{div } \overrightarrow{B} - \Delta \overrightarrow{B}$ pour obtenir $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v} \wedge \overrightarrow{B}) + \eta \Delta \overrightarrow{B}$ avec $\eta = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$.

Exercice 9 : Calcul du taux de variation du champ magnétique

1. $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E}$ d'où $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 2\frac{E_0}{\delta^2}(x - vt)e^{-\frac{(x-vt)^2}{\delta^2}} \widehat{u}_z$.

Exercice 10 : Équations de Maxwell et conservation de la charge

1. $\begin{array}{ll} (1) : \text{div } \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & (2) : \text{div } \overrightarrow{B} = 0 \\ (3) : \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} & (4) : \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{B} = \mu_0\ \overrightarrow{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \end{array}$
2. Maxwell-Faraday.
3. On a $div \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}$ et div $\overrightarrow{rot} \overrightarrow{B} = \mu_0$ div $\overrightarrow{j} + \epsilon_0 \mu_0\ div \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$. Or div $\overrightarrow{rot} \overrightarrow{B} = 0$ d'où $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \overrightarrow{j} = 0$
4. $\frac{d\rho}{dt} = -\frac{9Q}{4\pi R^4} \frac{dR}{dt}$. On a $\frac{d\rho}{dt} > 0$ si $\frac{dR}{dt} < 0$
5. div $\overrightarrow{J} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 J_r}{\partial r}$.
6. On utilise Maxwell-Gauss pour obtenir $\frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 E}{\partial r} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ d'où $\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{r}{3} \widehat{u}_r$. Si on injecte cette expression dans l'équation de Maxwell-Ampère, on trouve que $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{B} = \vec{0}$. Le champ magnétique est nul.

Exercice 11 : Loi d'Ohm généralisée

1. La loi d'Ohm généralisée a pour expression $\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$, si $\sigma = \infty$, alors nous devons avoir $\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ pour que le courant reste fini (un courant infini est impossible car il y aurait une énergie infinie dissipée par effet joule). L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit alors $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \overrightarrow{rot}(\vec{v} \wedge \vec{B})$.

Exercice 12 : Potentiel vecteur et potentiel scalaire

1. div $\vec{B} = 0$ implique $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A}$.
2. On a $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = -\overrightarrow{rot}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$ d'où $\overrightarrow{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$.
3. Il faut utiliser le système de coordonnées cartésiennes pour montrer que $\overrightarrow{rot}(\vec{\nabla} V) = 0$.
4. On en déduit que le champ électrique est donné par $\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.