# Électromagnétisme

# AAV n°4 : être capable d'utiliser les équations locales de la magnétostatique - solution

## 1 Les savoir-faire

### Savoir utiliser le théorème de Gauss local pour le champ magnétique

**Exercice 1 : Champ magnétique terrestre**

Il faut utiliser $div\ \vec{B} = 0$ en coordonnées sphériques. On trouve $a = 2$.

### Savoir utiliser le théorème d'Ampère local

**Exercice 2 : Champ d'une distribution uniforme de courant**

1. Les plans de symétries et la règle de la main droite montre que le champ magnétique est suivant $\widehat{u}_\theta$ (faire un schéma pour le montrer). Les invariances par translation et par rotation montre que le champ magnétique dépend uniquement de la variable $r$.
2. $\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$. Valide uniquement pour des courant permanents.
3. Il faut déterminer le champ $\vec{B}$ dans le cylindre en premier en tenant compte du fait que le champ doit être fini en $r = 0$. Le théorème local d'Ampère s'écrit $\frac{1}{r}\frac{\partial r B_\theta}{\partial r} = \mu_0 j$ en cylindrique. On en déduit $B_\theta = \mu_0 j \frac{r}{2} + \frac{C}{r}$ où $C$ est une constante. Le champ magnétique doit resté fini en $r = 0$, la constante $C$ est donc nulle et $B_\theta = \mu_0 j \frac{r}{2}$ à l'intérieur du cylindre.
4. A l'extérieur du cylindre, le théorème d'Ampère s'écrit $\frac{1}{r}\frac{\partial r B_\theta}{\partial r} = 0$ d'où $B_\theta = \frac{C}{r}$ où $C$ est une constante. On utilise la continuité du champ magnétique en $r = a$ pour déterminer la constante $C$. On obtient ainsi $B_\theta = \mu_0 j \frac{a^2}{2r}$ à l'extérieur du cylindre en utilisant la continuité du champ à l'interface pour déterminer la constante.

   Remarque : il également possible d'utiliser les signes intégrales en faisant attention aux choix des bornes. On obtient dans le cylindre $\int_0^{rB_\theta} d(rB_\theta) = \int_0^r \mu_0 j r dr$ (attention, il est implicite que $B_\theta$ est fini en $r = 0$ dans ce cas. Il ne faut pas fixer la borne supérieure pour avoir le champ magnétique en fonction de $r$ à la fin du calcul) d'où $B_\theta = \mu_0 j \frac{r}{2}$ à l'intérieur du cylindre. A l'extérieur, on obtient $\int_{aB_\theta(a)}^{rB_\theta} d(rB_\theta) = 0$ où $B_\theta(a) = \mu_0 j \frac{a}{2}$ d'où $B_\theta = \mu_0 j \frac{a^2}{2r}$ à l'extérieur du cylindre.

### Savoir retrouver le potentiel vecteur

**Exercice 3 : Potentiel vecteur**

1. Calculs sans difficultés.
2. Voir cours.

**Savoir étudier un supraconducteur à l'aide de l'équation de Maxwell-London**

**Exercice 4 : supraconducteur**

Un supraconducteur se modélise comme un milieu dans lequel le potentiel vecteur vérifie $\vec{j} = -\frac{ne^2}{m}\vec{A}$ où $n$ est la densité volumique électronique, $e$ la charge élémentaire et $m$ la masse de l'électron. On rappelle que le champ magnétique est relié au potentiel vecteur par $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\ \vec{A}$.

1. $\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0\vec{j}$
2. On part de $\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0\vec{j}$. On a $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\vec{B} = \vec{\nabla}div\ \vec{B} - \Delta\vec{B} = -\Delta\vec{B}$ et $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\overrightarrow{rot}\ \vec{j} = -\frac{\overrightarrow{rot}\ \vec{A}}{\delta^2}$ d'où $\Delta\vec{B} = \frac{\vec{B}}{\delta^2}$.
3. Invariance par translation dans la direction $Ox$ et $Oy$.
4. $div\ \vec{B} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$ d'où $B_z = cst$.
5. $\frac{\partial^2}{\partial z^2}B_x - \frac{B_x}{\delta^2} = 0$ et $\frac{\partial^2}{\partial z^2}B_y - \frac{B_y}{\delta^2} = 0$.
6. Le champ magnétique est suivant $Ox$. Le champ magnétique dans le supra est donc solution de $\frac{\partial^2}{\partial z^2}B_x - \frac{B_x}{\delta^2} = 0$ d'où $B_x = Ae^{-x/\delta} + Be^{+x/\delta}$. Le champ magnétique ne peut pas diverger dans le supraconducteur d'où $B_x = B_0e^{-x/\delta}$ en utilisant la continuité du champ magnétique pour déterminer la constante.
7. C'est $\delta$.

## 2 La mise en œuvre

**Exercice 5 : supraconducteur**

1. On part de $\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0\vec{j}$. On a $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\vec{B} = \vec{\nabla}div\ \vec{B} - \Delta\vec{B} = -\Delta\vec{B}$ et $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\overrightarrow{rot}\ \vec{j} = -\frac{\overrightarrow{rot}\ \vec{A}}{\delta^2}$ d'où $\Delta\vec{B} = \frac{\vec{B}}{\delta^2}$.
2. Le champ magnétique est de la forme $\vec{B} = B_0\widehat{u}_z$. L'équation donnant le champ magnétique a pour expression $\frac{d^2B}{dx^2} = \frac{B}{\delta^2}$. Nous cherchons les solutions sous la forme de cosh et sinh pour tenir compte plus facilement des symétries. Nous avons donc $B = C\cosh\left(\frac{x}{\delta}\right) + D\sinh\left(\frac{x}{\delta}\right)$ où les constantes $C$ et $D$ sont déterminées par les conditions aux limites ($B = B_0$ en $x = \pm e$). On obtient ainsi $\vec{B} = B_0\frac{\cosh\left(\frac{x}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{e}{\delta}\right)}\widehat{u}_z$.
3. La densité de courants $\vec{j}$ dans la plaque est donnée par le théorème d'Ampère local d'où $\vec{j} = -\frac{B_0}{\mu_0\delta}\frac{\sinh\left(\frac{x}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{e}{\delta}\right)}\widehat{u}_y$
4. Pour $0 \leqslant x \leqslant e$, $\delta << x$ et $\delta << e$ on a : $B = B_0e^{\frac{x-e}{\delta}}$. Le champ magnétique est non nul pour $x = e$.