# Électromagnétisme

# AAV n°6 : être capable de citer les équations de Maxwell et de les manipuler

**Consignes :** Justifier toutes les réponses. Une réponse correcte non justifiée est considérée comme fausse en devoir. Soigner la rédaction des réponses et respecter les notations de l'énoncé. Une réponse qui utilise une autre notation est considérée comme fausse en devoir.

## 1 Les savoir-faire à connaître

### Savoir écrire les équations de Maxwell

**Exercice 1 : Équations de Maxwell**

1. Écrire les équations de Maxwell dans le cas général.
2. Écrire les équations de Maxwell dans le vide.
3. Écrire les équations de Maxwell en régime permanent.

### Savoir manipuler les équations de Maxwell

**Exercice 2 : Équation de conservation de la charge**

On rappelle que le théorème de Schwartz assure que les dérivées partielles temporelles et spatiales commutent.
On rappelle que que $div\ \overrightarrow{rot}\vec{A} = 0$ pour un champ de vecteur $A$ quelconque.

1. Combiner la dérivée temporelle de l'équation de Maxwell-Gauss avec l'équation de Maxwell-Ampère pour obtenir l'équation de conservation de la charge.

**Exercice 3 : Temps caractéristique d'évolution de la densité volumique de charge dans un milieu conducteur**

La loi d'Ohm locale dans un milieu conducteur a pour expression $\vec{j} = \sigma\vec{E}$.

1. On considère un milieu conducteur (du cuivre) de conductivité $\sigma = 10^5$ SI. Quelle est précisément son unité ?
2. Prendre la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère combinée avec l'équation de Maxwell-Gauss pour trouver une équation différentielle satisfaite par la densité volumique de charge $\rho$.
3. En déduire l'évolution temporelle de la densité volumique de charge.
4. Obtenir un temps caractéristique d'évolution de la charge dans le milieu. Conclusion ? On rappelle que $\varepsilon_0 = 8{,}84 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$.

**Exercice 4 : Une solution des équations de Maxwell**

1. Montrer que le champ électromagnétique d'expression $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\widehat{u}_y$ et $\vec{B} = E_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\cos(\omega t - kx)\widehat{u}_z$ avec $\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ est solution des équations de Maxwell dans le vide.

**Savoir passer des formes locales aux formes intégrales**

**Exercice 5 : Des formes locales aux formes intégrales**

1. Passer de la forme locale à la forme intégrale pour les équations de Maxwell-Gauss, Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère.
2. Identifier le courant de déplacement.

## 2 La mise en œuvre pour valider l'apprentissage

**Exercice 6 : Courant de déplacement**

On considère un condensateur plan alimenté en courant tel que la charge sur la plaque chargée positivement de surface $S$ évolue suivant la loi $q = q_0\frac{t}{\tau}$ où $\tau$ est une constante.

1. Déterminer l'expression du champ électrique dans un condensateur plan à l'aide du théorème de Gauss dans le cas où les effets de bord sont négligeables. On considère que l'axe orthogonal aux plaques est $Oz$.
2. En déduire l'expression de la densité de courant volumique de déplacement.
3. Utiliser l'équation de Maxwell-Ampère pour déterminer l'expression du champ magnétique dans le condensateur en utilisant le système de coordonnées cylindriques et en cherchant un champ $\vec{B} = B(r,t)\widehat{u}_\theta$.
4. Vérifier que l'équation de Maxwell-Faraday est bien vérifiée par la solution proposée.

**Exercice 7 : Solution des équations de Maxwell ?**

1. Est-ce que le champ électromagnétique d'expression $\vec{E} = \frac{x+vt}{\delta}\widehat{u}_y$ - où $\delta$ est une constante - est solution des équations de Maxwell dans le vide ?

**Exercice 8 : Loi d'Ohm généralisée**

Dans un milieu conducteur, les particules qui participent à la conduction du courant sont soumises dans le cas général à la force de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$. La loi d'Ohm locale s'écrit alors $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$.

1. Écrire les équations de Maxwell lorsque le courant de déplacement est négligeable.
2. En déduire que $div\ \vec{j} = 0$ dans ce cas.
3. Montrer en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère, l'équation de Maxwell-Faraday et une relation d'analyse vectorielle que $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}\wedge\vec{B}) + \eta\Delta\vec{B}$. En déduire l'expression de $\eta$.

**Exercice 9 : Calcul du taux de variation du champ magnétique**

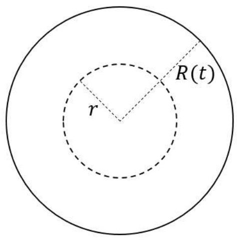
Soit $\vec{E} = E_0 e^{-\frac{(x-vt)^2}{\delta^2}}\widehat{u}_y$ où $\delta$ et $v$ sont des constantes.

1. Déterminer l'expression de $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

**Exercice 10 : Équations de Maxwell et conservation de la charge**

1. Écrire les équations de Maxwell dans le cas général.
2. Quelle équation décrit les phénomènes d'induction ?
3. Retrouver l'équation de conservation de la charge à partir des équations de Maxwell.

Une boule de rayon variable $R(t)$ contient une charge totale $Q$ uniformément répartie dans son volume. On admet que lorsque $R$ varie, le mouvement des charges à l'intérieur de la sphère est radial.




4. Montrer que $\frac{d\rho}{dt} = -\frac{9Q}{4\pi R^4}\frac{dR}{dt}$. Interpréter physiquement le signe de $\frac{d\rho}{dt}$ en fonction du signe de $\frac{dR}{dt}$.
5. En déduire l'expression de $div\ \vec{J}$.
6. On suppose que le champ magnétique est nul. En déduire l'expression du champ électrique produit par la boule. Est-ce que ce champ électrique produit un champ magnétique ?

**Exercice 11 : Loi d'Ohm généralisée**

Dans un plasma, le vecteur densité de courant volumique est lié au champ électrique et magnétique par la relation $\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$.

1. Montrer que pour un fluide parfaitement conducteur $\sigma = \infty$ : $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \overrightarrow{rot}(\vec{v} \wedge \vec{B})$.

**Exercice 12 : Potentiel vecteur et potentiel scalaire**

1. Montrer à partir des équations de Maxwell que le champ magnétique dérive d'un champ $\vec{A}$ appelé le potentiel vecteur.
2. Déduire de l'équation de Maxwell-Faraday que $\overrightarrow{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$.
3. Montrer avec un système de coordonnées cartésiennes que $\overrightarrow{rot}(\vec{\nabla} V) = 0$ pour un champ scalaire $V = V(x, y, z)$ quelconque.
4. En déduire que le champ électrique est donné par $\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ où $V$ est le potentiel électrique.