Électromagnétisme

AAV n°3 : être capable d'utiliser le vecteur densité de courant et l'équation de conservation de la charge - réponses

1 Les savoir-faire

Savoir utiliser une densité volumique et surfacique de courant

Exercice 1 : Densité volumique et surfacique de courant

1. Pour transporter le courant sans risque, la valeur de la densité volumique de courant ne doit pas changer donc $S_1 = S_2 \frac{I_1}{I_2} = 3,75$ mm^2.
2. $j = \frac{i}{\pi R^2}$.
3. Calculer le courant $i = \iint j dx dz = j_0 \int_0^{+\infty} \int_0^h e^{-\frac{z}{\delta}} dx dz = h j_0 \delta$.

Savoir utiliser la loi d'Ohm local

Exercice 2 : De la loi d'Ohm locale à la loi d'Ohm

1. La différence de potentiel électrique entre deux points est donnée par $V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}.\mathrm{d}\vec{l} = \int_A^B \frac{1}{\sigma} \vec{j}.\mathrm{d}\vec{l}$. Les vecteurs $\vec{j}$ et $\vec{l}$ sont colinéaires d'où $V(A) - V(B) = \int_A^B \frac{1}{\sigma} j dl = \frac{jl}{\sigma}$.
2. On a $I = jS$ d'où $V(A) - V(B) = \frac{Il}{S\sigma}$.
3. On en déduit $R = \frac{l}{S\sigma}$.

Savoir étudier le modèle de Drude

Exercice 3 : Le modèle de Drude

1. $\vec{v}_i = \vec{v}_{i,k} - \frac{e}{m}\vec{E}\Delta t_k$.
2. $\vec{v} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \vec{v}_{i,k} - \frac{e}{m}\vec{E}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta t_k = -\frac{e}{m}\vec{E}\tau$.
3. $\vec{j} = -ne\vec{v} = \frac{ne^2}{m}\vec{E}\tau$ or $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ d'où $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$.
4. A.N.

Savoir calculer un courant et vérifier l'équation de continuité*

Exercice 4 : Équation de continuité

1. $\rho(t) = \frac{3Q}{4\pi R^3(t)}$
2. $q = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = Q\frac{r^3}{R^3(t)}$.
3. $\frac{dq}{dt} = -Q\frac{3r^3}{R^4(t)}\frac{dR}{dt}$.
4. On vérifie que $div\ \overrightarrow{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ est bien respectée avec $j(r,t) = \frac{3Qr}{4\pi R^4}\frac{dR}{dt}$.

2 La mise en œuvre

Exercice 5 : Conservation de la charge

1. On a $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ d'où $\frac{d\rho}{dt} = -\frac{9Q}{4\pi R^4}\frac{dR}{dt}$. On a $\frac{d\rho}{dt} > 0$ si $\frac{dR}{dt} < 0$
2. $div\ \overrightarrow{J} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 J_r}{\partial r}$.
3. L'équation de continuité de la charge s'écrit donc $\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 J_r}{\partial r} = \frac{9Q}{4\pi R^4}\frac{dR}{dt}$ d'où $J_r = \frac{3Qr}{4\pi R^4}\frac{dR}{dt} + \frac{Cst}{r^2}$. Le courant doit resté fini en $r = 0$ d'où $Cst = 0$.
4. Nous avons $J_r = nqv$ soit $J_r = \rho v$ avec $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$ d'où $v = \frac{r}{R}\frac{dR}{dt}$.
5. $I = \iint \vec{J}.d\vec{S}$ d'où $I = \frac{3Qr^3}{R^4}\frac{dR}{dt}$.