Électromagnétisme

AAV n°4 : être capable d'utiliser les équations locales de la magnétostatique

Consignes : Justifier toutes les réponses. Une réponse correcte non justifiée est considérée comme fausse en devoir. Soigner la rédaction des réponses et respecter les notations de l'énoncé. Une réponse qui utilise une autre notation est considérée comme fausse en devoir.

1 Les savoir-faire à connaître

Savoir utiliser le théorème de Gauss local pour le champ magnétique

Exercice 1 : Champ magnétique terrestre

Le champ magnétique terrestre est modélisé par le champ d'un dipôle permanent de moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}} = -\mathcal{M}\widehat{u}_z$ situé au centre de la Terre.
On écrit l'expression du champ magnétique engendré par le dipôle $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ en coordonnées sphériques sous la forme :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3}(a\cos\theta\widehat{u}_r + \sin\theta\widehat{u}_\theta)$$

où a est un entier. Déterminer la valeur de a en utilisant le théorème de Gauss local pour le champ magnétique

Savoir utiliser le théorème d'Ampère local

Exercice 2 : Champ d'une distribution uniforme de courant

Un conducteur cylindrique plein infini, d'axe Oz et de rayon a est parcouru par un courant de densité volumique uniforme $\vec{j} = j\widehat{u}_z$. La densité surfacique de courant est nulle.

1. Montrer que $\vec{B} = B(r)\widehat{u}_\theta$ en utilisant les symétries.
2. Rappeler l'expression du théorème d'Ampère local. Est-ce que ce théorème est toujours valide ?
3. Déterminer l'expression de $\vec{B}$ à l'intérieur du conducteur à l'aide du théorème d'Ampère local. Rappel : vous devez utiliser le fait que le champ doit rester fini pour déterminer la constante.
4. Déterminer l'expression du champ magnétique à l'extérieur du conducteur grâce au théorème d'Ampère local et en utilisant la continuité du champ magnétique à la surface du conducteur.

Savoir retrouver le potentiel vecteur

Exercice 3 : Potentiel vecteur

1. Montrer avec un système de coordonnées cartésiennes que $div\ \overrightarrow{rot}\vec{A} = 0$ pour un champ de vecteur $\vec{A} = A_x\widehat{u}_x + A_y\widehat{u}_y + A_z\widehat{u}_z$ quelconque.
2. En déduire que le champ magnétique dérive d'un champ $\vec{A}$ appelé le potentiel vecteur.

Savoir étudier un supraconducteur à l'aide de l'équation de Maxwell-London

Exercice 4 : supraconducteur

Un supraconducteur se modélise comme un milieu dans lequel le potentiel vecteur vérifie $\vec{j} = -\frac{ne^2}{m}\vec{A}$ où n est la densité volumique électronique, e la charge élémentaire et m la masse de l'électron. On rappelle que le champ magnétique est relié au potentiel vecteur par $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\ \vec{A}$.

1. Rappeler la version locale du théorème d'Ampère en régime permanent.
2. A l'aide des équations locales de la magnétostatique et de la relation $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\ \vec{K}) = \vec{\nabla}(div\ \vec{K}) - \Delta\vec{K}$ valide pour tout champ de vecteurs $\vec{K}$, déterminer l'équation aux dérivées partielles satisfaite par $\vec{B}$.
3. Le supraconducteur occupe le demi-espace $z \geqslant 0$. Justifier que les composantes de $\vec{B}$ dépendent uniquement de z.
4. En utilisant $div\ \vec{B} = 0$, montrer que B_z est obligatoirement constant.
5. Écrire les equations différentielles pour B_x et B_y.
6. A l'extérieur du supraconducteur, le champ magnétique est uniforme et a pour expression $\vec{B} = B_0\widehat{u}_x$. déterminer l'expression du champ magnétique dans le supraconducteur en utilisant le fait que le champ magnétique est continu à l'interface et que le champ magnétique ne peut pas diverger dans le supraconducteur.
7. Déterminer l'expression de la longueur caractéristique de décroissance du champ magnétique dans le supraconducteur.

2 La mise en œuvre pour acquérir l'apprentissage

Exercice 5 : supraconducteur

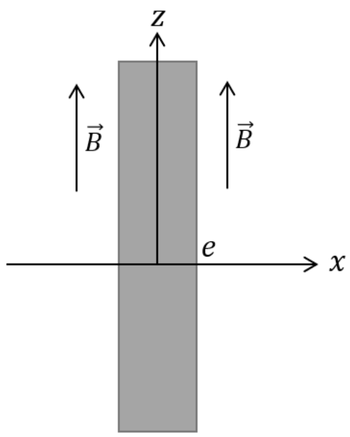
On constate expérimentalement qu'en régime stationnaire, un matériau supraconducteur tend à expulser le champ magnétique en créant des courants localisés au voisinage de sa surface (effet Meissner). Pour rendre compte de cet effet, on admet que dans un supraconducteur, la loi d'Ohm est remplacée par la relation phénoménologique de London :

$$\vec{j} = -\frac{\vec{A}}{\mu_0\delta^2}$$

où δ est un paramètre caractéristique du matériau.

1. Montrer que $\vec{B}$ est solution de $\Delta\vec{B} = \frac{\vec{B}}{\delta^2}$ à partir de la relation vectorielle $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\vec{B} = \vec{\nabla}(div\ \vec{B}) - \Delta\vec{B}$.

2. Le matériau est une plaque comprise entre les plans d'équations $x = \pm e$. On impose un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B_0 \widehat{u}_z$. Déterminer le champ dans la plaque en le supposant de la forme $\overrightarrow{B} = B(x)\widehat{u}_z$ (exprimer les solutions comme une combinaison de cosh et sinh pour exploiter les symétries). Tracer l'allure de son graphe pour $\delta << e$. Commentaires.



3. Exprimer la densité de courants $\vec{j}$ dans la plaque. Tracer l'allure de son graphe pour $\delta << e$ et commenter.
4. On fait tendre δ vers zero. Que devient l'expression du champ magnétique ? En déduire que le champ magnétique est discontinue à l'interface dans ce cas.
5. Déterminer l'expression des courants superficiels surfaciques en utilisant la relation de passage du champ magnétique.